# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=-45 \end{cases}$$

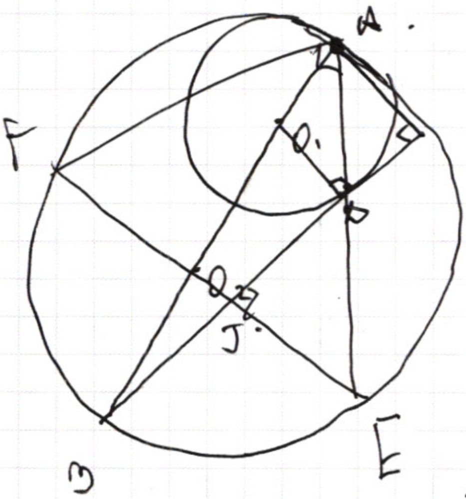
$(3x-3)^2+(y-6)^2=0$ $\quad (3x-3)^2\geq 0,\ (y-6)^2\geq 0$

$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ достигается только при $(3x-3)^2=(y-6)^2=0$.

$6-6=\sqrt{6-6-6+6}$ верно.

Ответ: $(1;6)$

№4




Т.к. $A$ - т. касания, сущ-ет с прямая $a$, что $O_1A\perp a$, $O_2A\perp a$. Так как на пл-сти проведено два перпендикуляра в одну точку, они лежат на одной прямой. $O_1\in AB$.

$\angle BCA$ - вписанный и опирается на диаметр, $\angle BCA=90^\circ$. $D$ - т. касания, $O_1D\perp BC$.

Пусть $R$ - радиус $\Omega$, $r$ - радиус $\omega$.

По т. Пифагора в $\triangle BAC$ $(2R)^2=25^2+AC^2$.

$BO_1=2R-r$.

По т. Пифагора в $\triangle BO_1D$ $(2R-r)^2=13^2+r^2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$ по острому углу (прямоугольные)

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{AC}{r} = \frac{25}{13}$ $\quad AC = \frac{25}{13}r$.

$2R = \frac{25}{13}(2R - r)$

$\frac{25}{13}r = \frac{12}{13}\cdot 2R$. $\quad r = \frac{24}{25}R$. $\quad R = \frac{25}{24}r$.

$AC^2 = \frac{25^2 r^2}{13^2} = 4\left(\frac{25}{24}r\right)^2 - 25^2$.

$\frac{\cancel{25^2} r^2}{13^2} = \frac{4\cdot \cancel{25^2}\cdot r^2}{24^2} - \cancel{25^2}$

$\frac{r^2}{13^2} = \frac{r^2}{12^2} - 1$

$12^2 r^2 = 13^2 r^2 - 12^2\cdot 13^2$

$25 r^2 = 12^2\cdot 13^2$.

$r = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = \underline{31{,}2}$

$R = \frac{25}{24}\cdot\frac{12\cdot 13}{5} = \frac{5\cdot 13}{2} = \underline{32{,}5}$.

можно подставить в т. Пифагора для $\triangle BO_1D$ и убедиться, что это верно.

Ответ: $r = 31{,}2$, $R = 32{,}5$

будет продолжение

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2} = ax+b = 18x^2-51x+28.$

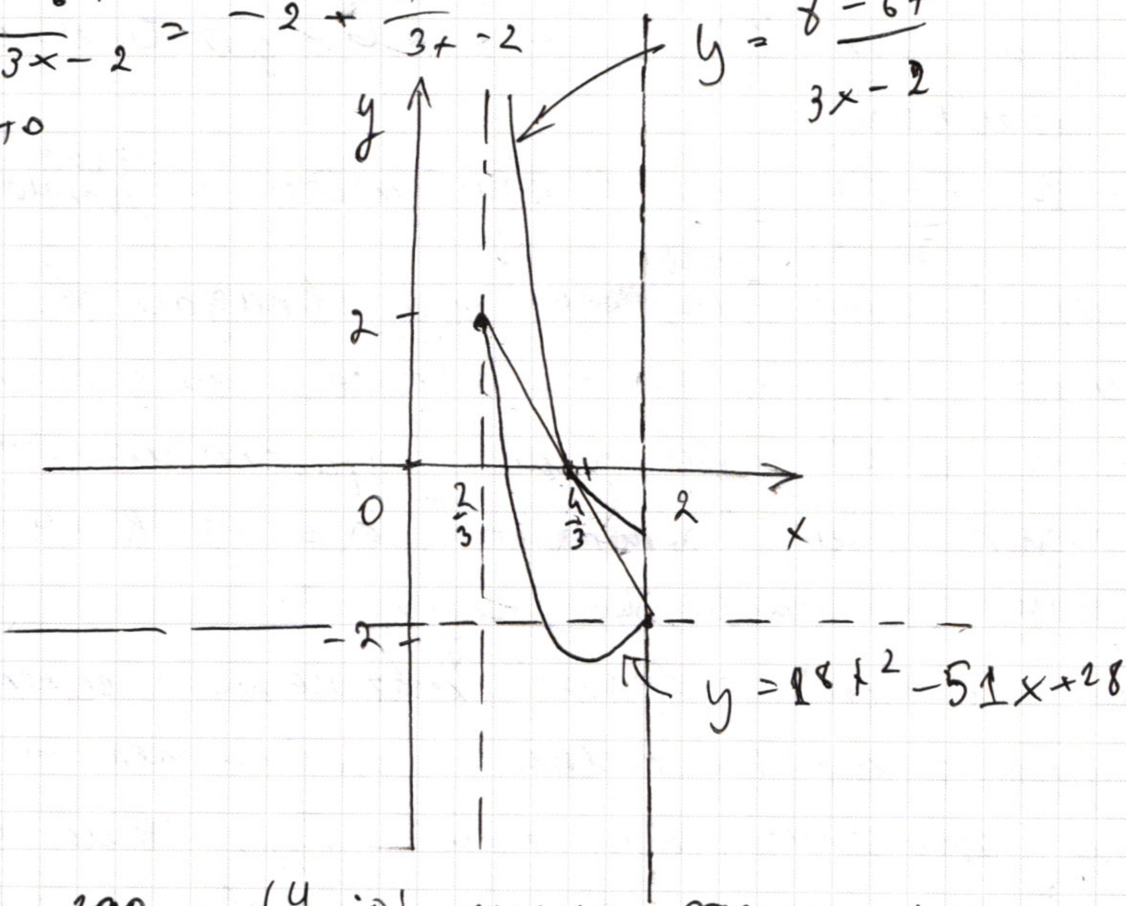
$y = 18x^2-51x+28.$ $\quad x_0 = \frac{51}{36}$ $\quad \frac{2}{3} < x_0 < 2$

$y\left(\frac{2}{3}\right) = 8-34+28 = 2$

$y(2) = 72-102+28 = -2.$

$y = \frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

$y = 0$, то $x = \frac{4}{3}$




Замечаем, что т. $\left(\frac{4}{3};0\right)$ - середина отрезка с концами в т. $\left(\frac{2}{3};2\right)$ и $(2;-2)$, значит она лежит на нём.

~~Эта~~ прямая $y = -3x+4$ (можно это заметить по графику).

Убедимся, что она является касательной к

$$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$f'(x) = \frac{-6(3x-2) - 3(8-6x)}{(3x-2)^2}$$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — касательная

$x_0 = \frac{4}{3}$ — т. касания.

$$f'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-12 - 0}{4} = -3 \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = 0.$$

$y = -3\left(x - \frac{4}{3}\right) = -3x + 4$ — действительно касательная.

Чтобы $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b$, при любом $x$ точка прямой точки,

$ax + b$ ниже гиперболы или совпадает с ней

Чтобы $ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$, при любом $x$ точка прямой выше точки параболы или совпадает с ней. Выполняется, $a = -3$ $b = 4$ подходит.

Почему не может быть других?

Если мы будем проводить касательные к гиперболе в других точках (касательная — крайнее положение, при пересечении часть прямой будет выше гиперболы) изменится наклон и один из концов отрезка на промежутке будет ниже параболы. Если мы будем опускать отрезком одну из его сторон, чтобы не было касания с гиперболой, также будут пересечения с параболой на промежутке, а значит

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

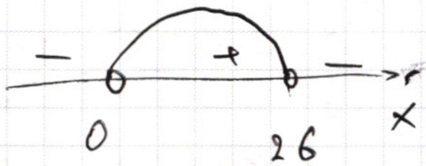
часть будет лежать ниже и нер-во не будет выполняться. Таким образом подходит только рассмотренный вариант.

Ответ: $a = -3$, $b = 4$

№3

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \ge x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

$t = 26x - x^2$, $t > 0$.



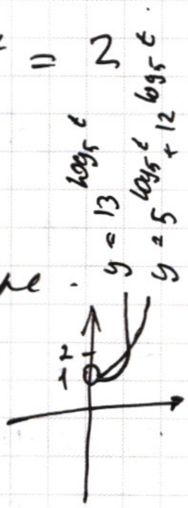

$|-t|^{\log_5 12} + t \ge 13^{\log_5 t}$.

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \ge 13^{\log_5 t}$.

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \ge 13^{\log_5 t}$.

Замечаем, что р-во достигается при $\log_5 t = 2$ по т. Пифагора, $t = 10$.

Справа и слева возрастающие функции, и справа „возрастает сильнее", поэтому больше пересечений не ~~будет~~ будет.




При $0 < t < 10$ $12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} > 13^{\log_5 t}$.

При $t > 10$ $12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} < 13^{\log_5 t}$.

$26x - x^2 \le 10$

$x^2 - 26x + 10 \ge 0$.

$D = 676 - 40 = 636 = 4 \cdot 159$

$x_{1,2} = \frac{26 \pm 2\sqrt{159}}{2} = 13 \pm \sqrt{159}$. $12 < \sqrt{159} < 13$.

$+ \quad - \quad +$

$13-\sqrt{159} \qquad 13+\sqrt{159}$

$0 \quad 13-\sqrt{159} \quad 13+\sqrt{159} \quad 26 \quad x$

Ответ: $x \in [0;\ 13-\sqrt{159}] \cup [13+\sqrt{159};\ 26)$

(продолжении).

Пусть $BC \cap FE = J$.

$\triangle JDE \sim \triangle DAC$ по острому углу (прямоугольные, $\angle ADC = \angle JDE$ — верт.)

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{60^2 + 12^2} = 12\sqrt{26}$.

$AC = \frac{25}{13} r = \frac{25}{13} \cdot \frac{12 \cdot 13}{5} = 60$

По т. о пересекающихся хордах.

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = 12 \cdot 13$.

$DE = \frac{12 \cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$.

Из подобия. $\frac{12}{JD} = \frac{12\sqrt{26} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{13}} = 24$.

$JD = \frac{1}{2}$.

Пусть $O_2H \perp BD$. $\triangle BO_1D \sim \triangle BO_2H$ по острому углу ($\angle B$ - общий).

$\frac{2R - r}{R} = \frac{13}{13 - BH}$.

$(13 - BH)(2R - r) = 13R$.

$26R - 13r - 2R\,BH + r\,BH = 13R$

$BH = \frac{-13R + 13r}{r - 2R} = \frac{13 \cdot 1,3}{33,8} = \frac{16,9}{33,8} = \frac{1}{2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, K совпадает с J. FE – диаметр ($O \in FE$), $\angle FAE$ – прямой. $\angle AFE + \angle AEF = 90^\circ$,

$\sin DEJ = \frac{DJ}{DE} = \frac{1\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \cos EFA$.

$\angle EFA = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$.

$AE = AD + DE = \sqrt{12\sqrt{26} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$.

$\sin EFA = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

$\operatorname{tg} EFA = 5 = \frac{AE}{AF}$.

$AF = \frac{AE}{5} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$.

$S_{FAE} = \frac{FA\cdot AE}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{25\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{125\cdot 13}{4} =$
$= 406{,}25$

Ответ: $R = 32{,}5$ $r = 31{,}2$

$\angle EFA = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$.

$S_{FAE} = 406{,}25$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{13 \cdot 1,3}{33,8} =$

$2 \cdot 32,5 - 37,2 =$

$= 32,5 + 1,3 = 33,8.$

$13 \quad 16,9$

$1625 : 4 = 406,25.$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ \times 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625. \end{array}$$

$406,25.$

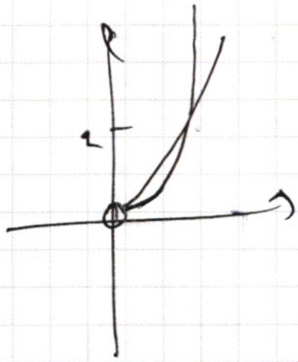
$$\begin{array}{r} + 19 \\ 3 \\ \hline 57 \end{array} \qquad 29.$$

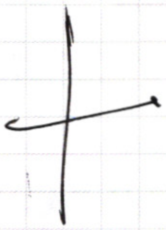
☑ черновик ☐ чистовик

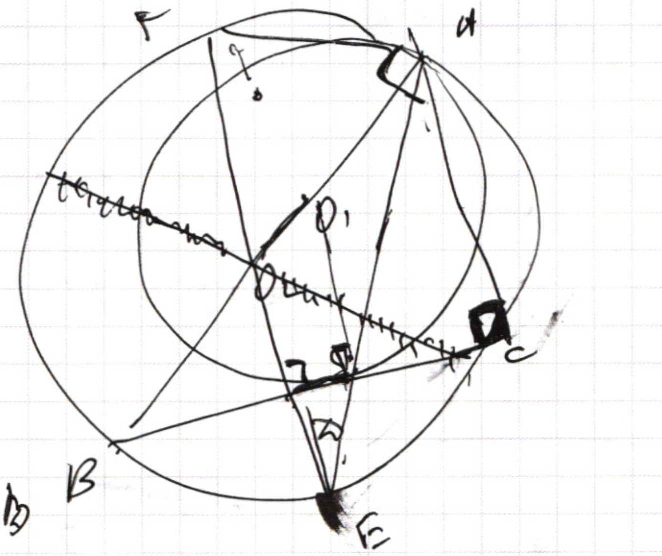
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)








$AC = \frac{25}{\sqrt{13}}$, $\frac{12\cdot\sqrt{13}}{5} = 60\cdot\sqrt{3}$

$AD = \sqrt{60^2 + 12^2} = 12\sqrt{26}$

$AO \cdot DE = 12\cdot 13 = 12\sqrt{26}$. $OE = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$\cancel{\sin A = \sqrt{\frac{13}{2}}}$; $\frac{x}{12} = \frac{AD}{DE} =$

$\frac{2R - r}{R} = \frac{r}{O_1A} = \frac{13}{13 - x}$. $\frac{x}{12} = \frac{12\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = 12\sqrt{2}$

$x = 2\cdot 12^{\frac{1}{2}}$.

$(2R - r)(13 - x) = 13R$.

$26R - 2Rx - 13r + rx = 13R$.

$x(r - 2R) = 13r - 13R$

$x = \frac{13r - 13R}{r - 2R}$. no R

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

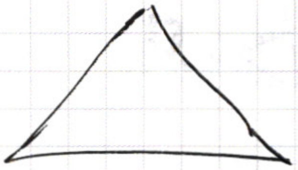
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$5+12>13$.

$26 \cdot 26 = 156$

$5^a + 12^a \geq 13^a$ ?

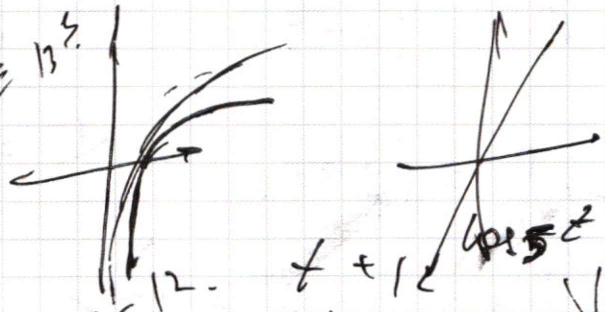
$5^a \geq (12^{\frac{a}{2}} - 13^{\frac{a}{2}})(12^{\frac{a}{2}} + 13^{\frac{a}{2}})$

636 | 3
212 | 2
106 | 2
53

$t=10$ неверно

$9-\pi$ $\quad 5^{\log_5 t} + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$.

$5^3 + 12^3 \geq 13^3$

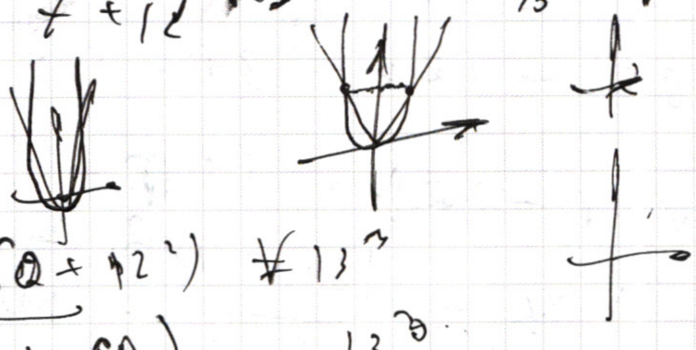


$t + 12^{\log_5 t}$

$y = 13^{\log_5 t}$.

$t + 12^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}$



$|5+12|\,|5^2 + 60 + 12^2| \neq 13^3$

$17 \qquad (13^2 + 60) \qquad 13^3$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4R^2 = 25^2 + AC^2$.

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = 13^2 + \cancel{r^2}$.

$r = \dfrac{-13^2 + 4R^2}{4R}$.

$r = 31,2$

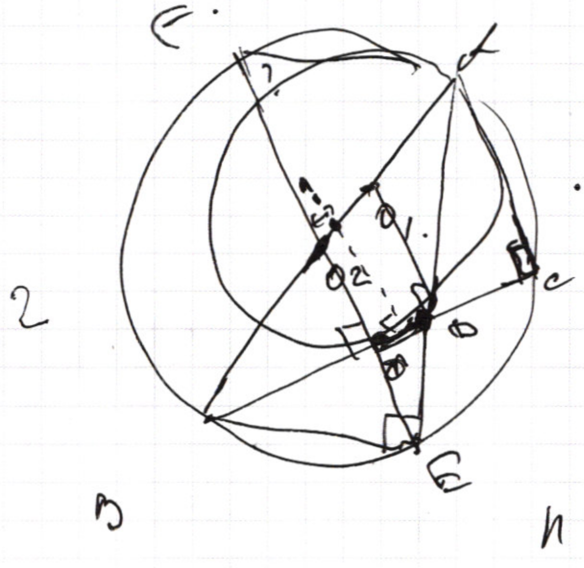
$R = 32,5$.

$33,8^2 = 13^2 + 31,2^2$. ?

$1142,44 = 169 + 973,44$

$$\begin{array}{r} 33,8 \\ \times\ 33,8 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ 1014 \\ \hline 1142,44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31,2 \\ \times\ 31,2 \\ \hline 624 \\ 312 \\ 936 \\ \hline 973,44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 973 \\ +\ 169 \\ \hline 1142 \end{array}$$

$\angle AE = ?$



$13 \cdot 12 = AD \cdot DE$.

$\dfrac{R}{2R - r} = \dfrac{O_2K}{r}$.

$O_2K = \dfrac{Rr}{2R - r} = \dfrac{31,2 \cdot 32,5}{2 \cdot 32,5 - 31,2}$

$AD = \sqrt{(2R - r)^2 - r^2} - \sqrt{R^2 - O_2K^2} = \sqrt{33,8^2 - 31,2^2} - \sqrt{32,5^2 - \left(\dfrac{31,2 \cdot 32,5}{2 \cdot 32,5 - 31,2}\right)^2}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

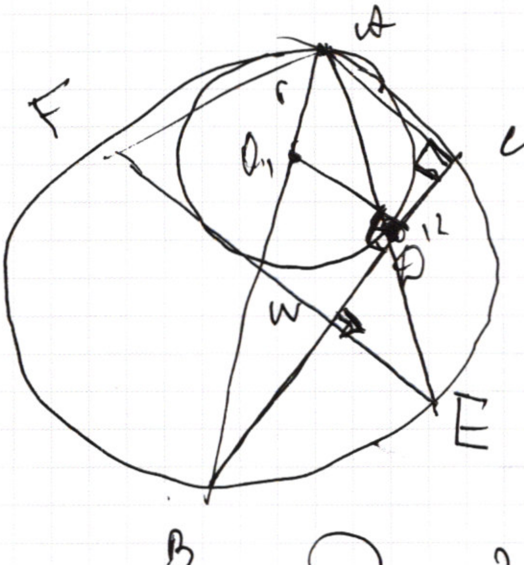
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$R, r, \angle AFE, S_{AEF} = ?$

$CD = 12$

$BD = 13$

$64^0$

$BC = 25$

$18^{2,5}$

$25^2 + 2R^2 = AC^2$

$(2R)^2 - 25^2$

$\Omega$ $\quad \frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25} = \frac{r}{AC}$

$AC = \frac{25r}{13} = \sqrt{(2R)^2 - 25^2}$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25}$

$\frac{25^2 r^2}{13^2} = \left(2\cdot\frac{25}{24} r\right)^2 - 25^2$

$2R - r = \frac{13}{25} \cdot 2R$

$\frac{r^2}{169} = \frac{r^2}{144} - 1$

$r = -\left(\frac{13}{25} - 1\right) 2R$

$144 r^2 = 169 r^2 - 169 \cdot 144$

$r = \frac{24}{25} R$

$25 r^2 = 169 \cdot 144$

$R = \frac{25}{24} r$

$r = 13 \cdot 12 = 156$

$R = 25 \cdot 6,5 = 162,5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2a}{1-a^2}\cdot\frac{(1+b^2)}{1-b^2}+\frac{1+a^2}{1-a^2}\cdot\frac{2b}{1-b^2}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{2(1+b^2)^2}{1-b^2}-1\right)+\frac{1+a^2}{1-a^2}\cdot\frac{2(2b)(1+b^2)}{(1-b^2)^2}+$$

$$+\frac{2a}{1-a^2}=-\frac{2}{\sqrt{17}}.\qquad f(0)=28$$

$f(2)=0.$

$f(1)=0.$

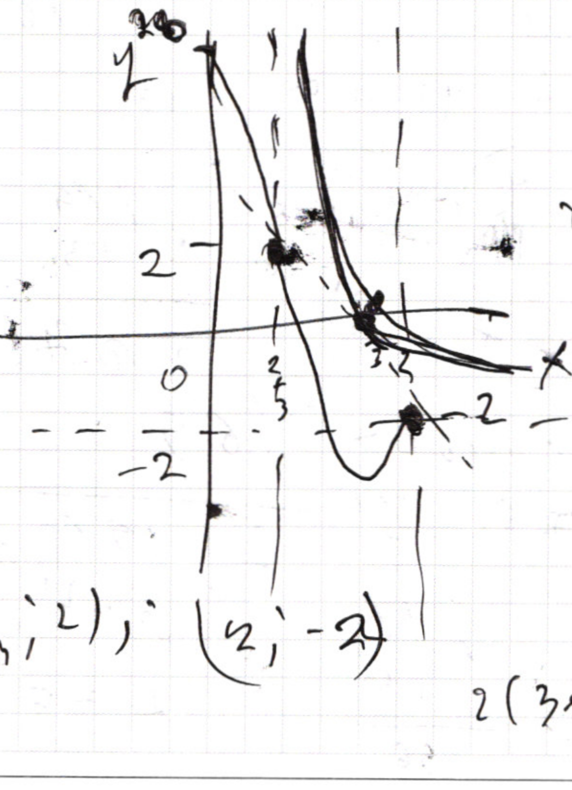
$18\cdot 4=72.$

$x_0=\frac{51}{}$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=8-34+28=2$

$f(2)=72-102+18=-2$

$x_0=\frac{51}{36}=1,\ldots$




$y=-2+\frac{4}{3x-2}$

$y(0)=-4$

$2=\frac{4}{3x-2}$

$2(3x-2)=4\quad 3x=4$

$\left(\frac{2}{3};2\right),\ (2;-2)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y = -3x + 4$

$f'(x) = \dfrac{-6(3x-2) - (18-6x)3}{(3x-2)^2}$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$= \dfrac{-12}{4} = -3.$

$y = -3\left(x - \frac{4}{3}\right) + 0 = -3x + 4.$

$t \geq 0.$

$t^{\log_5 13} \geq t^{\log_5 12} + t$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}.$

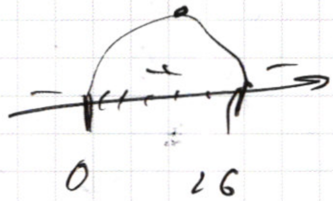
$12^2 + 5^2 \geq 13^2.$ $\quad 12 + 5 > 13.$

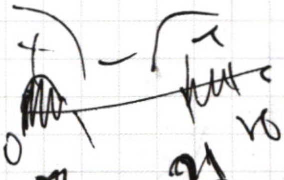
$12^3 + 5^3 \quad 13^3.$

$1728 + 125 - 2197.$

$t = 26x - x^2 =$

$= x(26 - x)$





$0 <$

$-x^2 + 26x$

$26x - x^2 \leq 10.$

$x^2 - 26x + 10 \geq 0.$

$D = 676 - 400 = 276 = 2 \cdot 16^2$

$x_{1,2} = \frac{26 \pm 16}{2}$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

$26 \times 26 = 156 + 52 = 676$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$16 \times 16 = 96$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\sin 2\alpha\,(1-\cos^2 2\beta) + -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta -$

$-\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$-\sin 2\alpha + -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha + \frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = \frac{2}{17}.$

$\cos 2\beta = \sqrt{17}\left(\frac{2}{17} - \sin 2\alpha\right)$

$\sin 2\alpha \sqrt{17}\cdot\left(\frac{2}{17} - \sin 2\alpha\right) + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$t^{\log_5 12} - 6^{\log_5 13} \geq -6..$

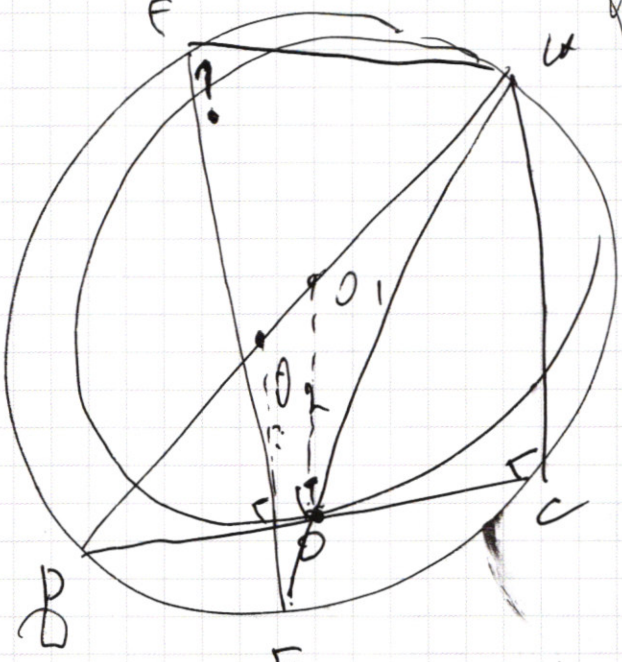
$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

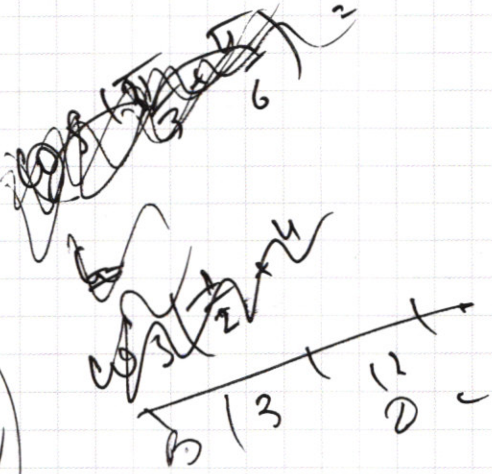
$\log_t\left(t^{\log_5 12} + t\right) \geq \log_5 13.$

$t > 1.$

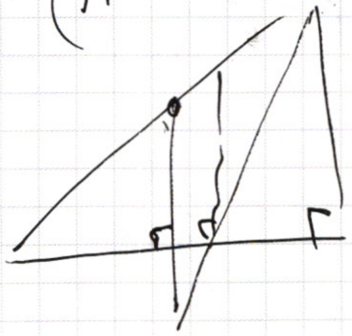
$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$$

$$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b$$




$$2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$



$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\cancel{\cos^2}\ tg^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha.$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}\qquad tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

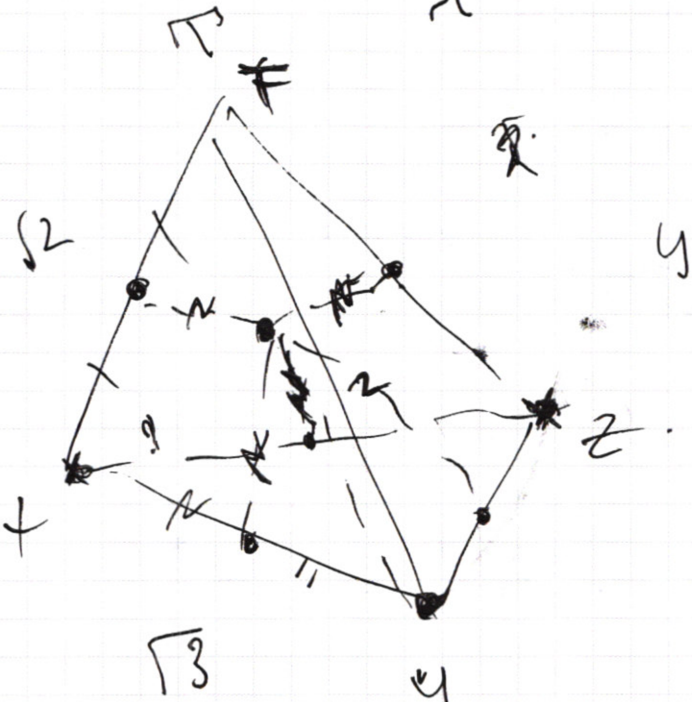
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

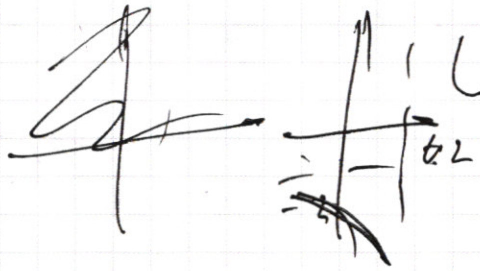
$\lambda$

$x\ z = ?$

$R_{min} = ?$




$y = 18t^2 - 41t + 18.$



$$y = \frac{8 - 6x}{3x - 2} = \frac{-2(3x - 2) + 4}{3x - 2} =$$

$$= -2 + \frac{4}{3x - 2}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin^2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\beta \alpha 2\sin 2\beta \cos 2\beta - \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

$$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta - 2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos^2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$$-4\sin 2\alpha \sin^2 2\beta + \qquad + 2\cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha \cos 2\beta\right)$$

$$-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$$= -\frac{2}{17}.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$12^{\log_5 6} + 5^{\log_5 6} = \left(\sqrt{12^2+5^2}\right)^{\log_5 6}.$$

$$12^{\alpha} + 5^{\alpha} \geq (12^2+5^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$12^{\alpha} + 5^{\alpha} \geq \sqrt{12^{\alpha}\cdot 5^{\alpha}} = \sqrt{60}^{\alpha} = 2\sqrt{15}^{\alpha}.$$

$$12^{\alpha} + 5^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$$

$x = \log_5 6$.

$$144^{\alpha} + 2\cdot 65^{\alpha} + 25^{\alpha} = 169^{\alpha}.$$

$\alpha = 1$. верно.

$$s2\alpha\, c2\beta + c2\alpha\, s2\beta = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

$$s2\alpha\,(c^2 2\alpha - 1) + 8\,2\alpha\, cs^2 2\beta\, c2\beta + s2\alpha = -\frac{2}{12}.$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$p$.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$.

$p \in P$

$4 \leq x \leq 28$

$4 \leq y \leq 28$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$f(0) = f(0)$

$f(1) = 1$.

$f(2) = 0$

$f(4) = 0$. $f(1) = 2f(1)$

$f(3) = 0$.

$f(5) = 1$ $f(6) = 0$. $f(8) = 0$

$f(7) = 1$ $f(9) = 0$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 28 \\ \hline 576 \\ 144\phantom{0} \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 585 & 5 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \end{array}$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b.$$

$$8-6x \geq (ax+b)(3x-2)$$

$$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$$

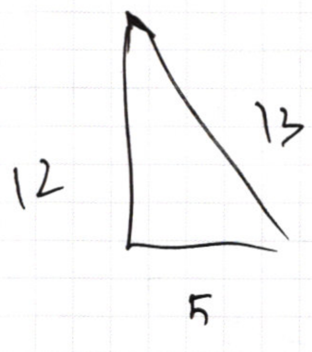
$$3ax^2+(-2a+3b+6)x+(-2b-8) \leq 0.$$

$a<0$

1) $a=0.$

$$(3b+6)x-2b-8 \leq 0$$

$$(3b+6)x \leq 2b+8.$$




2) $a<0.$

$t = 2bx - x^2$ $\qquad t \geq 0.$

$$|-t|^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} \geq -t.$$

$$t^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} \geq -t.$$

$$12^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} \geq -t. \qquad t = 5^{\log_5 t}.$$

$$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geq -t. \qquad t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$$

$$12^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 0.$$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

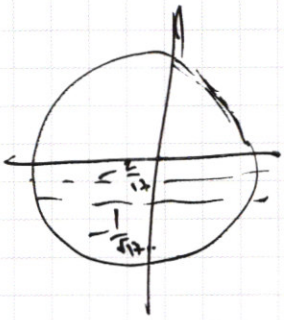
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$




$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin((2\alpha + 2\beta) + 2\beta) =$

$= \sin\alpha \cos 2\beta + \cos\alpha \sin 2\beta =$

$= \sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\sin 2\beta.$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28.$

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq 18x^2 - 51x + 28$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times\ 51 \\ \hline 51 \\ 255 \\ \hline 2601 \end{array}$$

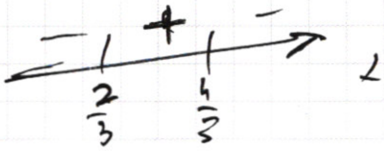
~~$8 - 6x \leq (18x^2 - 51x + 28)(3x - 2)$~~

~~$8 - 6x <$~~

$8 - 6x \geq (18x^2 - 51x + 28)(3x - 2)$

$\frac{8-6x}{3x-2}$

$D = 2601 - 2016 = 585 = 3\sqrt{65}.$




☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2+26x|^{\log_5 12}+26x \quad 2\quad x^2+13 \wedge \log_5(26x-x^2)$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq x^2-26x.$ $=t$

$|t|^{\log_5 12}-13^{\log_5(-t)}\geq t.$ $\quad t<0.$

$(-t)^{\log_5 12}-13^{\log_5(-t)}\geq t.$

$x^2-26x<0.$

$x(x-26)<0$

$\downarrow ?$

$12^{\log_5(-t)}-13^{\log_5(-t)}\geq t.$

$0 \quad 26$

$\cancel{(-t)^{\log_5 12}-(-t)^{\log_5 13}\geq t.}$

$\alpha^{\log_5 12}-\alpha^{\log_5 13}\geq -\alpha.$ $\quad \alpha>0.$

$t=-5^{\log_5(-t)}.$

$12^{\log_5(-t)}-13^{\log_5(-t)}+5^{\log_5(-t)}\geq 0.$

$12^{\alpha}-13^{\alpha}+5^{\alpha}\geq 0.$ $\quad 12^{\alpha}+5^{\alpha}\geq 13^{\alpha}.$

$\log_5(-t)^{\log_5 12}-\cancel{\log_5 13\cdot\log_5(-t)}$

$\alpha^{\log_5 12}-\alpha^{\log_5 13}\leq 0.$

$-t<1 \quad \alpha>1.$

$t>-1 \quad \alpha\leq 1$ верно.

$-1<t<0.$ в ответ.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha \neq 0.$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ?$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha$

$\cos 4\beta = (2\cos^2 2\beta - 1) = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha.$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

$y - 6x \geq 0.$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6.$

$\begin{cases} 36x^2 + y^2 - 13xy + 6x + y - 6 = 0. \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y - 45 = 0. \end{cases}$

$(3x - 3)^2 + (y-6)^2 = 0.$

$x = 1$

$y = 6.$

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab.$

$9^{\log_3 2} = 4$

$2^{\log_3 9} = 4$

$\log_2 8 = 3$

$\log_2 2 + \log_2 4 = 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)