МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

√ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

√ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

(2) по формуле суммы синусов:

$$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

Подставим (1)

$$-2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(два возможных значения)

$$(1): \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot(+\sqrt{5})$$

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin 2\alpha = -1 \mp \cos 2\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha) \\ 2\sin 2\alpha = -(1-\cos 2\alpha) \end{array}\right.$$

$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha; \quad 2\cos^2\alpha = 1+\cos\alpha$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cos^2\alpha \\ 2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\sin^2\alpha \end{array}\right.$$

$tg\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$ (можно делить на $\cos\alpha$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \Big| : 2\cos\alpha \\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \quad \Big| : 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha\cdot\left(tg\alpha + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = 0 \\ \cos\alpha(tg\alpha + 2) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-2; -\frac{1}{2}; 0\right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$(1):\ x-2+2-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}\ \cancel{\Big|:\sqrt{(x-2)(y-1)}}\quad (3)$

$\cancel{\sqrt{\frac{x-2}{y-1}}-2\sqrt{\frac{y-1}{x-2}}=1}$

$(2):\ x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12$

$(x-2)^2+\cancel{9}(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2\quad (4)$

Проверим, когда или $x-2=0$, или $y-1=0$:

$(3): -2(y-1)=0 \Rightarrow y-1=0$ (не удовлетворяет уравнению (4)) $(4):\ 0=5^2$

$(3):\ (x-2)=0$ не удовлетворяет $(4)\Big|: 0=5^2$

Т. е. если $x-2=0$, то $y-1=0$, что неверно, и если $y-1=0$, то $x-2=0$, что тоже неверно. Значит $x-2\neq0$ и $y-1\neq0$

(3): $(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$ $\Big/ : \sqrt{(x-2)(y-1)}$

(можно делить, т.к. $x-2\neq 0$ и $y-1\neq 0$)

$\sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}-2\sqrt{\dfrac{y-1}{x-2}}=1$. Замена $t:=\sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}\geq 0$

$t-2\dfrac{1}{t}=1 \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} t\in\{-1;2\} \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow t=2$

$\sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}=2 \Rightarrow \dfrac{x-2}{y-1}=4 \Rightarrow x-2=4(y-1)$ (5)

Подставим (5) в (4):

$4^2(y-1)^2+3^2(y-1)^2=5^2$

$5^2(y-1)^2=5^2 \Rightarrow (y-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

$y=2$: $x-2=4 \Rightarrow x=6$

$y=0$: $x-2=-4 \Rightarrow x=-2$

Из (1) следует, что $x-2y\geq 0$

$\left.\begin{array}{l} 6-2\cdot 2\geq 0 \text{ - верно} \\ -2-2\cdot 0\geq 0 \text{ - неверно} \end{array}\right\} \Rightarrow (6;2)$

Ответ: $(6;2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5

$f(x)$, $x>0$, $x\in\mathbb{Q}$, $f(ab)=f(a)+f(b)$

Пусть $b=a$, тогда $f(a^2)=f(a)+f(a)=2f(a)$

$f(a^3)=f(a^2)+f(a)=3f(a)$

Пусть $b=\frac{1}{a}\in\mathbb{Q}$, Тогда $f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$

2 - простое $\Rightarrow f(2)=[\frac{2}{4}]=[0,5]=0$

~~$f(2)=f(2\cdot 1)$~~

$f(a)=f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$0=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a})$

Аналогично можно доказать, что $f(a^k)=kf(a)$, $k\in\mathbb{Z}$ (для $\mathbb{N}$ доказывается по индукции: $f(a^1)=f(a)$, $f(a^k)=ka^k \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a^{k+1})=f(a^k\cdot a)=f(a^k)+f(a)=(k+1)f(a)$, ч.т.д.; для отрицательных доказывается аналогично)

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow \underline{f(y) > f(x)}$

Найдем значения f при $n \in [1; 24]$, $n \in \mathbb{N}$:

$f(1) = 0$, $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$, $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$,

$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 0$, $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$, $f(6) =$

$= f(2) + f(3) = 0$, $f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$, $f(8) = f(4) + f(2) = 0$,

$f(9) = f(3^2) = 2f(3) = 0$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$,

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$, $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$, $f(14) = f(2) + f(7) = 1$,

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$, $f(16) = 0$, $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$, $f(18) = 0$,

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$, $f(20) = 1$, $f(21) = 1$, $f(22) = 2$, $f(23) =$

$= \left[\frac{23}{4}\right] = 5$, $f(24) = f(3) + f(8) = 0$

Получается, что при:

11 значениях – „0"
7 значениях – „1"
2 значениях – „2"
1 значении – „3"
2 значениях – „4"
1 значении – „5"

Если $f(y) = 5$, то возможно 23 случая
Если $f(y) = 4$, то возможны $2 \cdot 21$ случая
Если $f(y) = 3$, то возможны 20 случаев
$f(2)$: $2 \cdot 18$, $f(1)$: $7 \cdot 11$, $f(0)$: 0

Всего: $23 + 2 \cdot 21 + 20 + 2 \cdot 18 + 7 \cdot 11 = 198$ Ответ: 198

Задание 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

По ОДЗ $x^2+18>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-(x^2+18x)$$

Замена: $\log_{12}(x^2+18x)=t \Rightarrow x^2+18x=12^t$

$$5^t \geq (12^t)^{\log_{12}13}-12^t \Rightarrow 5^t+12^t \geq 13^t$$

$13^t>0$. Поделим на 13^t:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$$

Пусть $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, тогда $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{5^2}{13^2}}=\frac{\sqrt{13^2-5^2}}{13}=$
$=\frac{12}{13}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin^t\alpha+\cos^t\alpha \geq 1$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$\cos^t\alpha-\cos^2\alpha+\sin^t\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha(\cos^{t-2}\alpha-1)+$$
$$+\sin^2\alpha(\sin^{t-2}\alpha-1)$$

$$\left[\begin{matrix}\sin\alpha\leq 1\\ \cos\alpha\leq 1\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases}\sin^{t-2}\alpha\leq 1\\ \cos^{t-2}\alpha\leq 1\end{cases} \Rightarrow \cos^2\alpha(\cos^{t-2}-1)+\sin^2\alpha(\sin^{t-2}\alpha-1)\leq 0$$

$\cos^t\alpha+\sin^t\alpha \leq \sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. Равенство при $t=2$

Получаем, что $\sin^t\alpha+\cos^t\alpha\leq 1$

$$\begin{cases}\sin^t\alpha+\cos^t\alpha\geq 1\\ \sin^t\alpha+\cos^t\alpha\leq 1\end{cases} \Rightarrow \sin^t\alpha+\cos^t\alpha=1 \Rightarrow t=2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x>0 \qquad t=\log_{12}(x^2+18x) \Rightarrow x^2+18=12^t$

$5^t \geq 12^{t\log_{12}13}-12^t$

$5^t \geq 13^t-12^t \Rightarrow 5^t+12^t \geq 13^t$

$5^2+12^2=13^2 \qquad 5^3+12^3 \qquad 13^3$

$5^2+12^2-2\cdot5\cdot12+2\cdot5\cdot12=13^2$

$(12-5)^2+25\cdot12=13 \qquad 125+12-144$

$5^t+12^t \leq \sqrt{(5^t)^2+(12^t)^2}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1 \Rightarrow t=2$

$x^2+18x=144$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{12}(x^2+18x)=2 \Rightarrow x^2+18x-144=0 \Rightarrow$

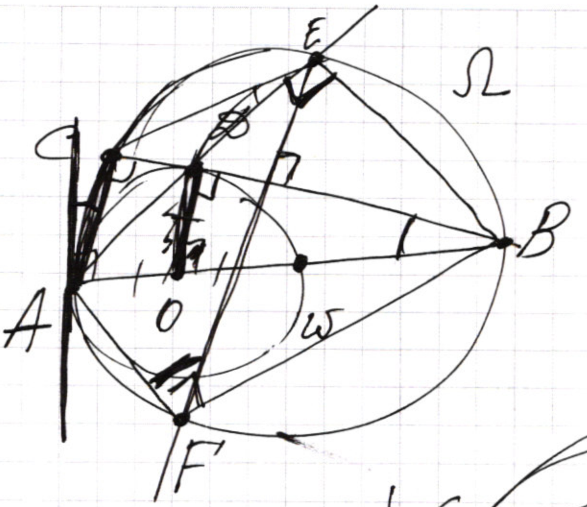
$\Rightarrow \frac{D}{4}=9^2+1\cdot 12^2=81+144=225=15^2$

$x=\frac{-9\pm 15}{1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=6 \\ x_2=-24 \end{array}\right.$

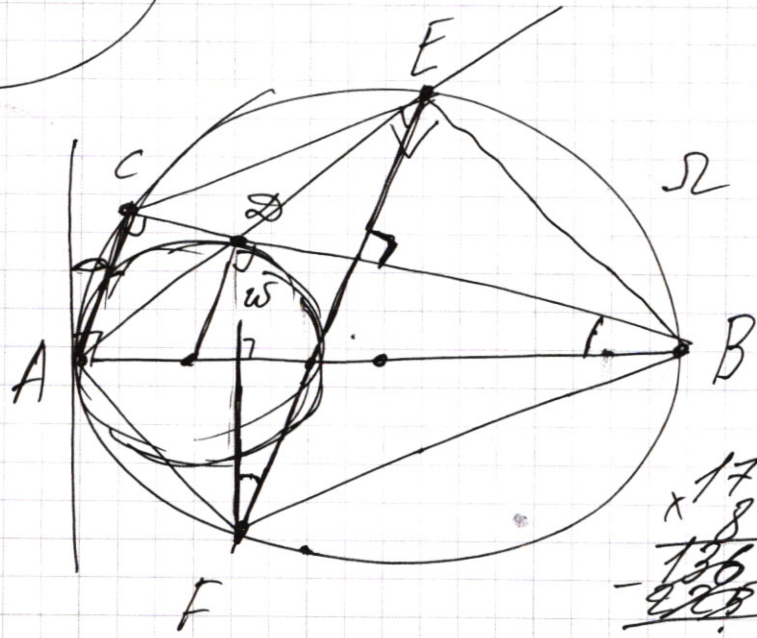
~~Ответ:~~ $x=-24$: $24^2-18\cdot 24=24\cdot 6>0$

$6^2+18\cdot 6>0$

Ответ: $\{-24; 6\}$



$EF \parallel OD \parallel AC$



$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -\,136 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq$$

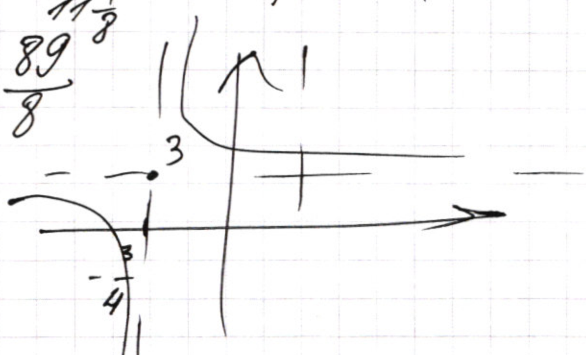
$$-8x^2 - 30x - 17 = -8\left(x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{17}{8}\right) =$$

$$= -8\left(x^2 + 2\frac{15}{8}x + \left(\frac{15}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{17}{8}\right) =$$

$$= -8\left(\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{17}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2\right) = -8\left(\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{17 \cdot 8 - 15^2}{8^2}\right) =$$

$$11\frac{1}{8}$$

$$= -8\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

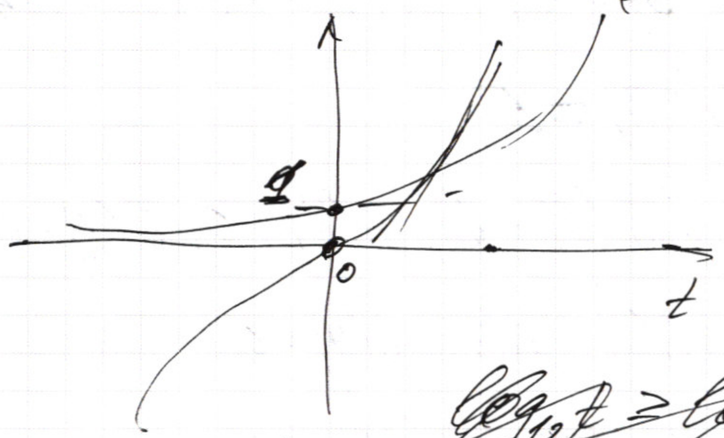
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - (x^2+18x)$$

$t := x^2+18x$

$t(t^{\log_{12}13-1} - 1)$

$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13} - t = \cancel{t(t^{\log_{12}13}-}$

$t(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$



$\cancel{\log_{12}t \geq \log_5(t+t)}$

$f(x)$, $x \in Q$, $x>0$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(2) = f(2\cdot 1) = f(2)+f(1) =$

$f(1) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$, $f(11) = 2$

f

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =>$

$=> f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(a^n) = n f(a)$

$\frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{24}; 24\right]$ $\quad f(1)=f(2)=f(3)=0$

$f(a^n)=nf(a)$, $f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0$

$f(y)>f(x)$

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$,

$f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$,

$f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$, $f(6)=0$, $f(8)=0$, $f(9)=0$

$f(10)=0+1=1$ $\quad f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(14)=f(7)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$,

$f(18)=0$, $f(20)=1$. $f(21)=f(7)=1$

$f(22)=2$, $f(24)=f(3)+f(8)=0$

65 85 121

$18+6=24$ $\quad \underbrace{23+42+20+36}+77=198$

$$\begin{array}{r} 85 \\ +\,36 \\ \hline 121 \end{array} \qquad 85+15+21=121$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2) : $\cancel{x^2-4x+4+9y^2-18y+9=1}$

$x^2-4x+9y^2-18y=\cancel{12}+4+8$

$x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)-4-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$

(1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=$

$x\geq 2y$

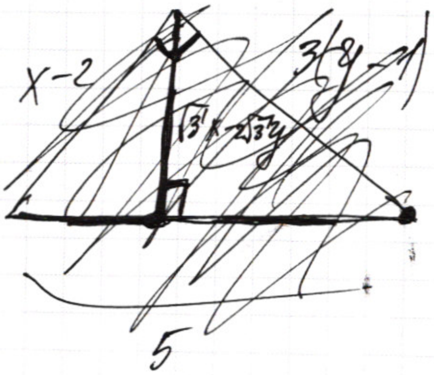
$\Rightarrow x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y\geq 0$

$$\begin{cases} (x-2)^2+(3(y-1))^2=5^2 \\ \sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=\sqrt{3(x-2)(y-1)} \end{cases}$$

$x^2-4xy+4y^2=(x-2)(y-1)$

$x-2+3y-1$



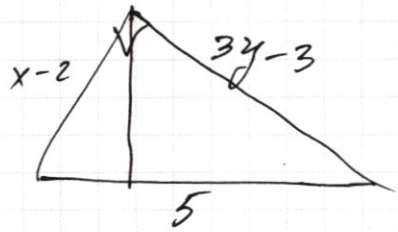
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \end{cases}$$



$\cancel{3(x-2)(y-1)=3(x-2y)^2}$

$x-2\cancel{+}-2y+2=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \quad \Big/ : \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}-2\sqrt{\dfrac{y-1}{x-2}}=1$

$6-4=\sqrt{(6-2)(2-1)}$

$2=2$

$t:=\sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}\geq 0 \quad t-2\dfrac{1}{t}=1 \Big/ \cdot t \quad 4^2+3^2=5^2$

$t^2-t-2=0 \Rightarrow D=1+4\cdot 2=9$

$t=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ \cancel{t=-1} \end{array}\right. \Rightarrow t=2$

$\dfrac{x-2}{y-1}=4 \Rightarrow x-2=4y-4 \Rightarrow \cancel{4y-x}=2$

$4^2(y-1)^2+3^2(y-1)^2=3^2+4^2$

$\cancel{(y-1)^2(4^2+3^2)} \quad (y-1)^2=1 \Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

$\cancel{x=4} \quad x-2=4 \Rightarrow x=6$

$x-2=-4 \Rightarrow x=-2$

$x \geq 2y \qquad 6 \geq 4$

$-2 \geq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(4\alpha+4\beta-2\alpha) =$

$= \sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha =$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta +$
$+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta =$
$=\cos 2\alpha\cdot(\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta)$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 4\alpha\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta$

$\sin x+\sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y-x-y}{2}\right) =$
$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$2\sin a\cdot\cos b = \sin(a+b)-\sin(a-b)$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}}$
$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\cos 4\beta = 2\cdot\frac{4}{5}-1 = \boxed{\frac{3}{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin\alpha =$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{5} - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \sin\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} \quad \Big/ \cdot \frac{4\sqrt5}{5}$$

$$\frac{4\sqrt5}{5} \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \sin 2\alpha$$

$$-\frac{4}{5} - \sin 2\alpha \cdot 8 = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \sin 2\alpha + \frac{4\sqrt5}{5} \sin 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{3}{5} + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt5}{5} \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big/ \cdot \frac{4\sqrt5}{5} \\ \frac{3}{5} \sin 2\alpha + \frac{4\sqrt5}{5} \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{8}{5} \sin 2\alpha - \frac{3}{5} \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{8}{5} \sin 2\alpha + \frac{4\sqrt5}{5} \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin^2\alpha - 1 = \cos$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\frac{8}{5} \sin 2\alpha + \frac{4\sqrt5}{5} \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha$$

$$2\sin 2\alpha = -(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\frac{8}{5} \sin 2\alpha \pm \frac{4}{5} \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$4\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -2\cos^2\frac{2\alpha}{2}$$

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

$$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3+\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{4}} \le ax+b \le -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+\frac{89}{8}$$

$$3+\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-17$$

$x<-\frac{3}{4}$, один корень

$$\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-20 \Rightarrow \frac{1}{4x+3}=-4x^2-15x-10$$

$$1=-(4x^2+15x+10)(4x+3)=-(16x^3+12x^2+\cancel{30}\,60x^2+$$

$$+45x+40x+30) \Rightarrow -1=16x^3+72x^2+85x+30$$

$$16x^3+72x^2+85x+31=0$$

$$-16+72-85+31=-101+103$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3\cdot 4x+3\cdot 3+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\,136 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$-8x^2-30x-17$$

$$-2(4x^2-15x)-17 = -2(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{15}{4}$$

$$\frac{D}{4} = 15^2+8\cdot 17 = 225+136 = 361 = 19^2$$

$x_2 = -\frac{17}{4}$ $x_1 = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{15\pm 19}{-8} = \frac{34}{-8}$$

$\cancel{x_1 = -3}$ $\cancel{x_2 = -\frac{17}{4}}$

$$x_0 = \frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$$

$$-\frac{17}{4}-\frac{12}{4} = -\frac{29}{4}$$

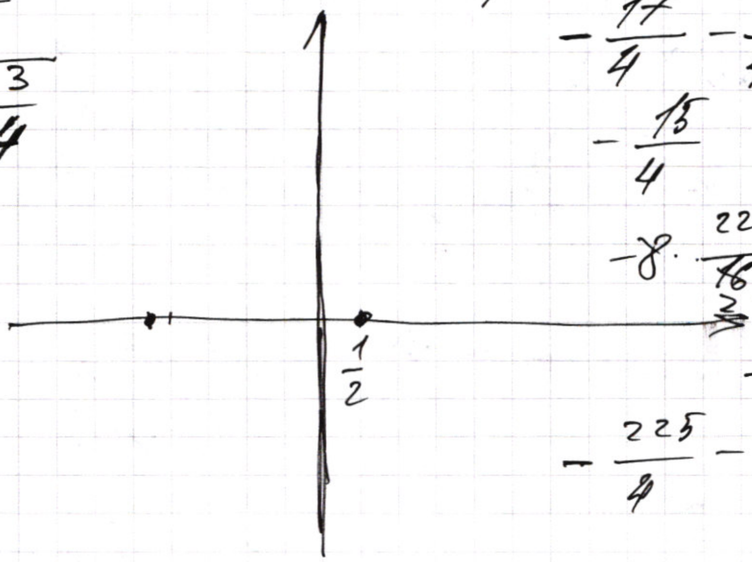
$$3+\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{4}}$$

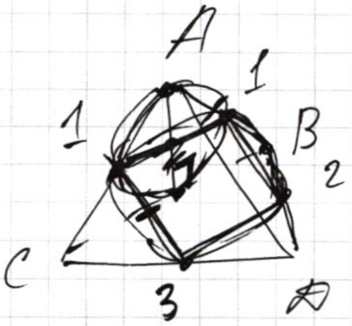
$$-\frac{15}{4}$$

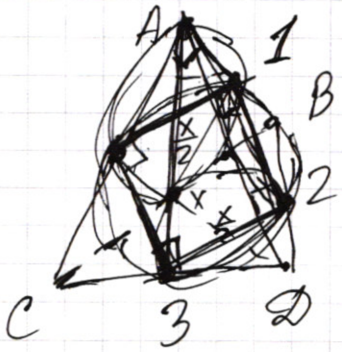
$$-8\cdot\frac{225}{16_2}+\frac{2\cdot 225}{8_4}-17$$

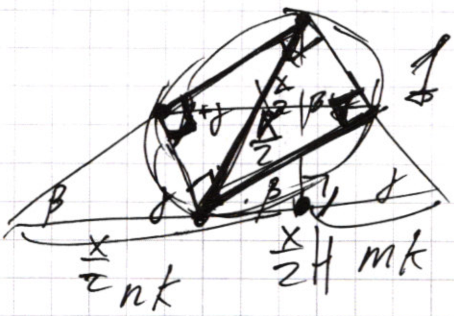
$$-\frac{225}{4}-17 =$$

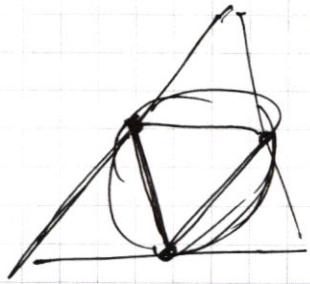
$=$.

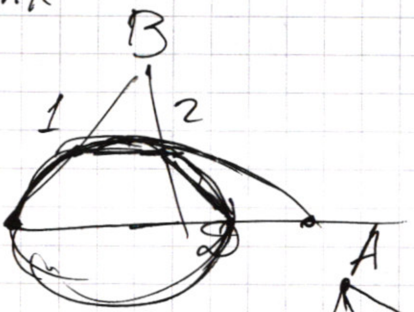


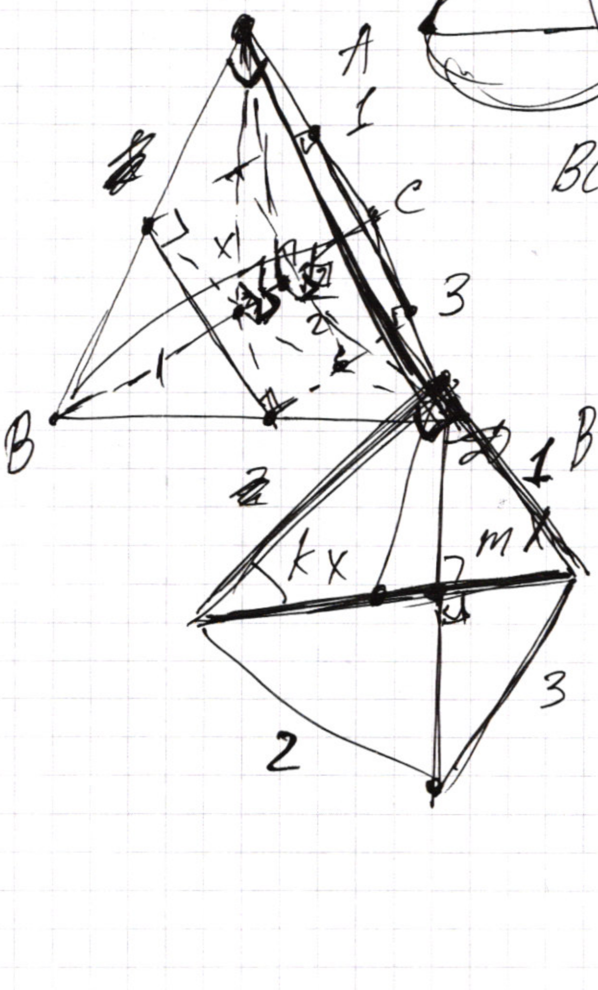


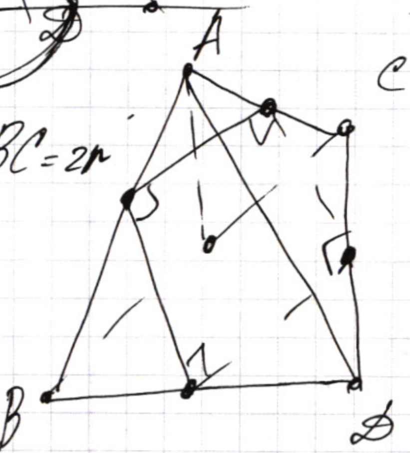












$\cancel{m^2x^2}$ $9-m^2x^2=4-k^2x^2$

$5=x^2(m^2-k^2)$

$\frac{1}{mx}=\frac{(m+k)x}{1}$ $\frac{k}{m}$

$1=x^2(m(m+k)$

$5=x^2(m-k)(m+k)^2$ $5=1-\frac{k}{m}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)