МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

+ − 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

+ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

+ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

+ 7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

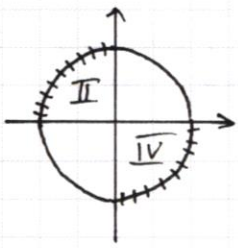
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

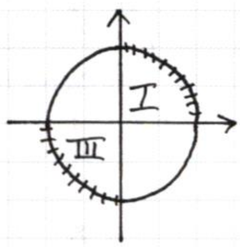
1. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2(\alpha+\beta)) = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Т.к. произведение синуса и косинуса угла отрицательное, то одна из этих величин отрицательная, а другая положительная. А значит $\alpha+\beta$ лежит во II или IV четверти. Поэтому мы можем утверждать, что $2\alpha+2\beta$ лежит в I или III четверти.

Для $\alpha+\beta$:



Для $2\alpha+2\beta$:



При $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ точка лежит в III четверти, и

$$\cos(2\alpha+2\beta) = -\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = -\frac{4}{\sqrt{17}}$$

2. $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

③ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

1. $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0 \quad \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

2. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-x^2$

$5^{\log_4(x^2+6x)} \leq 3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)$

$5^{\log_4(x^2+6x)} \leq 3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}$

$t=\log_4(x^2+6x)$

$5^t \leq 3^t+4^t$

Равенство достигается только при $t=2$.
А неравенство выполнено при $t\leq 2$

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$(x+8)(x-2)\leq 0$

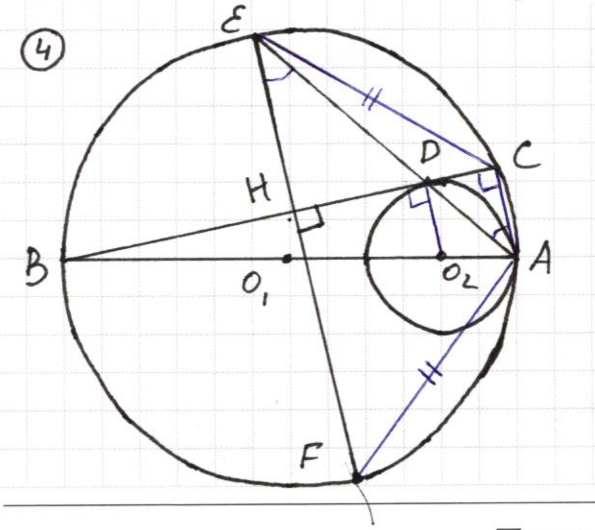
$x\in[-8;2]$

3. $\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases}$

$x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

④



Дано: AB - диаметр $\mho$
BD - касательная к ω
$EF\perp BC$, $EF\cap BC=H$

$CD=\frac{5}{2}$ $\quad BD=\frac{13}{2}$

O_1 - центр $\mho$ $\quad R_1$ - радиус $\mho$
O_2 - центр ω $\quad R_2$ - радиус ω

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 Решение:

1. $EF \perp BC$, $EF \cap BC = H$ $\Rightarrow$ $\smile EC + \smile BF = 2\angle EHC = 180^\circ$
$\smile BE + \smile FC = 2\angle BHE = 180^\circ$

AB - диаметр $\Rightarrow$ $\smile BF + \smile AF = 180^\circ$

$$\Downarrow$$

$$\smile AF = \smile EC$$
$$AF = EC$$

$\angle CAE = \frac{1}{2}\smile CE$, $\angle AEF = \frac{1}{2}\smile AF$ $\Rightarrow \angle CAE = \angle AEF$

2. $\angle CAE = \angle AEF$

$$\Downarrow$$

$AC \parallel EF$ $\Rightarrow$ $ACEF$ - трапеция, вписанная в υ
$ACEF$ - р/б

3. BD - кас. к ω $\Rightarrow$ $BD \perp O_2D$

4. $O_2D \perp BC$, $AC \perp BC$, $\angle B$ - общий $\Rightarrow$ $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 2 углам)

$$k = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+CD} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{BO_2}{BA} = k \Rightarrow \frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{13}{18}$$

$$5R_1 = 9R_2$$

$$R_2 = \frac{5}{9}R_1 \qquad R_1 = \frac{9}{5}R_2$$

$$\frac{DO_2}{AC} = k \Rightarrow \frac{R_2}{AC} = \frac{13}{18} \Rightarrow AC = \frac{18}{13}R_2$$

5. $\triangle ABC$ - прямоуг. ($AC \perp BC$):

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$(2R_1)^2 = 9^2 + \left(\frac{18}{13}R_2\right)^2$$
$$\left(\frac{18}{5}R_2\right)^2 = 9^2 + \left(\frac{18}{13}R_2\right)^2 \quad \text{Откуда } R_2 = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

6. $R_1 = \frac{9}{5} R_2 = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{65}^{13}}{\cancel{5} \cdot \cancel{24}_{8}} = \frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$

7. $\sin\angle ABC = \frac{DO_2}{BO_2} = \frac{R_2}{2R_1 - R_2} = \frac{1}{13}$ $\quad \cos\angle ABC = \frac{12}{85}$

$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{2R_1} = \frac{12}{13}$ $\quad \cos\angle BAC = \frac{5}{13}$

$\sin\angle AFE = \sin(\angle ABC + \angle BAC) = \sin\angle ABC \cdot \cos\angle BAC + \cos\angle ABC \cdot \sin\angle BAC$

$= \frac{1}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{12}{85} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12}{169} + \frac{37}{169} = \frac{49}{169}$

$\angle AFE = \arcsin \frac{49}{169}$

Ответ: $R_1 = 4\frac{7}{8}$ $\quad R_2 = 2\frac{17}{24}$ $\quad \angle AFE = \arcsin\frac{49}{169}$

5) 1. Из условия $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ мы можем найти

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$

2. Зная значения для этих простых чисел, мы можем найти значение функции для любого натурального числа, исходя из условия $f(ab) = f(a) + f(b)$

3. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ мы можем найти значение $f(x)$ для любого x.

4. Найдем $f\left(\frac{1}{y}\right)$ для $y \in \mathbb{N}$

$f(2) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$0 = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(2y) = -(f(2) + f(y)) = -(0 + f(y)) = -f(y)$

5. Получаем такую таблицу:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

n	$f(n)$	$f\left(\frac{1}{n}\right)$
3	0	0
4	0	0
5	1	-1
6	0	0
7	1	-1
8	0	0
9	0	0
10	1	-1
11	2	-2
12	0	0
13	3	-3
14	1	-1
15	1	-1
16	0	0
17	4	-4
18	0	0
19	4	-4
20	1	-1
21	1	-1
22	2	-2
23	5	-5
24	0	0
25	2	-2
26	3	-3
27	0	0

6. $f(x/y) < 0$ тогда и только тогда $|f(x)| < |f(\frac{1}{y})|$.

При $x = 0$ $y = -1; -2; -3; -4; -5$
10шт 15шт
150 пар

При $x = 1$ $y = -2; -3; -4; -5$
7 штук 8шт
56 пар

При $x = 2$ $y = -3; -4; -5$
3шт 5шт
15 пар

При $x = 3$ $y = -4; -5$
2шт 3шт
6 пар

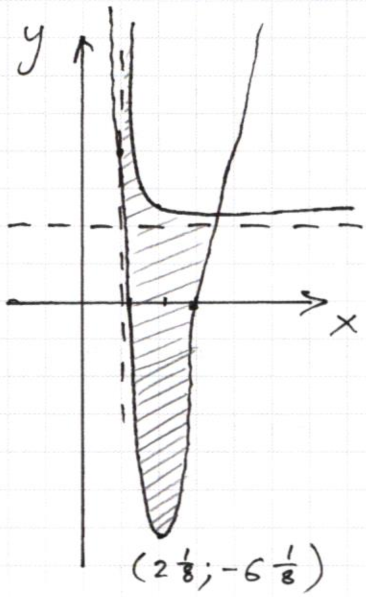
При $x = 4$ $y = -5$
2шт 1 шт
2 пары

Всего $150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 229$ пар

Ответ: 229

⑥ $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$ $x \in (1; 3]$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq ax + b \geq (x-3)(8x-10)$



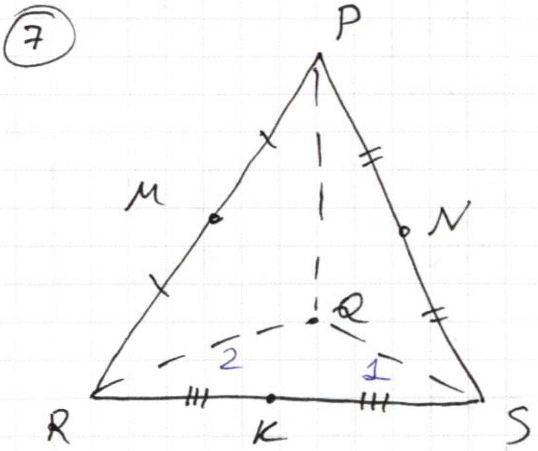
Нарисуем графики функций

$y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ и $y = (x-3)(8x-10)$

$y = ax + b$ – прямая

Для всех значений $x \in (1; 3]$ прямая должна принадлежать закрашенной области

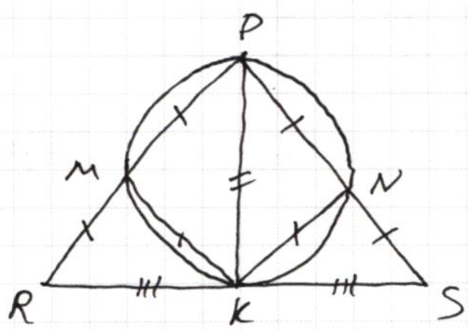
⑦



1. $P, M, N, K \in (PRS)$

$P, M, N, K \in$ сфере

$P, M, N, K \in$ окруж.



$RM = MP = a$
$PN = NS = b$
$RK = KS = c$

$RM \cdot RP = RK^2$ $\quad a \cdot 2a = c^2$
$SN \cdot SP = SK^2$ $\quad b \cdot 2b = c^2$ $\quad \Rightarrow a = b \quad PS = PR = \sqrt{2}$

KN – ср. линия $\quad KN = a \qquad PMNK$ – квадрат
MK – ср. линия $\quad MK = b = a$

$\triangle PNK = \triangle KNS$
$PK = KS$ $\quad \Big| \Rightarrow \triangle PKS$ – р/б

Минимальный радиус будет, когда окружность проходит через центр сферы $R_{окр} = R_{сферы}$

Ответ: $RS = 2 \qquad \min R = \frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

	$f(x)$	$f(\frac{1}{y})$
1		
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	1	-1
6	0	0
7	1	-1
8	0	0
9	0	0
10	1	-1
11	2	-2
12	0	0
13	3	-3
14	1	-1
15	1	-1
16	0	0
17	4	-4
18	0	0
19	4	-4
20	1	-1
21	1	-1
22	2	-2
23	5	-5
24	0	0
25	2	-2
26	3	-3
27	0	0

$x=0$ 10шт
$y=-1;-2;-3;-4;-5$ 15шт 150

$x=1$ 7шт
$y=-2;-3;-4;-5$ 8шт 56

$x=2$ 3шт
$y=-3;-4;-5$ 5шт 15

$x=3$ 2шт
$y=-4;-5$ 3шт 6

$x=4$ 2шт
$y=-5$ 1шт 2

229

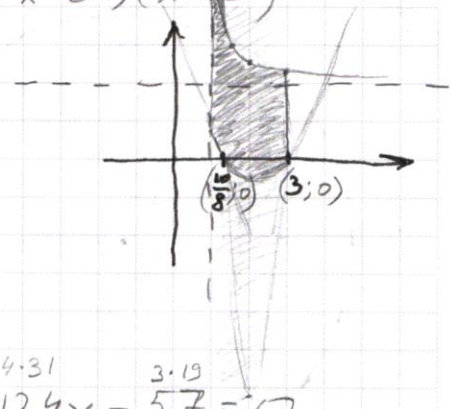
6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $x\neq 1$ $x\in(1;3]$

$(x-3)(8x-10)$

240
$60\cdot4$
$80\cdot3$
$24\cdot10$

$(x-24)(x-10)$

$\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$



$\frac{2(2x-2)+1}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}=2+\frac{1}{2(x-1)}$

$X_B=\frac{34}{2\cdot8}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$(2\frac{1}{8}-3)(8\cdot\frac{17}{8}-10)=-\frac{7}{8}\cdot7=-\frac{49}{8}=-6\frac{1}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2}=8x^2-34x+30$

$4x-3=16x^3-68x^2+60x-16x^2+68x-60$

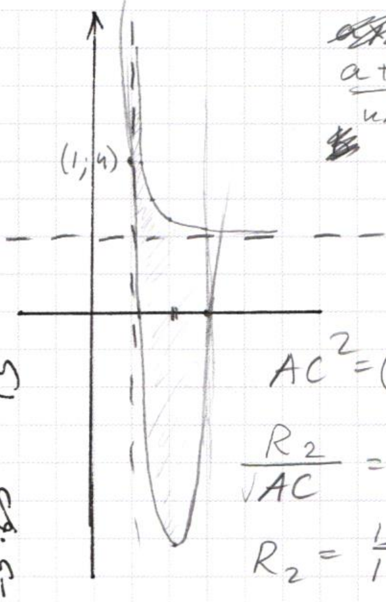
$4x(4x-2$ $3\cdot28$ $4\cdot31$ $3\cdot19$

$16x^3-84x^2+124x-57=0$

$4x(4x^2+31)-3(28x^2+19)=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

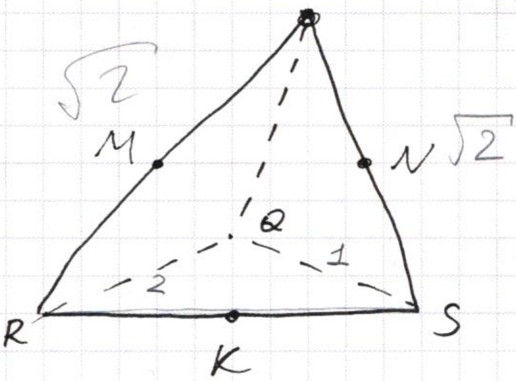


~~a+b~~

$a+b \geq 4$

или

(7)



сфера

PMNK

$AC^2 = (2R_1)^2 - 9^2$

$\frac{R_2}{AC} = \frac{13}{18}$

$R_2 = \frac{13}{18} AC$

$AC = \frac{18}{13} R_2$

$\left(\frac{18}{13} R_2\right)^2 =$

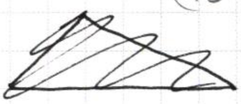
$P, M, N, K \in \alpha \quad P, M, N, K \in$ окр.

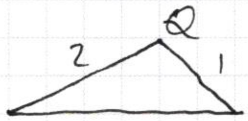
~~I = III~~ ~~I = II = III~~ ~~III = II~~

~~PRS - р/б~~

~~$II \cdot II = III^2$~~

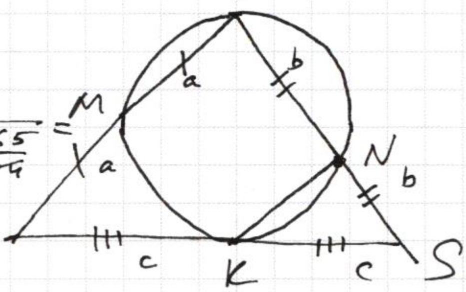
~~$SN \cdot SP = KS^2$~~





$\frac{\frac{65}{24}}{\frac{18 \cdot 65}{524} - \frac{65}{24}} = \frac{65}{\cancel{65} \cdot 17}$

$\frac{\frac{65}{24}}{\frac{2 \cdot 9 \cdot 65}{24 \cdot 5} - \frac{65}{24 \cdot 5}} = \frac{65}{18 \cdot 65 - 5 \cdot 65} = \frac{1}{13}$



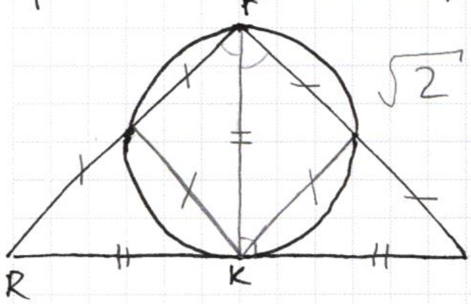
$a \cdot 2a = c^2$

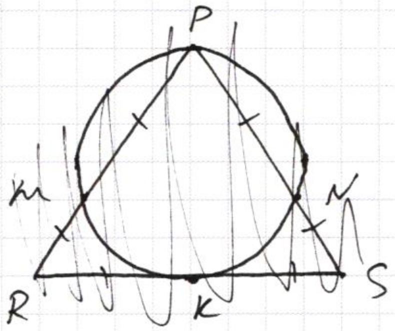
$b \cdot 2b = c^2$

$a = b$

PRS - р/б

$PS = PR = \sqrt{2}$ $\quad 25+12 = 37$





$PK = 1$

$RS = 2$

$R = \frac{PK}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$17 \cdot 5 = 85$

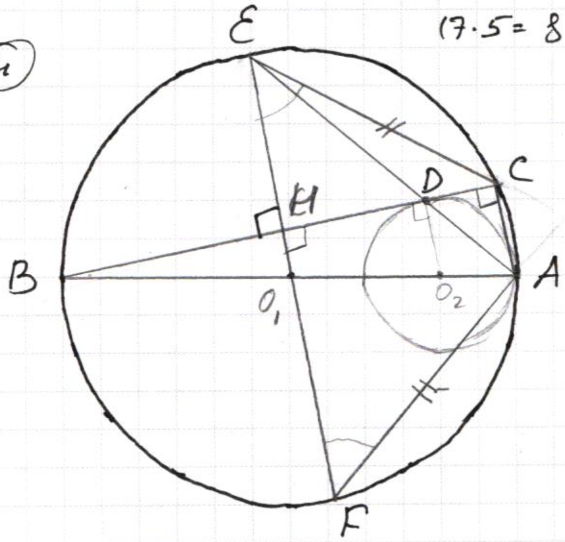
$\frac{18^2 R_2^2}{25} = 81 + \frac{18^2 R_2^2}{169}$

$18^2\left(\frac{R_2^2}{25} - \frac{R_2^2}{169}\right) = 81$

$(169-25) R_2^2 = \frac{81 \cdot 25 \cdot 169}{18^2}$

$R_2 = \frac{9 \cdot 5 \cdot 13}{18 \cdot 12} = \frac{65}{24}$

(4)



$DO_2 \parallel AC \parallel EF$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

$k = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18}$

$\frac{9}{2 \cdot \frac{39}{8}} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 39} =$

$\frac{R_1 + (R_1 - R_2)}{2R_1} = \frac{13}{18}$

$18(2R_1 - R_2) = 26R_1$

$36R_1 - 26R_1 = 18R_2$

$10R_1 = 18R_2$

$5R_1 = 9R_2$

$R_2 = \frac{5}{9} R_1$

$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{24}} = \frac{24 \cdot 12}{17 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{12}{85}$

$\frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2-6x=-3y^2+4y+4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x(x-2)=-(y-2)(3y+2) \end{cases}$

$\begin{cases} (3y-2x)^2=(x-1)(3y-2) \\ 3x(x-2)=-(y-2)(3y+2) \end{cases}$

(*) $3y-2x\geq 0$

$3y\geq 2x$

$\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3x(x-2)$

$3y^2-4y-4$

$t^2-4t-12$

$(t-6)(t+2)$

$-(y-2)(3y+2)$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y-2=0$

$(2x)^2+2x+(3y)^2+3y-15xy-2=0$

$5^t\cdot\ln 5 \qquad 3^t\cdot\ln 3+4^t\cdot\ln 4$

$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \qquad \frac{12}{60}\leq\frac{35}{}$

$125\leq 27+64$

не верно

③ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

I $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$ $\Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$ $+[-8;2]$

$[-8;-6)\cup(0;2]$

II $3^{\log_4(x(x+6))}+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}\leq x^2+6x$

$t=x^2+6x$

$t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}\leq t^{\log_4 4}$

$5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}\leq 4^{\log_4 t}$

$5^{\log_4 t}\leq 3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}$ = при $\log_4 t\leq 2$

$x^2+6x-16\leq 0$

$(x+8)(x-2)\leq 0$

$x\in[-8;2]$

~~$\log_4 5\cdot\ln(x^2+6x)=\log_4 3\cdot\ln(x^2+6x)\leq$~~

~~$\log_2 5^3=\log_3 5^2$~~

~~$3\log_2 5=2\log_3 5$~~

~~$\frac{3}{\log_5 2}=\frac{2}{\log_5 3}$~~

~~$3\log_5 3=2\log_5 2$~~

$2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$

$\log_2 2^{\log_3 5}=\log_2 5^{\log_3 2}$

$\log_3 5=\log_3 2\cdot\log_2 5$

$\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 5$

$\log_2 5=\log_2 5$

$a^{\log_4 5}-a^{\log_4 3}$

$a^{\frac{\log_a 5}{\log_a 4}}-a^{\frac{\log_a 3}{\log_a 4}}$

$\log_4 t\leq 2$

$t\leq 16$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\alpha+\beta \in II$ и IV

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha+\beta$

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos(2\beta) + \underbrace{\cos(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{4}{\sqrt{17}}}\sin(2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = -\sqrt{1-\frac{1}{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\alpha+2\beta$

~~$\cos(2\alpha+2\beta)<0$~~

$\cos(2\alpha+2\beta) < 0$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad |:\cos 2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \overset{b}{\cos 2\beta} + \overset{a}{\sin 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} =$

$= \pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} =$

~~$\cos 2\alpha$~~

$b \neq 0$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\overset{b}{\cos(2\beta)} - \frac{4}{\sqrt{17}}\overset{a}{\sin(2\beta)} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$(1-\sin^2\varphi)\operatorname{tg}^2\varphi = \sin^2\varphi$

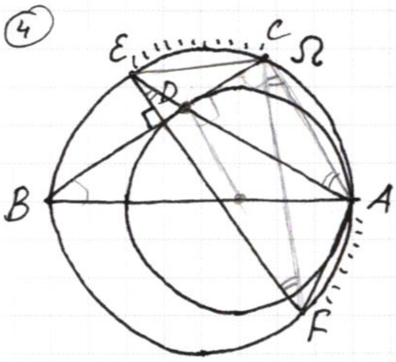
$\operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\varphi = \sin^2\varphi$

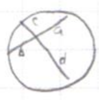
$\sin^2\varphi(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = \operatorname{tg}^2\varphi$

$\sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}2\alpha \cdot b + a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}}b - \frac{4}{\sqrt{17}}a + \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} = -\frac{8}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} bx + a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \end{cases}$$

④





$a \cdot b = c \cdot d$

$CD = \frac{5}{2}$ $\qquad BD = \frac{13}{2}$ $\qquad BC = \frac{18}{2} = 9$

$ACEF$ – трапеция $(AC \parallel EF)$

CD – высота

$AF = CE$

$\cos(2\alpha+2\beta) =$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\triangle ABC$ – прямоуг

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} =$

$(R_1 - R_2)2R_1 = BD^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$= \sqrt{\frac{-\frac{4}{\sqrt{17}}+1}{2}}$

$(2R_1)^2 = 9^2 + AC^2$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

⑤ $x \in R$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\quad f(1) - f\left(\frac{x}{y}\right) - f(9)$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$0 \le x \le 3$
или 5

$f(2) = 0$	$f(7) = 1$	$f(17) = 4$	$f(29) = 7$
$f(3) = 0$	$f(11) = 2$	$f(19) = 4$	
$f(5) = 1$	$f(13) = 3$	$f(23) = 5$	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0	0	1	0	1	0	0	0

$f(6) = 0$	$f(20) = 1$		
$f(4) = 0$	$f(21) = 1$		
$f(8) = 0$	$f(22) = 2$		
$f(9) = 0$	$f(24) = 0$	$f(2) = f(6) + f\left(\frac{1}{3}\right)$	0
$f(10) = 1$	$f(25) = 2$	$f(2) = f(8) + f\left(\frac{1}{4}\right)$	0
$f(12) = 0$	$f(26) = 3$	$f(2) = f(10) + f\left(\frac{1}{5}\right)$	-1
$f(14) = 1$	$f(27) = 0$	$f(2) = f(12) + f\left(\frac{1}{6}\right)$	0
$f(15) = 1$	$f(28) = 1$	$f(2) = f(14) + f\left(\frac{1}{7}\right)$	-1
$f(16) = 0$	$f(29) = 7$	$f(2) = f(16) + f\left(\frac{1}{8}\right)$	0
$f(18) = 0$	$f(30) = 1$	$f(2) = f(18) + f\left(\frac{1}{9}\right) =$	0

$f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(2t) = -f(t)$

$f(2t) = \cancel{f(2)} + f(t)$

☑ черновик $\qquad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BO_2 = R_1 + (R_1 - R_2) = 2R_1 - \frac{5}{9}R_1 = \frac{13}{9}R_1$

$90+27=117$

$$\frac{169}{-25} \atop 144$$

$\left(\frac{13}{9}R_1\right)^2 = \left(\frac{5}{9}R_1\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$24\cdot5=120$
$24\cdot4=96$

$\frac{169R_1^2}{81} - \frac{25R_1^2}{81} = \frac{169}{4}$

$39\times5=195$ $\quad 72\times2=144$

$\frac{144R_1^2}{81} = \frac{169}{4}$ $\qquad R_1^2 = \frac{169\cdot81}{4\cdot144} = \frac{13^2\cdot9^2}{2^2\cdot12^2}$

$R_1 = \frac{13\cdot\cancel{9}^{3}}{2\cdot\cancel{12}_{4}} = \frac{117}{24} = 4\frac{21}{24} = 4\frac{7}{8}$

$= \frac{39}{8}$

$R_2 = \frac{5}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{39}^{13}}{8} = \frac{195}{72} = 2\frac{51}{72} = 2\frac{17}{24}$

~~BH/BD~~ $\cancel{BO_1}$ $\qquad \frac{BH}{BC} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{65}{24}$

$BH = \frac{1}{2}BC = 9\cdot0{,}5 = 4{,}5$

$\frac{BD}{BC} = \frac{DO_2}{CA}$ $\qquad AC = \frac{DO_2\cdot BC}{BD} = \frac{\frac{65}{24}\cdot9}{\frac{13}{2}} = \frac{5\cdot\cancel{13}\cdot\cancel{9}^3\cdot2}{8\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{13}} = \frac{30}{8}$

~~$\angle E_Z$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\underline{\sin 2\alpha} + \frac{8}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}\underline{\cos 2\beta} + \frac{4}{\sqrt{17}}\underline{\sin 2\beta}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \underline{\sin 2\alpha}\,\underline{\cos 2\beta} + \cos 2\alpha\,\underline{\sin 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)