МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

~~5. [5 баллов]~~ Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$AF = 65 \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{26}} = 65 \cdot \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{65}{\sqrt{26}} \Rightarrow$$

$$S_{AFE} = \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot \frac{5}{2} = \boxed{\frac{65^2 \cdot 5}{52}}$$

$$\frac{(65)^2}{26} + \frac{(65)^2 \cdot 5^2}{26} =$$

$$= (65)^2 \cdot \frac{\cancel{26}}{\cancel{26}} = 65^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow$ ① $\begin{cases} 2\beta = x \\ 2\alpha+2\beta = x-\frac{\pi}{2} \end{cases}$ или ② $\begin{cases} 2\beta = x \\ 2\alpha+2\beta = \frac{3\pi}{2}-x \end{cases}$

①: $2\alpha+2\beta = 2\beta-\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

②: $2\alpha+2\beta = \frac{3\pi}{2}-2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha+4\beta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = -1 \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$:

$-1+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака (т.к. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$)

$\cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}$

1: $\cos 2\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\pm 3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

т.к. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака $\Rightarrow$ $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

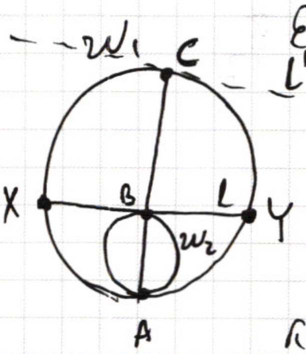
2: если $\cos 2\alpha = \frac{-8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{-8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака $\Rightarrow$

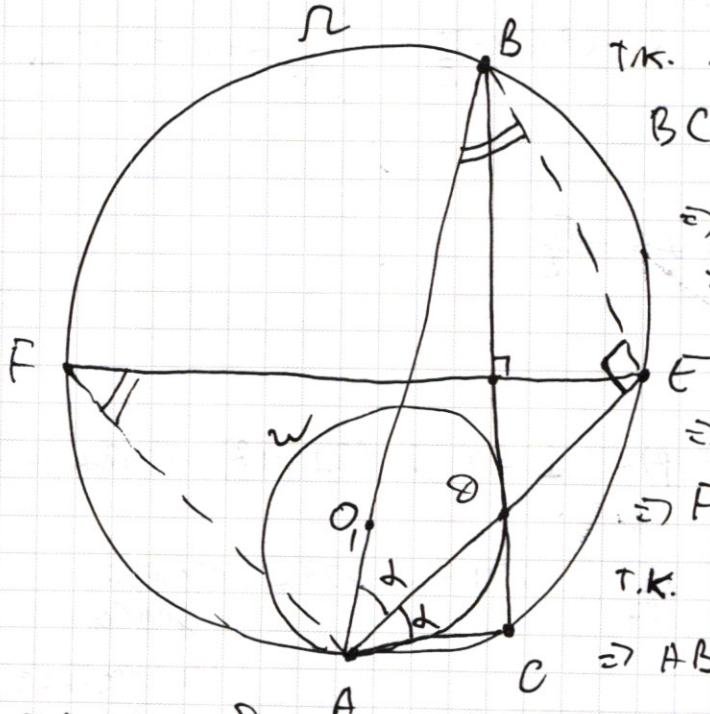
$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$

Задача №4



Если w_1 и w_2 касаются в A, прямая XY касается w_2 в B, то C - середина дуги XY: $CX = CY$, т.к. при гомотетии с центром в A переводящей w_2 в w_1: $B \to C \Rightarrow$ касательная в B к w_2 $\to$ в касат. в C к $w_1 \Rightarrow$ $l \to l' \Rightarrow l \parallel l'$ - две $\parallel$ прямые отсекают равные хорды.



Т.к. Ω и w касаются в A и BC - касается w в D $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ E - середина дуги BC $\Rightarrow$ $\Rightarrow BE = EC \Rightarrow$ т.к. $EF \perp BC$ и $\triangle BCE$ - р/б $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ FE - сер. пер. к хорде BC $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ FE - диаметр Ω. Т.к. w и Ω касаются $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ AB - прямая, содержащая диаметры обоих окр. $\Rightarrow$ степень точки B относ w:

$BO_1^2 - r^2 = BD^2$; $BO_1 = 2R - r \Rightarrow 4R^2 - 4Rr + r^2 - r^2 = BD^2 = 169$

т.к. $BE = EC \Rightarrow \angle BAE = \angle EAC \Rightarrow$ AD - бисс. $\angle BAC$ в прямоуг. $\triangle ABC$ -

т.к. AB-диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{12} \Rightarrow$ ~~AB AC A~~ $AB = AC \cdot \frac{13}{12} = 2R$

по т. Пифагора в $\triangle ABC$: $AB^2 = 2R^2 = AC^2 + (BD+DC)^2 =$

$= AC^2 + 25^2 = \frac{169}{144} \cdot AC^2 \Rightarrow AC^2 \cdot \frac{25}{144} = 25 \Rightarrow AC = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = \frac{60}{12} \cdot 13 = 65 \Rightarrow R = \frac{65}{2}$

т.к. $4R^2 - 4Rr = 169$ - доказано выше $\Rightarrow$

$4 \cdot \frac{65}{2} (R - r) = 169$

$2 \cdot 13 \cdot 5 \left(\frac{65}{2} - r\right) = 169 = 13^2$

$\frac{65}{2} - r = \frac{13}{10}$

$R_\Omega = \frac{65}{2}$

$r = \frac{65 \cdot 5}{10} - \frac{13}{10} = \frac{13(5 \cdot 5 - 1)}{10} = \frac{13 \cdot 12}{5} \Rightarrow$ $r_\omega = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5}$

по т. синусов: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R = 65 \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{12}{13}$

$\cos\angle BAC = \cos(2\angle BAE) \Rightarrow \cos 2\alpha = \overset{2\cos^2\alpha - 1}{~} = \frac{12}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ - т.к. $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} =$

$= \sin\angle ABE$ т.к. $\angle ABE = \angle AFE \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle AFE =$
(т.к. $\triangle ABE$ - прямоуг.) - AB-диаметр. $= \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

т.к. FE-диаметр $\Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$ $FE = 2R = 65 \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{FE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{AE}{65} \Rightarrow AE = \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26}}$ по т. Пифагора в $\triangle AFE$ $AF = \frac{65}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$\sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \frac{AE}{65} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow AE = \frac{65\cdot 5}{\sqrt{26}}$

$AF = \sqrt{65^2 - \frac{65^2\cdot 5^2}{26}} = b$

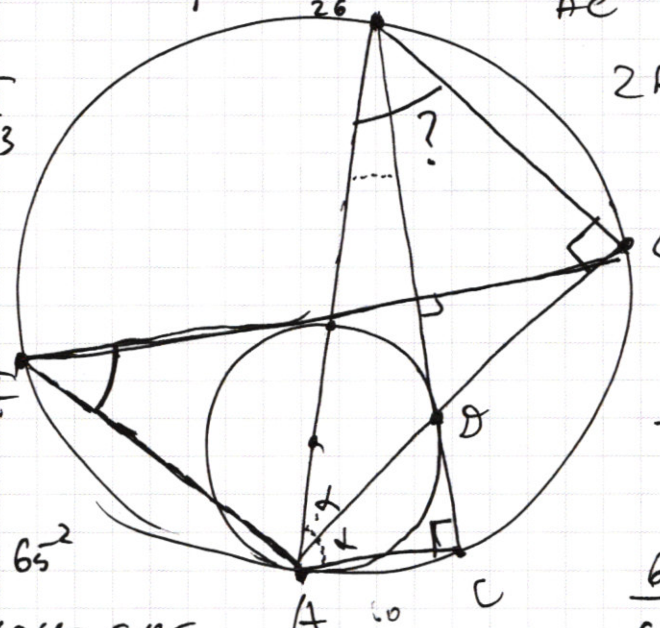
$\frac{BC}{2R} = \frac{5}{13}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{13}{12}$

$\boxed{R = \frac{65}{2} \qquad r = \frac{13\cdot 12}{5}}$

$\frac{BC}{65} = \frac{5}{13}$

$2R = AC\cdot\frac{13}{12}$



$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\frac{BC}{5\cdot 13} = \frac{5}{13}$

$BC = 25$

$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R = 65$

$60^2 + 25^2 = 65^2$

$65-60\cdot 60+65 = 5\cdot 125$

$\frac{60}{\sin\angle ABC} = 65$

$AC^2 + 25^2 = (2R)^2 = AC^2\cdot\frac{169}{144}$

$\sin\angle ABC = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \Rightarrow$

~~$\cos\angle A$~~

$\sin\angle BAC = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\frac{25 AC^2}{144} = 25^2$

$AC = 60$

$AC^2 = 144\cdot 25 \Rightarrow AC = 12\cdot 5 = 60 \Rightarrow 2R = \frac{60}{12}\cdot 13 = 65$

$4R$

$(2R - 2r)\cdot 2R = 13^2 = b\theta^2 = AB\cdot(AB - 25)$

$\cos\angle BAC = \frac{12}{13} \Rightarrow$

$\frac{25}{13} = 2\cos^2\alpha$

$(65 - 2r)\cdot 65 = 13^2$

$\frac{25}{26} = \cos^2\alpha$

$(65-2r)\cdot 5 = 13$

13

$\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$65 - 2r = \frac{13}{5}$

$\frac{12}{13} + 1 = 2\cos^2\alpha$

$\cos\alpha =$

$\frac{13\cdot 5\cdot 5}{5} - \frac{13}{5} = 2r$

$2r = \frac{13(25-1)}{5} = \frac{13\cdot 24}{5} \Rightarrow r = \frac{13\cdot 12}{5}$

$= \boxed{\frac{5}{\sqrt{26}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(90-\alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2} = \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26} \cdot 2} = \frac{65^2 \cdot 5}{26 \cdot 2} = \frac{65^2 \cdot 5}{52}$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $S_{AFE} = \frac{65^2 \cdot 5}{52}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$.

Задача №5

т.к. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1)$

$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

т.к. $f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21) = f(28) = 1$

$f(11) = f(22) = f(25) = 2$

$f(13) = f(26) = 3$

$f(17) = f(19) = 4$ $\Rightarrow$ всего возможных значений x: $28 - 4 + 1 = 25$

$f(23) = 5$

точек, что $f(x) = 0$: 9, если $f(x) = 0$, то y можно выбрать 16 способами

, что $f(x) = 1$: 8 $\Rightarrow$ если $f(x) = 1 \Rightarrow y$ можно выбрать 8 способами

$f(x) = 2$: 3 если $f(x) = 1 \Rightarrow y$ можно выбрать 5 способами

$f(x) = 3$: 2 – y можно выбрать 3 способами

$f(x) = 4$: 2 – y можно выбрать 1 способом

$f(x) = 5$: 1 – y не существует.

Поэтому количество подходящих пар:

$9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2\cdot 1$

Ответ: $9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 6 + 2 = 231$

Задача №2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Rightarrow (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$y \geq 6x$

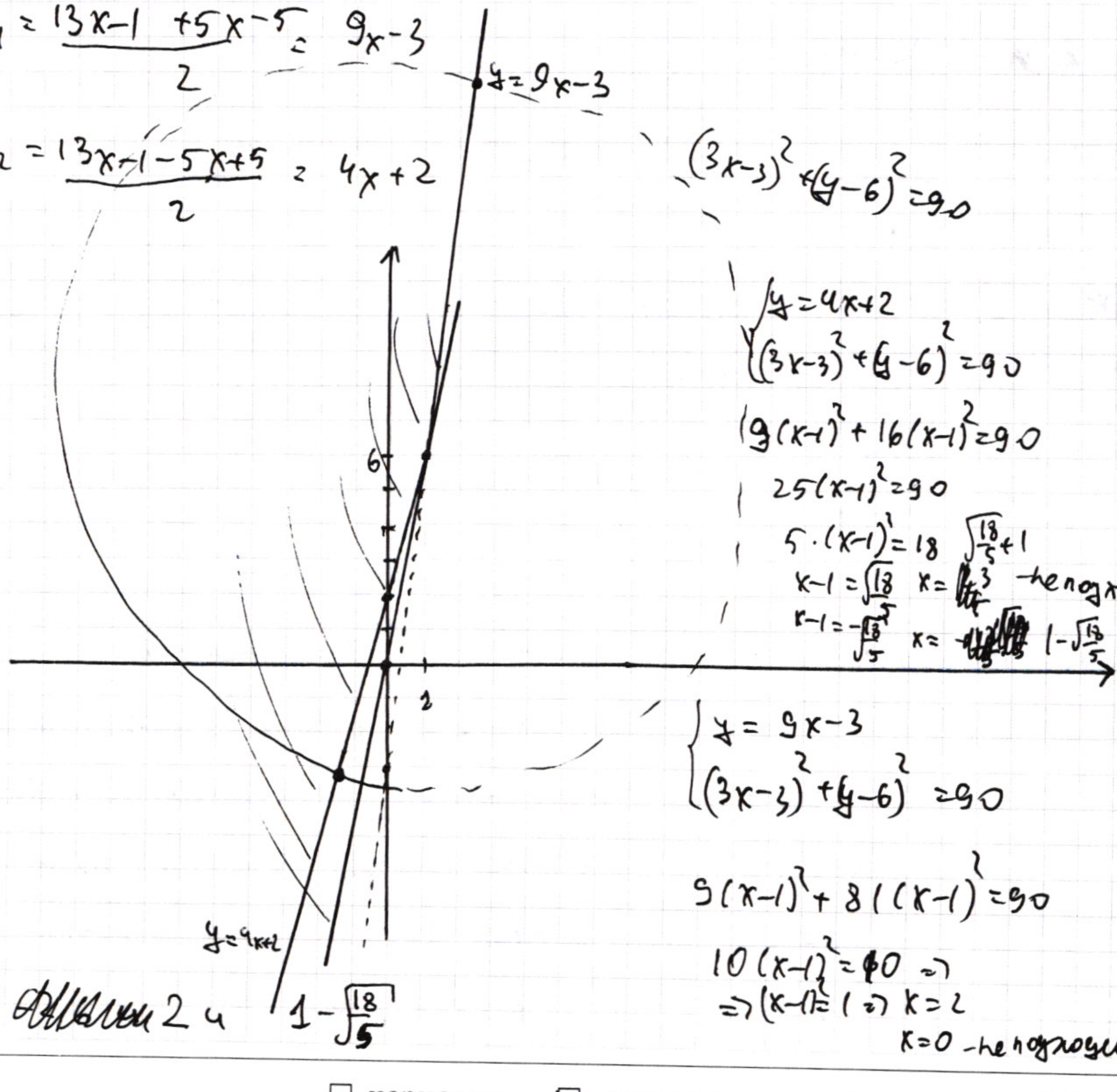
$(y-6x)^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - y(13x-1) + 36x^2 + 6x - 6 = 0$

$D = (13x-1)^2 - 4(36x^2 + 6x - 6) = 5^2(x-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = 9x - 3$

$y_2 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = 4x + 2$



$$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$9(x-1)^2 + 16(x-1)^2 = 90$

$25(x-1)^2 = 90$

$5\cdot(x-1)^2 = 18$ $\quad \sqrt{\frac{18}{5}} + 1$

$x - 1 = \sqrt{\frac{18}{5}}$ $\quad x = \sqrt{\frac{18}{5}} + 1$ — не подходит

$x - 1 = -\sqrt{\frac{18}{5}}$ $\quad x = 1 - \sqrt{\frac{18}{5}}$

$$\begin{cases} y = 9x - 3 \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$9(x-1)^2 + 81(x-1)^2 = 90$

$10(x-1)^2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 2$

$x = 0$ — не подходит

Ответ: 2 и $1 - \sqrt{\frac{18}{5}}$

□ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

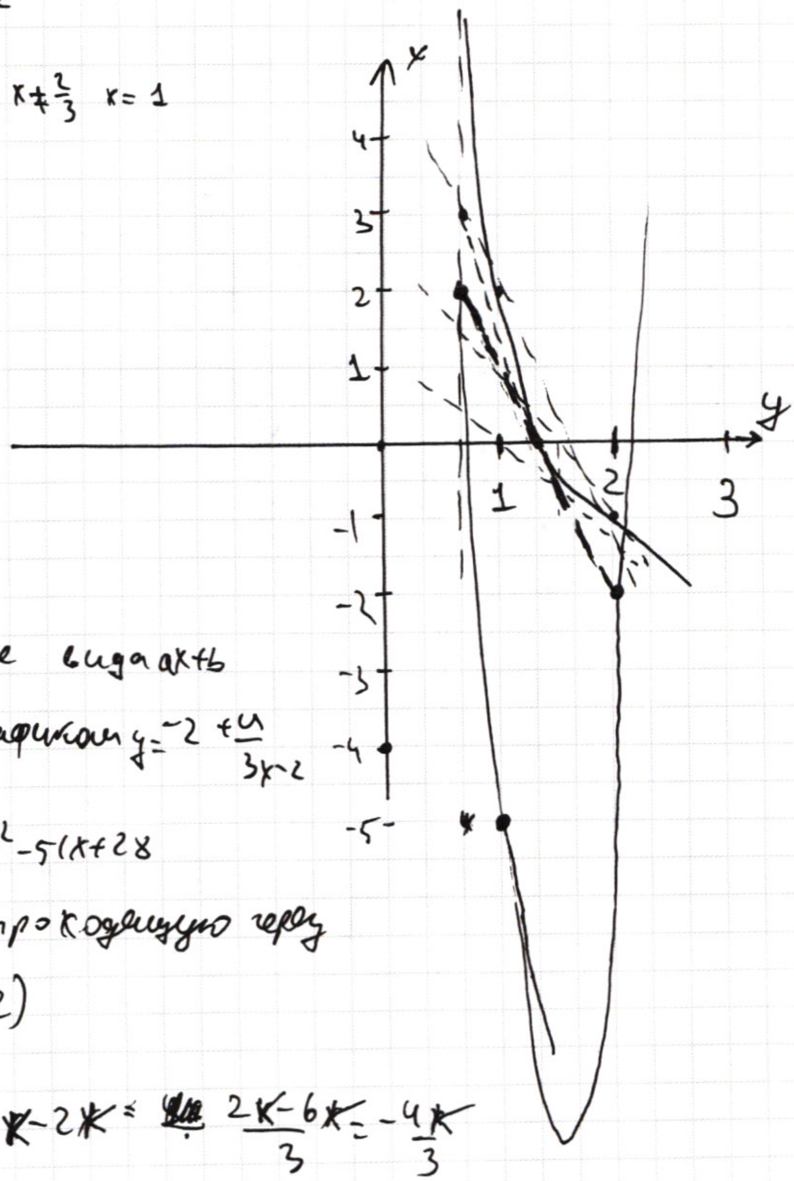
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

$y = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\quad x=0 \quad x \neq \frac{2}{3} \quad x=1$
$y=-4$



$y = 18x^2 - 51x + 28$

$x_в = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y_в =$

при $x \in (\frac{2}{3}; 2]$ прямые вида $ax+b$ должны быть „под" графиком $y = -2 + \frac{4}{3x-2}$

и внутри параболы $y = 18x^2 - 51x + 28$

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2; -2)$

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}k + b \\ -2 = 2k + b \end{cases} \quad 4 = \frac{2}{3}k - 2k = \frac{2k-6k}{3} = -\frac{4k}{3}$$

$k = -3 \Rightarrow b = 4$

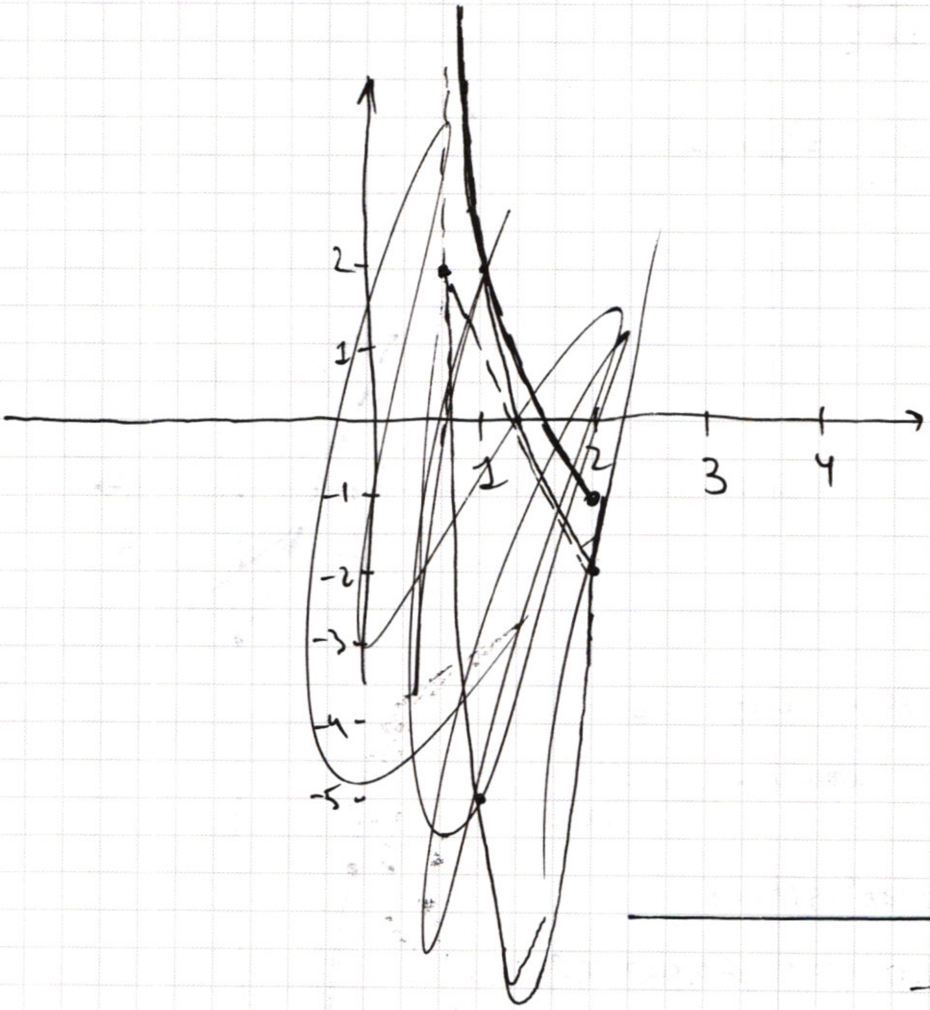
прямая $y = -\frac{4}{3}x + 4$ и график функции $y = \frac{8-6x}{3x-2}$ касаются

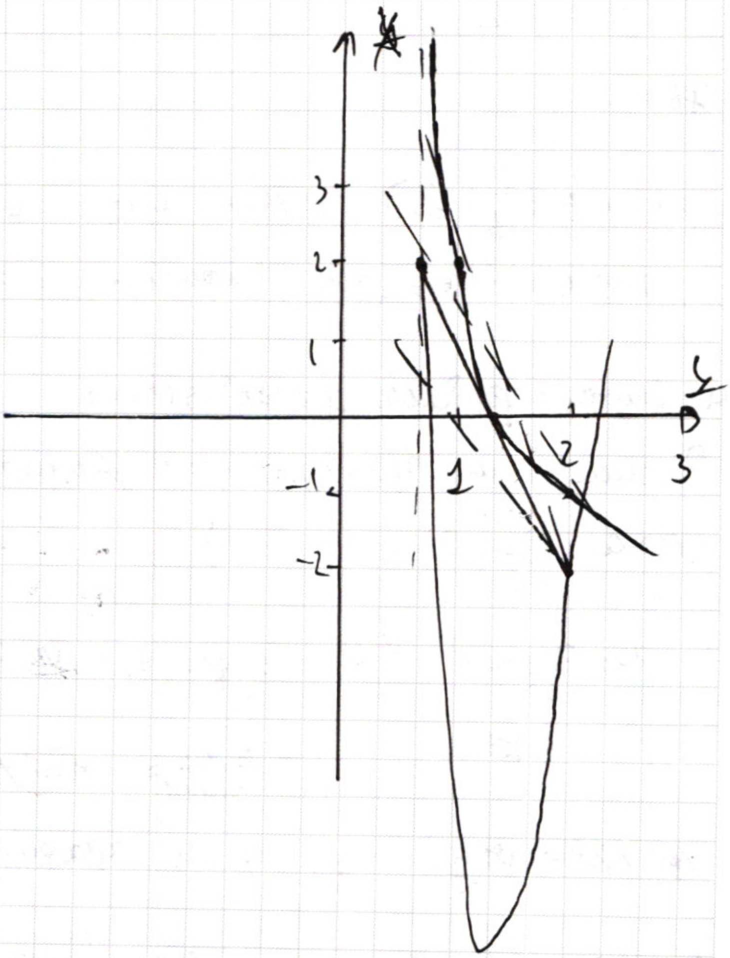
в точке с $x = \frac{4}{3} \Rightarrow$ если мы будем как-то передвигать эту

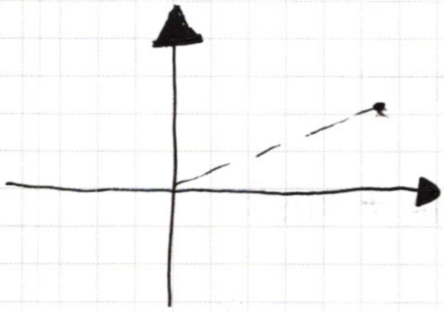
прямую, то либо она станет выше $y = \frac{8-6x}{3x-2}$ в каких-то точках на $[\frac{2}{3}; 2]$, либо ~~...~~ некоторые участки прямой окажутся вне параболы $\Rightarrow$ меньше её $\Rightarrow$ такая прямая только одна: $y = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow$ $a = -\frac{4}{3}$

$b = 4$

Ответ: $-\frac{4}{3} = a$; $b = 4$







289

$288 \,|\, 4 = 72$ $\qquad 72 \,|\, 4 = 18$ $\quad 4 \quad 32$

$288 \,|\, 32$ $\quad 32 \quad 320$ $\qquad 9$

$32 \cdot 9$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos^2 2\beta = \frac{1}{17} \Rightarrow \sin^2 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

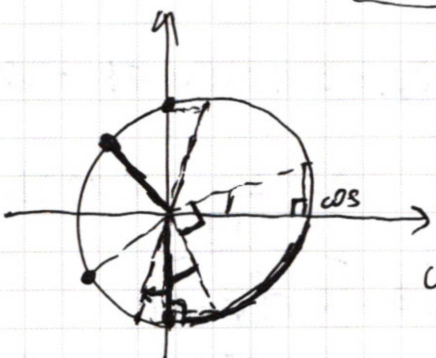
$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$= -\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(x) = \sin(90 - x)$

$\boxed{\cos(x) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$

90



$\cos(x) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos 2\beta = -\sin(2\alpha + 2\beta) \Rightarrow$

$\frac{3\pi}{2} - x$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\Rightarrow 2\beta = \frac{3\pi}{2} + \cancel{2\beta} = 2\alpha + \cancel{2\beta}$

$2\beta = \frac{5\pi}{2} + 2\beta = 2\alpha + 2\beta \qquad \frac{3\pi}{2} = 2\alpha \qquad \frac{5\pi}{4} = \alpha$

$2\beta = \frac{3\pi}{2} - 2\beta = 2\alpha + 2\beta \qquad \boxed{\frac{3\pi}{4} = \alpha}$

$\frac{3\pi}{2} = 2\alpha + 4\beta \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin\alpha + \sin\beta =$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2})}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$ $\cos^2\beta - \sin^2\beta$

$\cancel{2}$ $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos 2\beta = \boxed{2\cos^2\beta - 1}$ $\frac{15}{17}$

$\cos 2\beta = 2\cdot\frac{1}{17} - 1 = \boxed{\frac{2}{17} - 1} = \boxed{-\frac{15}{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{8}{17}$ $-\sin 2\alpha\cdot\frac{15}{17} + \cos 2\alpha\cdot\frac{8}{17} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = -\frac{15}{17}$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$; $289 - 225 = 64 = 8$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \frac{\pi}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f(x)}$ $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ $f(1)=f(0)=0$ 2

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

$f(4)$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(29)=7$

20

5, 10, 15, 20, 25
" " " " "
1 1 1 1 2

7, 14, 21, 28
" " " "
1 1 1 1

11, 22 13 26 17
" " " "
2 2 3 3

$f(1)=0$

$f(2)=0$ 4+3

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$ 3·3

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$ 16

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

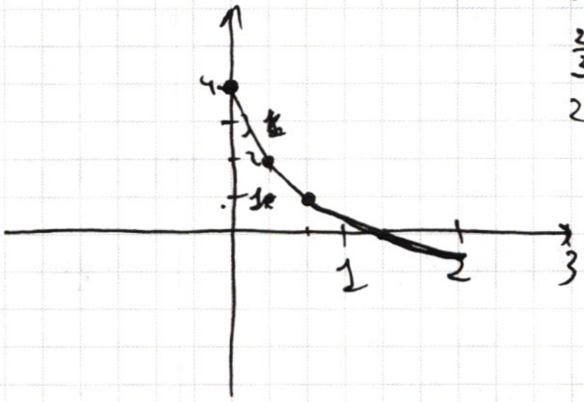
$f(18)=0$

f

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$y = -2 + \frac{12}{3x+2}$



$\frac{1}{3}$ $\quad 2+1=3 \quad \frac{12}{3}=4$

$\frac{2}{3} =$

$2+2=4$

$\frac{4}{3}$:

$4+2=6$

$\frac{12}{6}=2$

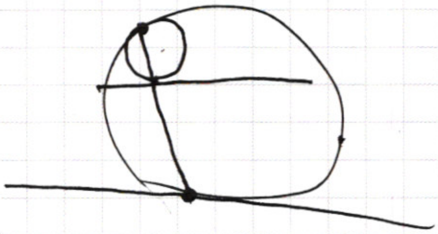
$\frac{5}{3}$: $5+2=17$

$\frac{2}{8}$

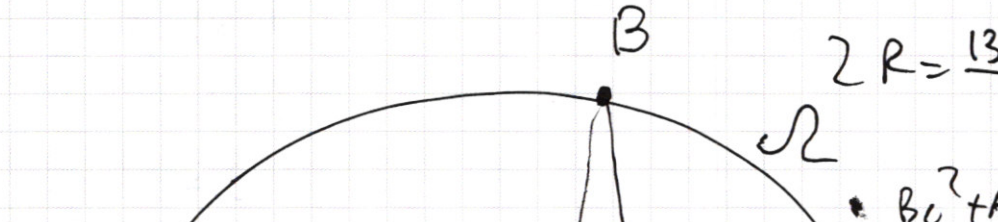
$\frac{12}{8}=1{,}5 - 2 = -0{,}5$

$51 | 3 = 17$

$18x^2 - 51x + 28$



$D = 51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28$



$2R = \frac{13AC}{12}$

$BC^2 + AC^2 = (2R)^2$

$(25)^2 + (AC)^2 = \frac{169\,AC^2}{144}$

$625 + \frac{144AC^2}{144} = \frac{169AC^2}{144}$

$625 = \frac{25AC^2}{144}$

$25 = \frac{AC^2}{144} \Rightarrow AC = 5 \cdot 12 = 60$

$2R = \boxed{\frac{13AC}{12}}$ $\Downarrow$ $2R = 13 \cdot 5 = 65$

$R = \frac{65}{2}$ $\quad 2R = 65$

$\frac{2R}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{12}$

$(2R - 2r) \cdot 2R = BD^2 = 169$

$(13 \cdot 5 - 2r) \cdot 13 \cdot 5 = 13 \cdot \cancel{13}$

$\cancel{AR^2} =$

65

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

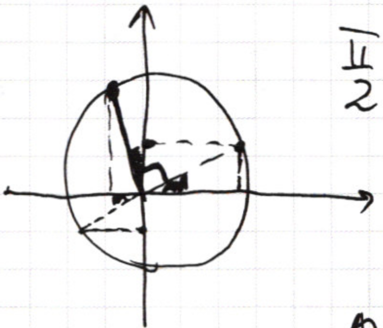
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

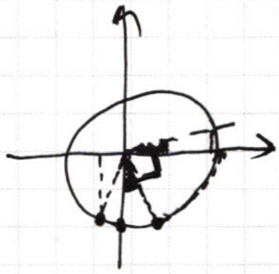


$\frac{\pi}{2} + \alpha$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

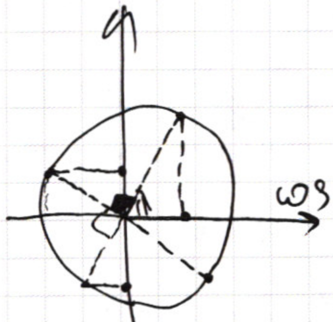
$+2\pi$

$\cos x = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$



$-\frac{2\pi}{3}$

$\cos x$



$\cos x = -\sin\left(-\frac{(2n+1)\pi}{2} + x\right)$

$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{7\pi}{2}$

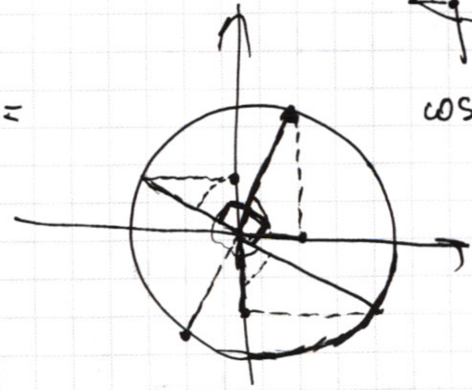
$\frac{3\pi}{2}$

$\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$\cancel{2\beta} =$ $+4\pi$

$x = 2\beta$

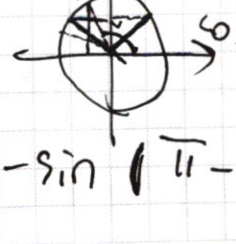
$2\alpha + \cancel{2\beta} = \cancel{x} - \frac{\pi}{2}$



$2\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$x - \frac{\pi}{2}$ $x + \frac{3\pi}{2}$

$\alpha = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$



$x - \frac{3\pi}{2}$

$+\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\pi - x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{3\pi}{2} - x$

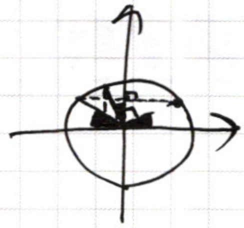
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\sin(2\alpha + 2\beta) = \cancel{1} - \frac{1}{\sqrt{17}}$

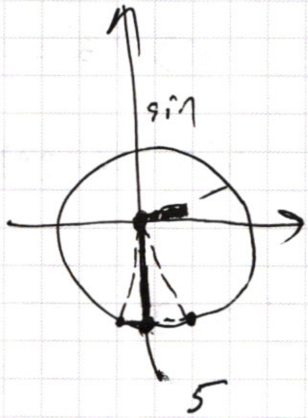
$2\beta = x$

$2\alpha + 2\beta = x - \frac{\pi}{2}$

или

$2\beta = x$

$2\alpha + 2\beta = \frac{3\pi}{2} - x$



$\cancel{2\alpha} =$

$2\alpha + \cancel{2\beta} = \cancel{2\beta} - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$2\alpha + 2\beta = \frac{3\pi}{2} - 2\beta$

$2\alpha + 4\beta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha + 2\beta) = -1 \Rightarrow$

$= -\frac{17}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = \boxed{\frac{15}{17}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{15}{17}$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$y - 6x \geq 0$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$\cancel{9x^2 + 18x}$

$(3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x + 9 + y^2 - 12y + 36 - 45 = 45$

$(3x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 90 \qquad 3^2 \cdot (x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$y^2 - 12xy + 36x^2 - xy + 6x + y - 6 = 0 \qquad 3 \cdot 2$

$x(y-6) - (y-6) = (y-6)(x-1) = (y-6x)^2$

$(3 \cdot (x-1) + y - 6)^2 = 3^2(x-1)^2 + (y-6)^2 + (y-6) \cdot (x-1) \cdot 3 \cdot 2 = 90 + 6 \cdot (y-6x)^2$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3x-3+y-6)^2 = 90+6(y-6x)^2$

$(3x+y-9)^2 = 90+6(y-6x)^2$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0 \Rightarrow x^2-26x<0 \qquad 26x \geq x^2$

$144 + 25 = 169 = 13^2$

169

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$a^x+a^y \geq a^z$

если $26x-x^2 \geq 1 \Rightarrow$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26-x^2)^{\log_5 5} \geq (26-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2)^{\log_5 144}+(26x-x^2)^{\log_5 25}+2\cdot(26x-x^2)^{\log_5 12+\log_5 5} \geq$

$\geq (26x-x^2)^{\log_5(144+25)}$

$(26-x^2)^{\log_5 144}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$ $\cos 2\alpha = \pm \frac{8}{17}$ $\Rightarrow$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{8}{17}$

$\frac{9}{17} = 2\sin^2\alpha$

$tg\, 2\alpha = \pm \frac{15}{8}$

$\frac{9}{34} = \sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}}$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{15}{34}$

$\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$25+9$

$\frac{1+8}{17} = 2\sin^2\alpha$

$\frac{25}{17} = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{25}{34} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}} \Rightarrow$

$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

$tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(a) + f(b) = f(ab)$ $f(p) = [\frac{p}{4}]$

$f(a\cdot b\cdot c) = f(a\cdot b) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c)$

$f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = f(p_1) + f\left(\frac{1}{p_2}\right)$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 0 \Rightarrow$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x=0$ — 6 —

$\frac{4}{3}\cdot 3=4-2=2$ $\frac{4}{2}=2-2=0$ 4 $-6x+4+4$

$|x^2-26|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $1-2=-1$ $6x-4+12=$

$6-2=4$ $=6x$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)^{\log_5 5} \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$-6x+4$ $\frac{4}{3}$ $4-2=2$

$x=0$ $-2-2=-4$

26 $5-2=3$ $12^2+5^2=13^2$ -4 $x=0$ $x=\frac{2}{3}$ $80+64$ $\frac{4}{2}=2$

$5-2=3$ $\frac{5}{3}:$ $\boxed{\frac{4}{3}}$ $-2+4$ 1 2 $2-2$ $x=1$

$26x-x^2{}^{\log_5 12-\log_5 13}+(26x-x^2)^{\log_5 5-\log_5 13} \geq 1$ $8+6$

$(26-x^2)^{\log_5\frac{12}{13}}+(26-x^2)^{\log_5\frac{5}{13}} \geq 1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5(26-x^2)}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)} \geq 1$ 3

$\frac{18\cdot 17\cdot 17}{5} < 51$ 54 144

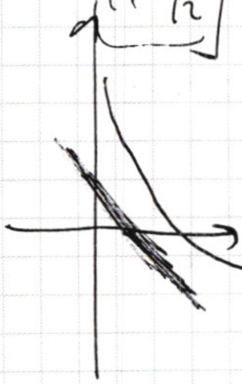
18, 28, 144, 36, 504, 4, 2016

$51\cdot 51=255+51$, $2601-2016=589$ 5 17

$18x^2-51x+28$

$D=51^2-4\cdot 18\cdot 28$ 27 $18\cdot 28=46$ 23

$\boxed{1+\frac{5}{12}}=\frac{1}{2}$ $18\cdot 4-51\cdot 2+28$ 17 15



$x_B=\frac{51}{36}=\boxed{\frac{17}{12}}$ 13 6 -51

$18\cdot 4-102+28$ $589:7$ $18+28$ $23\cdot 23=69+46=529$

$40+32=72+28=100$ $4\cdot 2=8$

$589:13$, -52, 69 -102

$\frac{2}{3}:$ $18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28$ 10 $17\cdot 2=34$ $51\cdot\frac{2}{3}=34$

$589:17$, 51, 79 $8+28=36$ $\frac{12}{3}34=2$ $31\cdot 19=279+31=589$ $8+28=36-34=2$

$x_B=\frac{17}{12}$ 14

19 $589:19=31$, 57, 19

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \Rightarrow (y-6)(x-1)=(y-6x)^2$

$3x-3-y+6=$

$=3x+3-y$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

3

$90 \mid 5$

$45\cdot 2$

$9\cdot 10$

$18\cdot 5$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=\cancel{90}\ 45$

$((3x-3)+(y-6))^2=\underbrace{(3x-3)^2+(y-6)^2}_{90}+6\cdot(y-6x)^2$

$y=4x+2$

$9(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$

$3x-3$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$

144

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

$25(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{18}{5}=\cancel{4},$

$y^2-y(13x-1)+36x^2+6x-6=0$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$D=(13x-1)^2-(36x^2+6x-6)\cdot 4=$

$(3x-3)^2+(9x-3-6)^2=90$

$=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$9(x-1)^2+81(x-1)^2=90$

$=25x^2-50x+25=$

$\frac{-1-5}{2}=$

$(x-1)^2+9(x-1)^2=10$

$=25(x^2-2x+1)=$

$(x-1)^2=1 \Rightarrow \begin{matrix} x-1=1 & x=0 \\ x-1=-1 & x=2 \end{matrix}$

$=25(x-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=\frac{13x-1-5(x-1)}{2}=\frac{13x-1-5x+5}{2}=\frac{8x-4}{2}=4x-2$

$y_2=\frac{13x-1+5(x-1)}{2}=9x-3$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = -3x+4$

$y = \frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -3x+4$

$8-6x = -9x^2 + 12x + 6x - 8$

$-9x^2 + 24x - 16 = 0$

-10 $\quad 4 \quad$ $\frac{4^2}{3^2} \cdot 9 = 16$

$9x^2 \cancel{-} 18x + 16 = 0$ $\quad \frac{24 \cdot 4}{3}$

$9(x^2-2x+1)+7=0$

32

$\frac{4}{3}; 0$ $\quad 9x^2 \cancel{-} 24x + 16 = 0$

$2; -2$ $\quad D =$ $\quad x_1 = 4$

$0 = \frac{4}{3}k + b$ $\quad 9 \cdot 16 - 24 \cdot 4 + 16$

$-2 = 2k + b$ $\quad \frac{16}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}$

$2 = \frac{4k-6k}{3}$ $\quad \frac{4}{3}$

$6 = -2k$ $\boxed{k=-3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$29-4=\boxed{25}$ $6-4=2+1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, | 29
1 1 2 3 4 $x=4$ 1

4, 5, 6

1: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, ~~24~~ 28, ~~28~~
2: ~~4~~ 11, 22, 25
3: 13, 26
4: ~~13~~ 17, 19
5: 23

0: 10

0 и не 0: ~~10.15~~ 9·16
1 и >1: ~~8.7~~ 8·8
2 и >2: ~~3.4~~ 3·5
3 и >3: ~~2.2~~ 2·3
4 и >4: ~~1~~ 2·1

Ответ: ~~10·15 + 8·7 + 3·4 + 2·2 + 1~~
9·16 + 8·8 + 3·5 + 2·3 + 2·1

8
3
2
~~2~~
1

$289 - 225 = 64$

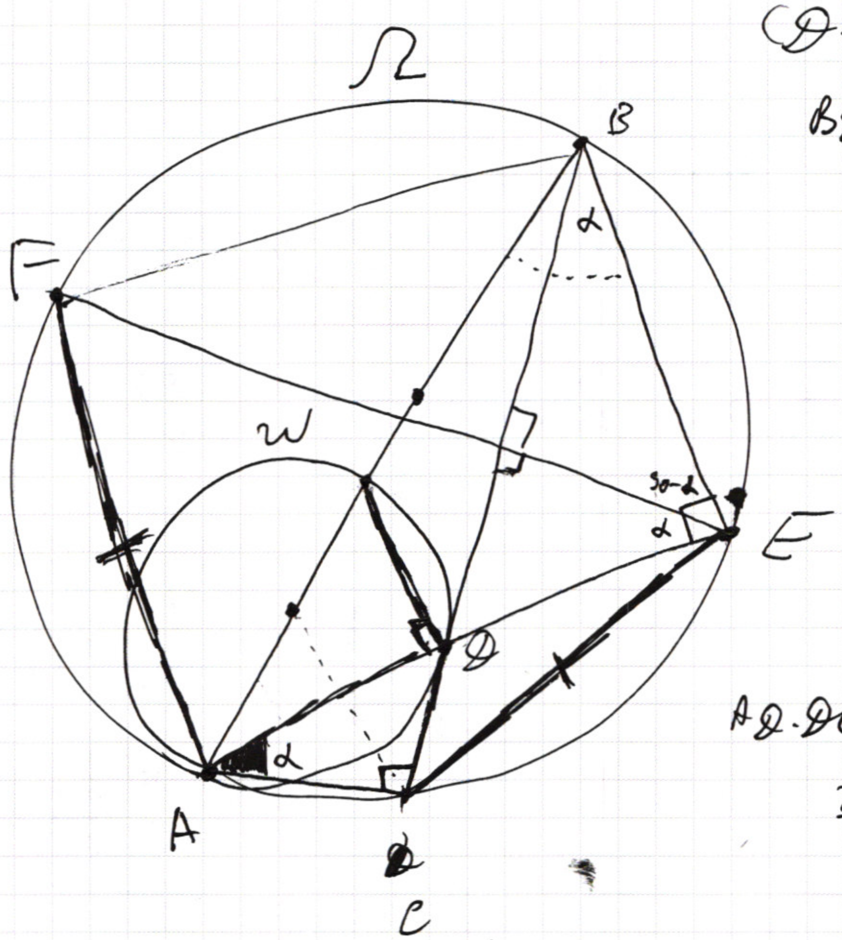
4·3

9×16

$16 \times 9 = 144$
$144 + 64 = 208$
$208 + 15 = 223$
$223 + 8 = 231$
$144 + 12 = 156$

13×12: 26, 13, 156

$144 + 64 = 208$
$15 + 8 = 23$
$23 + 8 = 31$



$CD = 12$

$BD = 13$

$BD \cdot CD = AD \cdot DE$

$AD \cdot DE = 12 \cdot 13$

$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \quad +2 = 4$

$x = 2$

$(2R - 2r) \cdot 2R$

$(2R - r)^2 - r^2 =$

$= 4R^2 - 4Rr + r^2 - r^2$

$\cancel{}\ 169 = 4R(R - r)$

$AD \cdot DE = 12 \cdot 13$

$(DE + AD) \cdot AD$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE}$

$\frac{12}{8} = 1{,}5 - 2 = -0{,}5$

$x = 2$

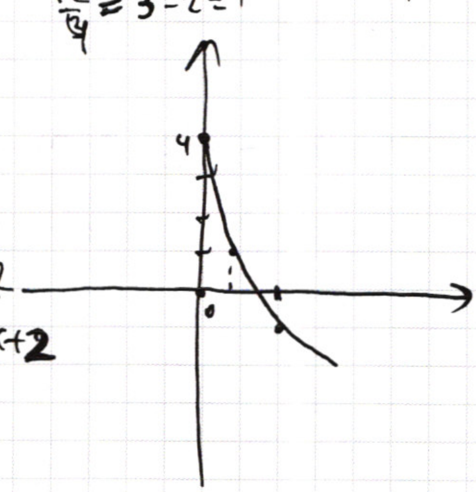
$x = 0$

$-2 + 6 = 4$

$\frac{12}{4} = 3 - 2 = 1$

$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b$

$y = \frac{8 - 6x}{3x + 2} \qquad \frac{-2(3x + 2) + 12}{3x + 2} = -2 + \frac{12}{3x + 2}$



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)