МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

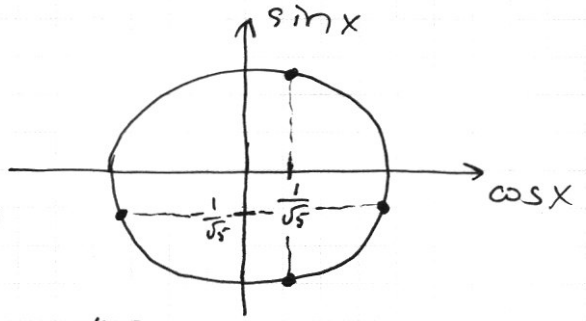
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha}_{\parallel} = -\frac{2}{5} \end{cases}$ $\quad \underline{tg\alpha = ?}$

$2\underline{\sin(2\alpha+2\beta)}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$;

Получим: $\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{5}$;

$\underline{\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}}$;



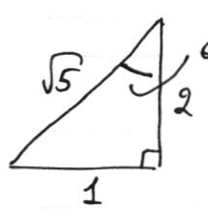
$\begin{cases} 2\beta = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}; \\ \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k, \; k\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases}$

Также заметим, что $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\pi}{2}$;

Тогда если подставить 2β: $\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\mp\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi(k-n) \\ 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\mp\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi+2\pi(k-n) \end{array}\right.$

1) $2\alpha = \underbrace{-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}_{-\frac{\pi}{2}}+2\pi(k-n)$;

• $\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi(k-n) \to \boxed{tg\alpha = -1}$



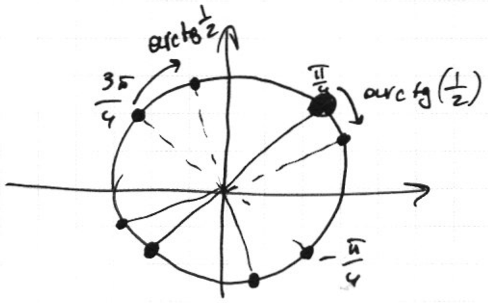
$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \underline{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}$

2) $2\alpha = +\frac{\pi}{2}-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi(k-n)$

• $\alpha = \frac{\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi(k-n)$

3) • $\alpha = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi(k-n) = \frac{\pi}{4}+\pi(k-n) \to \boxed{tg\alpha = 1}$ (не влияет $tg(x+\pi k) = tgx$)

4) • $\alpha = \frac{\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+\frac{\pi}{2}+\pi(k-n) = \frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi(k-n)$



$\cdot\ tg\left(\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\cdot\ tg\left(\frac{3\pi}{4} - arctg\frac{1}{2}\right) = \frac{-1-\frac{1}{2}}{1-(-1)\cdot(-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\cdot 2 = -3$

Все эти значения $tg\,\alpha$ возможны, ведь мы выразили $2\alpha+2\beta$, так что $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а также преобразовав 2 ур-е системы выразили 2β так, что $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\Rightarrow$ (2) ур-е сист. тоже выполнено.

Ответ: $\cancel{tg\,\alpha = \pm 1}$; $\cancel{\frac{1}{3}}$;

$\cancel{tg\,\alpha = \{-3}$; $\}$ $tg\,\alpha = \{-3; -1; \frac{1}{3}; 1\}$

№3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

] $x^2 - 10x = t$, тогда: $|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)}$;

огр-я: $-t > 0$ (4)

$t < 0$; Тогда $|t| = -t$;

$-t^{\log_3 4} \geq t + \underbrace{5^{\log_3(-t)}}_{-t^{\log_3 5}}$

$(-t)^{\log_3 4} \geq t + (-t)^{\log_3 5}$; → ~~Пусть~~ $\cancel{f(t) = (-t)^{\log_3 4} - t - (-t)^{\log_3 5}}$,

$\cancel{4^{\log_3(-t)} \geq t + 5^{\log_3 -t}}$; ~~Пу~~ ~~Тогда~~ $\cancel{f'(t) = (-t)^{\log_3 4}\cdot\log_3 4\cdot\left(\frac{1}{t}\right) - 1 -}$

$\cancel{- (-t)^{\log_3 5}\cdot\log_3 5\cdot\left(\frac{1}{-t}\right) =}$

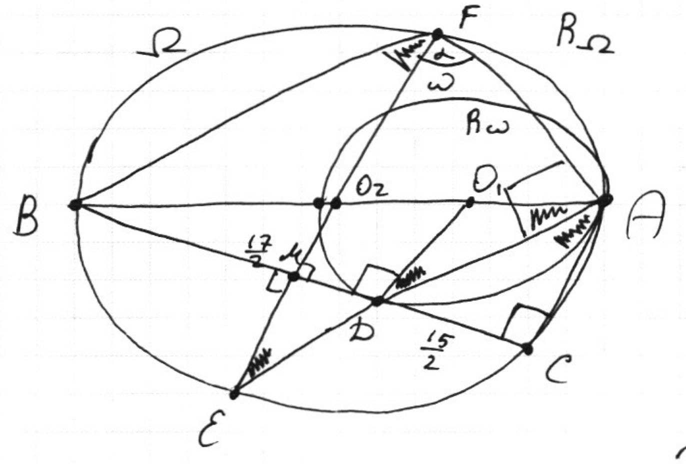
$\cancel{= \left(\frac{1}{-t}\right)\cdot\left((-t)^{\log_3 4}\cdot\log_3 4 - (-t)^{\log_3 5}\cdot\log_3 5\right) - 1}$;

МФТИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4)



$\alpha = ?$ $R_\Omega, R_\omega = ?$

$S_{AFE} = ?$

1) $\angle BFE = \angle BAE$ (впис-ые)

$\angle BAE = \angle O_1DA$ (O_1 - центр ω $\Rightarrow O_1D = O_1A = R_\omega$);

$\angle O_1DA = \angle FEA$, т.к.

$EF \perp BC$ и $DO_1 \perp BC \Rightarrow EF \parallel DO_1$, значит

$\angle BFE = \angle FEA \Rightarrow BF \parallel EA$; ~~и т.к. $\angle O_2EA = O_2AE$ (O_2 - центр Ω) $\Rightarrow O_2E = O_2A$, а также $O_2B = O_2F$~~ т.к. $AC \perp BC$ и $EF \perp BC \Rightarrow$

$AC \parallel EF$ и т.к. $BF \parallel EA \Rightarrow \angle BFE = \angle EAC$;

значит AE - бисс-са угла $\angle BAC$.

значит E - сер-на дуги BC и $\Rightarrow$

EF - серпер к BC, тогда $EF \cap BA = O_2$ - центр окр-ти Ω.

2) По св-ву бисс-сы: $\frac{\left(\frac{17}{2}\right)}{\left(\frac{15}{2}\right)} = \frac{17}{15} = \frac{BA}{AC} = \frac{1}{\sin\angle ABC}$;

Тогда, т.к $BA = 2R_\Omega$, $AC = \frac{15}{17}\cdot 2R_\Omega$, то

$BC^2 + AC^2 = 4R_\Omega^2 \Rightarrow 16^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 \cdot 4R_\Omega^2 = 4R_\Omega^2 \Rightarrow$

$16^2 = 4R_\Omega^2\left(\frac{17^2-15^2}{17^2}\right) = \frac{64\cdot 4}{17^2}R_\Omega^2 \Rightarrow 16 = \frac{8\cdot 2}{17}\cdot R_\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R_\Omega = 17}$, $AC = \frac{15}{\cancel{17}}\cdot 2\cdot \cancel{17} = 30$.

(по 2-ум углам)

$\triangle ADC \sim \triangle EDM$ (M – середина BC)

Тогда $\frac{AD}{DE} = \frac{DC}{MD} = \frac{\frac{15}{2}}{\underbrace{8-\frac{15}{2}}_{\frac{1}{2}}} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 15$.

кроме того, $\triangle O_1DA \sim \triangle O_2EA$ (по 2-ум углам)

и $\frac{O_1D}{O_2E} = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AD+DE}$; $\Rightarrow \frac{O_2E}{O_1D} = 1 + \frac{DE}{AD} = 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$;

$\left.\begin{array}{l} O_2E = R_\Omega \\ O_1D = R_\omega \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_\Omega}{R_\omega} = \frac{17}{R_\omega} = \frac{16}{15}$;

$R_\omega = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$;

3) $AD^2 = DC^2 + AC^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 900 = \frac{225}{4} + 900 = \frac{225+3600}{4} =$

$= \frac{3825}{4}$; ; ~~AD~~ $\frac{AE}{AD} = \frac{16}{15} \Rightarrow AE^2 = AD^2\cdot\frac{16^2}{15^2} =$

$= \frac{\cancel{15^2}}{4}\cdot\frac{16^2}{\cancel{15^2}} + \frac{\cancel{15^2}\cdot 4\cdot 16^2}{\cancel{15^2}} = \frac{16^2}{4} + 16^2\cdot 4 = 16^2\cdot\frac{17}{4}$;

$AE = \frac{16}{2}\sqrt{17} = \underline{\underline{8\sqrt{17}}}$.

$\sin\underset{\angle EFA}{\alpha} = \frac{AE}{EF} = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = 4\frac{\sqrt{17}}{17}$.

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot EA$ (т.к. $\angle FAE = 90°$ (опир-ся на диаметр)

$FA^2 = EF^2 - EA^2 = 4\cdot 17^2 - \underset{=4^3}{\frac{16^2}{4}}\cdot 17 =$

$= 17\cdot 4(17-16) = \underline{17\cdot 4}$

$\Rightarrow \underline{AF = 2\sqrt{17}}$; $S_{AEF} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{17} = 8\cdot 17 = \underline{136}$.

<u>Ответ</u>: $\left\{\begin{array}{l} R_\Omega = 17 \\ R_\omega = \frac{255}{16} \\ \alpha = \angle EFA = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \\ S_{AEF} = 136 \end{array}\right.$

№ 6) • $\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$; $= f(x)$ ← гр. гипербола

при $x \in [\frac{1}{4}; 1] \to 4x-5 \in [-4; -1]$;

Тогда $\frac{4}{4x-5} \in [-4; -1]$ и $4 + \frac{4}{4x-5} \in [0; 3]$

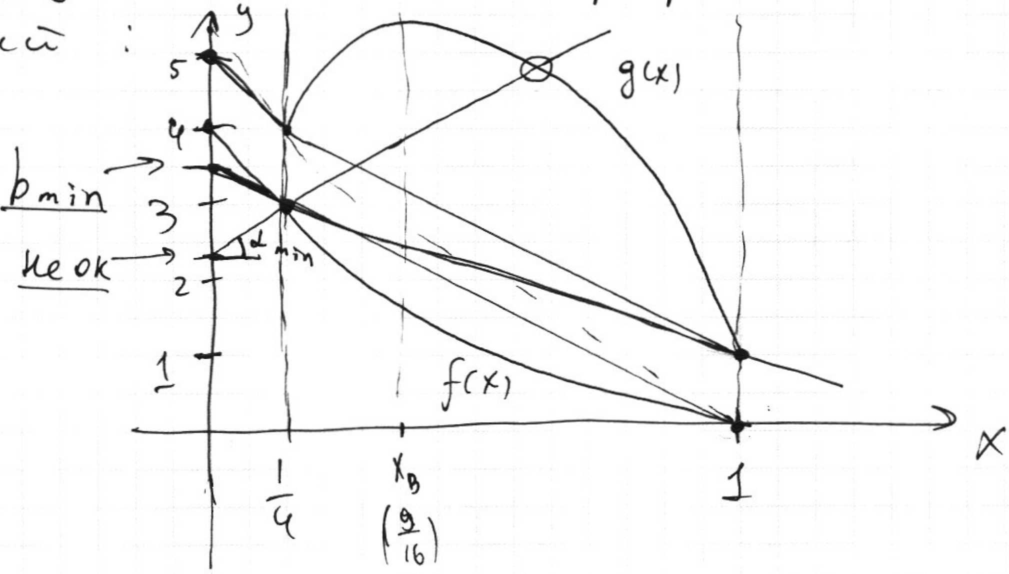
• $\underbrace{-32x^2 + 36x - 3}_{= g(x)} \to$ гр. парабола, ветви вниз.

$x_B = \frac{+36}{2 \cdot (+32)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} \in [\frac{1}{4}; 1]$;

$x = \frac{1}{4}$: $\underbrace{-32 \cdot \frac{1}{16}}_{-2} + \underbrace{36 \cdot \frac{1}{4}}_{+9} - 3 = 4$

$x = 1$: $-32 + 36 - 3 = 36 - 35 = 1$

Изобразим схематично графики обеих функций:



$ax + b$ - прямая, на $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, должна быть заключена между этими двумя графиками:

~~найдём касательную~~ при фикс. b — т.т a_0:

$a \cdot \frac{1}{4} + b = 3$, т.е. мы можем уменьшать угол наклона прямой до тех пор, пока прямая

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2+144y^2 \boxed{-26xy} + \overset{\cdot 3}{12y} + x - 6 = 0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

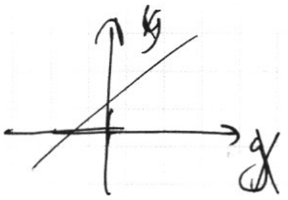
$$-9x-63-78xy$$

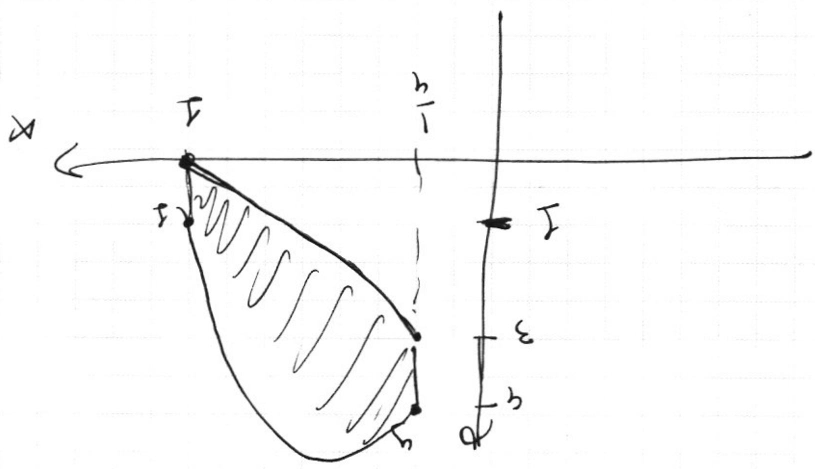
$$3x^2-49x-156y-186-26xy=0$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$(a;b)$ – верно $\forall x \in [\frac{1}{4};1]$

$$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} \leq ax+b \leq$$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

не пройдёт через точку $\left(\frac{1}{4};3\right)$;
Если такая прямая пересекает $g(x)$ на $x\in\left(\frac{1}{4};1\right)$, то такое b нам не подходит, ~~ведь~~ значит $\min(b)$ такой, что $\begin{cases} a\cdot\frac{1}{4}+b_{min}=3 \\ a\cdot 1+b_{min}=1\end{cases}$

$\frac{3}{4}a=-2$

$\boxed{a=-\frac{8}{3}}$; $b_{min}=1+\frac{8}{3}=\boxed{\frac{11}{3}}$;

при таком b подходит только $a=-\frac{8}{3}$,
найдём ур-я прямых, пр-их через т.
$\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$; $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;0)$; $\left(\frac{1}{4};3\right)$ и $(1;0)$.

$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{4}+b=4 \\ a+b=1\end{cases}$

$\frac{1}{4}a+1-a=4$

$\frac{3}{4}a=-3$

$\begin{cases} a=-4 \\ b=5\end{cases}$

$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{4}+b=4 \\ a+b=0\end{cases}$

$\frac{1}{4}a-a=4$

$-\frac{3}{4}a=4$

$\begin{cases} a=-\frac{16}{3} \\ b=\frac{16}{3}>5\end{cases}$

$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{4}+b=3 \\ a+b=0\end{cases}$

$-\frac{3}{4}a=3$

$\begin{cases} a=-4 \\ b=4\end{cases}$

1) Тогда при $b\in[b_{min};4]$: $a\in[a_0;a_1]$, где:
a_0: $a_0\cdot\frac{1}{4}+b=3\to\begin{cases}a_0=12-4b \\ a_1=1-b\end{cases}$; $\boxed{a\in[12-4b;1-b]}$
a_1: $a_1\cdot 1+b=1\to$

2) при $b\in[4;5]$: $a\in[a_0';a_1']$, где: $\begin{cases} a_0': a_0'\cdot 1+b=0 \\ a_1': a_1'\cdot 1+b=1\end{cases}$
$\boxed{a\in[-b;1-b]}$

3) при $b \in [5; \frac{16}{3}]$: $a \in [a_2; a_3]$,

где a_2: $a_2 \cdot 1 + b = 0 \rightarrow a_2 = -b$

a_3: $a_3 \cdot \frac{1}{4} + b = 4 \rightarrow a_3 = 16 - 4b$

$\boxed{a \in [-b; 16 - 4b]}$

при $b > \frac{16}{3}$ прямая, с наиб. углом наклона (углы, при которых прямая убывает, считаются отриц-ными), будет пересекать график $f(x)$ при $x \in (\frac{1}{4}; 1)$, значит при меньших углах – тоже $\Rightarrow$ при $b > \frac{16}{3}$ таких a нет.

<u>Ответ</u>: при $b \in [\frac{11}{3}; 4]$, $a \in [\cancel{\ }\ 12 - 4b; 1 - b]$

при $b \in [4; 5]$, $a \in [-b; 1 - b]$

при $b \in [5; \frac{16}{3}]$, $a \in [-b; 16 - 4b]$

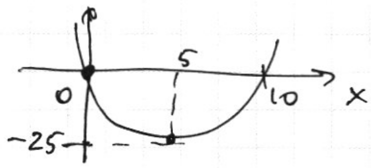
при $b > \frac{16}{3}$ и $b < \frac{11}{3}$ таких пар $(a; b)$, ~~при~~ <u>нет</u>.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t = x^2 - 10x$; $x_B = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow$



$t \in [-25; 0)$

$-t \in (0; 25]$

Исследуем $f'(t) = \left(-\frac{1}{t}\right)\cdot\left((-t)^{\log_3 4}\log_3 4 - (-t)^{\log_3 5}\log_3 5\right) - 1$;

При $(-t) \geq 1$: $(-t)^{\log_3 4} \leq (-t)^{\log_3 5}$, ~~т.к. (-t)≥1 =>~~ ~~$(-t)^x$ - возр.~~

и значит $(-t)^{\log_3 4}\log_3 4 \leq (-t)^{\log_3 5}\log_3 5$ } т.к. $\log_3 5 > \log_3 4$;

$\underset{>0}{\left(-\frac{1}{t}\right)}\cdot\underset{\leq 0}{\left((-t)^{\log_3 4}\log_3 4 - (-t)^{\log_3 5}\log_3 5\right)} - 1 < 0 \Rightarrow f(t)\downarrow$,

при $t \leq -1$;

рассм-им $t \in (-1; 0)$:

Тогда $(-t)^{\log_3 4} > (-t)^{\log_3 5}$ и т.к. $t < 0$, то

$(-t)^{\log_3 4} > (-t)^{\log_3 5} > (-t)^{\log_3 5} + \underset{<0}{t}$;

$\Rightarrow$ при $t \in (-1; 0)$ — нер-во выполняется.

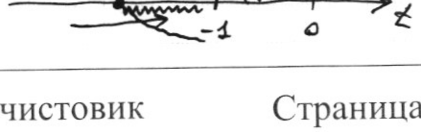
при ~~$t \in [-25;$~~ $t \leq -1$ $f(t)$ монотонна убывает

значит max один корень у ур-я:

$(-t)^{\log_3 4} = t + (-t)^{\log_3 5}$ и этот корень: $\boxed{t = -9}$

т.к. при $t = -1$; $1 \underset{0}{\overset{\text{(верное нер-во)}}{\geq}} -1+1$, то нер-ву $(-t)^{\log_3 4} \geq t + (-t)^{\log_3 5}$

удовл-ют ~~(-t)~~ $t \in [-9; -1]$:



Пусть $(-t) = t_0$, тогда $t_0^{\log_3 4} \geq t_0^{\log_3 5} - t_0$;
$(t_0 > 0)$ при $t_0 \in (0; 1)$: $t_0^{\log_3 4} > t_0^{\log_3 5}$

$t_0^{\log_3 4} > t_0^{\log_3 5} > t_0^{\log_3 5} - t_0$; (т.к. $\log_3 4 < \log_3 5$)

$\rightarrow$ нер-во выполнено. $t_0 \in (0; 1)$ – ок

рассм. $f(t_0) = t_0^{\log_3 4} - t_0^{\log_3 5} + t_0 \geq 0$;

$f'(t_0) = t_0^{\log_3 4} \log_3 4 \left(\frac{1}{t_0}\right) - t_0^{\log_3 5}\left(\frac{1}{t_0}\right)\log_3 5 + 1$;

$t_0^{(\log_3 4 - 1)} \cdot \log_3 4 - t_0^{(\log_3 5 - 1)} \cdot \log_3 5 + 1 \vee 0$

Заметим, что при $t_0 = 9$ достигается равенство: $\underset{16}{9^{\log_3 4}} = \underset{25}{9^{\log_3 5}} - 9$; (в исходном нер-ве)

№ 2) $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(1-2y)\cdot(6-x)} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\underline{(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90}$;

• $(x-6)^2 + 9\cdot(2y-1)^2 = 90$

$x - 12y = \underline{x - 6 - 6\cdot(2y-1)}$

$\begin{cases} \text{Пусть } (x-6) = a \\ 2y - 1 = b \end{cases}$

Тогда: $\begin{cases} a - 6\cdot b = \sqrt{(-b)\cdot(-a)} = \sqrt{ab}; \ \boxed{ab \geq 0} \\ a^2 + 9\cdot b^2 = 90 \end{cases}$

$\underline{a^2 + 36b^2 - 12ab = ab}$ (следствие)

$a^2 + 36b^2 - 13ab = 0$.

• $a^2 + 9b^2 = 90$

1) $90 + 27b^2 = 13ab$

2) $3a^2 = 360 - 13ab$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$36b^2 - 13ab + a^2 = 0 \quad | : (ab):$

$36\left(\frac{b}{a}\right) - 13 + \left(\frac{a}{b}\right) = 0$

Пусть $\frac{b}{a} = t$: $\quad 36t - 13 + \frac{1}{t} = 0$

$\frac{36t^2 - 13t + 1}{t} = 0$; $\quad D = 169 - \overbrace{120 - 24}^{-144} = 25$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{36 \cdot 2}$ ⟶ $\frac{18}{36 \cdot 2} = \frac{1}{4}$; ⟶ $\frac{8}{36 \cdot 2} = \frac{1}{9}$

1) $\frac{b}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4b = a$

Тогда: $\cancel{a^2 + 9}$. $16b^2 + 9b^2 = 25b^2 = 90$

$b^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5} \to b = \pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$a = \pm 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

2) $\frac{b}{a} = \frac{1}{9} \Rightarrow 9b = a \to 81b^2 + 9b^2 = \cancel{90b^2 = 90}$

$b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 9$

Ответ: $(a; b)$: $(9; 1)$

не подходит ⟶ $(-9; -1)$ ×

не подходит ⟶ $\left(4\sqrt{\frac{18}{5}}; \sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ ×

$\left(-4\sqrt{\frac{18}{5}}; -\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

ab везде ≥ 0, необходимо также, чтобы

$a - 6b \geq 0$: $9 - 6 \geq 0$ ✓

$-9 + 6 < 0 \Rightarrow$ не подходит

$4\sqrt{\frac{18}{5}} - 6\sqrt{\frac{18}{5}} < 0$ — не ок

$-4\sqrt{\frac{18}{5}} + 6\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 0$ — ок

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2-24xy+144y^2 =$
$= 2xy-12y-x+6;$

$\cancel{x^2+144y^2}$

$(x+6y)^2 - 12xy - 12x - 36y = 45$

$+12xy$

$x^2-26xy+144y^2+12y$
$+x-6=0$

$(x-6)^2+(6y-3)^2 = 45;$ (90)

-36 -9

$6(1-2y)-x(1-2y)$

$17\cdot 15 = 85 + 170 = 255$

$17\cdot 17 = 119+170 = 289$

$289 - 225 = 64$

$t_0^{\log_3 4}\ t_0^{\log_3 3} + t_0 \geq t_0^{\log_3 5}$

$(x-13y)^2 - 25y^2 + 12y$
$+x-6=0$

$(x-13y)^2 = 25y^2-12y+6$
$-x$

$56 \cdot 56$, 3289, 3290

$$x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

4225

$90 = (12y-6)^2+(6y-3)^2 =$
$= 36\cdot(2y-1)^2+9\cdot(2y-1)^2 =$
$= (2y-1)^2\cdot 45$

$\ln 3 < \ln 4 < \ln 5$

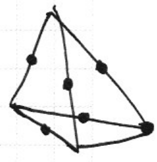
$\ln 12 > \ln 5$

$x^2-10x=t$

$-t>0$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)};$ $\quad t<0$

$(2y-1)^2 \leq 2$



$-t = t_0$

$4^x \geq -3^x + 5^x;$

$3^x = t$

$4^x = (3^x)^{\ell}\ \ldots$

$t_0^{\log_3 4} \geq -t_0 + t_0^{\log_3 5}$

$\boxed{3^x + 4^x \geq 5^x}$

$3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x\ln 3}$

$t_0^{\log_3 4} + t_0 \geq t_0^{\log_3 5};$

$3^x + 4^x - 5^x \geq 0$

$2\sqrt{12^x}$

$e^{x\ln 3}\cdot \ln 3 =$
$= 3^x \cdot \ln 3$

$t_0^{\log_3\left(\frac{4}{5}\right)} + t_0^{1-\log_3 5} \geq 1;$

$\boxed{t_0^{\log_3 \frac{4}{5}} + t_0^{\log_3 \frac{3}{5}} \geq 1}$

$f'(x) = (3^x\ln 3 + 4^x\ln 4 - 5^x\ln 5)$

$\left(-t^{\log_3 4}\right)' = \left(e^{\ln t \cdot \log_3 4}\right)' = \boxed{t^{\log_3 4}\cdot \log_3 4 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)}$

$0 \quad 1 \quad t_0$

$\int \frac{1}{t} = \ln t$

$\left(-\frac{1}{t}\right)(-t)^{\log_3 4}\log_3\left(\frac{4}{5}\right) - 1$

$(-t)^{(\log_3 4 - 1)}\cdot \log_3\left(\frac{4}{5}\right) - 1$

$(-t)^{\log_3 4}\cdot \log_3 4\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) - 1 - (-t)^{\log_3 5}\cdot \log_3 5 \cdot\left(-\frac{1}{t}\right)$

$= -\frac{1}{t}(-t)^{\log_3 4}(\log_3 4 - \log_3 5) - 1;$ <0

☑ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5} \to \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \boxed{\sin 2\alpha} = -\dfrac{2}{5}; \end{cases}$ $\pm\dfrac{2}{\sqrt5}$ $\boxed{tg\,\alpha = ?}$ 2,3 знак

$((2\alpha+2\beta)+2\beta)$

$s(2\alpha+2\beta)\underset{c2\beta}{} + s2\beta\, c(2\alpha+2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\dfrac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5}$

$-\dfrac{1}{\sqrt5}c2\beta + s2\beta\cdot\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5}\right) + s2\alpha = -\dfrac{2}{5};$

$-\dfrac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = \dfrac{2}{\sqrt5}$

~~$2\alpha+2\beta = arcs$~~

$\dfrac{x^b}{x}\cdot b$

$\begin{cases} s2\alpha c2\beta + s2\beta c2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt5}; \\ s2\alpha c4\beta + s4\beta c2\alpha + s2\alpha = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

$2s2\beta c2\beta c2\alpha$

$b>1$

$x^{b-1}\cdot b = b\cdot x^{b-1}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot(b-1)$

$s2\alpha(c4\beta+1) + 2c2\alpha\, s2\beta c2\beta = -\dfrac{2}{5}$

$(x^a)' = ((e^{\ln x})^a)' = x^a\cdot\dfrac{1}{x}\cdot a$

$\dfrac{c2\alpha s2\beta c2\beta}{s2\alpha c2\beta} + \dfrac{c2\alpha s2\beta c2\beta}{s2\beta c2\alpha}$

$s2\alpha \overset{\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{c2\beta} + s2\beta c2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt5}$

$2s\alpha c\alpha \pm 2 \mp 4s^2\alpha = -1$

$2s\alpha(c\alpha$

$s2\alpha\dfrac{1}{\sqrt5} + c2\alpha\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt5};$

$s2\alpha \pm 2c2\alpha = -1$

$2s\alpha c\alpha \pm 2(1-2s^2\alpha) = -1$

~~$2s2c2\pm2c$~~

$s(2\alpha\pm\varphi) = -\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\sqrt5\cdot s(2\alpha\pm\varphi) = -1$

$\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt5};$

$x^2 - 12x + \left(36y^2 - 36y - 4\cdot 5\right) = 0;$

$= 144 - 4\cdot 36y^2 + 36\cdot 4y + 4\cdot 4\cdot 5$, 180

$324 - 144y^2 + 144y$

$-(144y^2 - 144y - 324)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)