МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

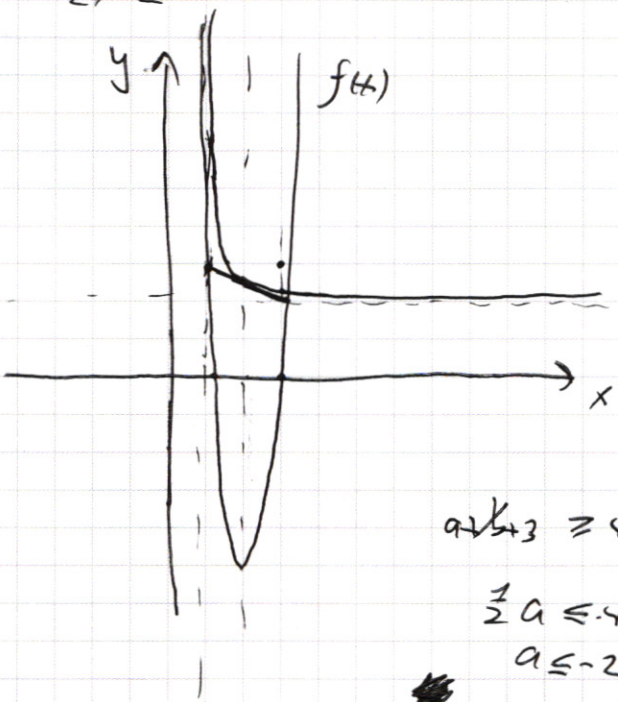
$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\overbrace{4x-3}^{g(x)}}{2x-2} \geq ax+b \geq \overbrace{8x^2-34x+30}^{f(x)}$ $\forall x \in [1;3]$ $(a,b)?$



$a+\cancel{b}+3 \geq 4+\frac{3}{2}a+\cancel{b}$

$\frac{1}{2}a \leq -1$

$a \leq -2$

$\cancel{-36+36}-9$

$3a$

$8-34+30$

$38-3$

$\frac{3}{2}a+b \leq 3$

$a+b \geq 4$

$3a+b \geq 0$

$\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b \geq 6$

$3 \geq \frac{3}{2}a+b$

$\cancel{2a \geq -4}$

$\boxed{\cancel{a \geq -2}}$

$\frac{1}{2}b+3 \geq 6$

$b \geq 6$

$3a+b \geq 0$

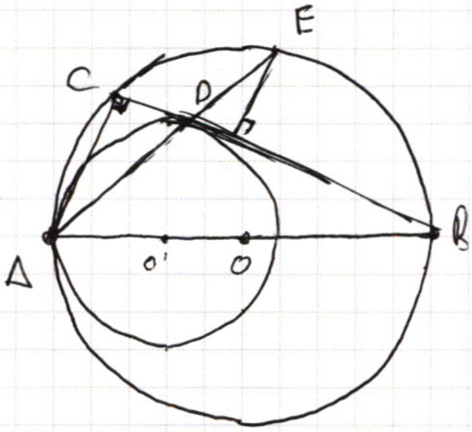
$3a+2b \leq 6$

$\cancel{3a}+b+6 \geq \cancel{3a}+2b$

$\boxed{b \leq 6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Поскольку окр. ω и Ω касаются, $AB \perp a$: $A \in a$; a - кас. к Ω в т. A, но ведь a - кас. к ω в т. $A \Rightarrow$ т.к. $AB \perp a \Rightarrow AB$ проходит через центр ω O'
(O - центр Ω),
Пусть $k = \frac{R_\Omega}{R_\omega}$. Тогда $H_A^k(O') = O$
$H_A^k(D) = F$

$289 - 240 = 49$
$x = \frac{17 \pm 7}{8} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\left(\frac{17}{8}\right)^2 \cdot 8 - 34 \cdot \frac{17}{8} + 30 = \frac{289}{8} - \frac{2 \cdot 289}{8} + 30 = \frac{-289 + 240}{8} = -\frac{49}{8}$

$-6 - \frac{1}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b \notin P \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = 0$ 2 3 25 6 10 14 22 и т.д.

$f(6) = 0$ 0 1 0 1 1 2

$f(9) = 0$ 2

$p > 1$

$x > y \Rightarrow f(x/y) = f(p) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(py) + f(\frac{p}{x}) =$

$= f(p) + f(y) + f(p) + f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{y}{x}) = -f(p) = -f(\frac{x}{y})$

1 сл. $x = y \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(1) = 0$

2 сл. $x \neq y \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(\frac{x}{y}) + f(y) + f(\frac{x}{y}) + f(\frac{1}{x}) =$

$= 2f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) \Rightarrow f(\frac{y}{x}) = -f(\frac{x}{y})$

если $f(\frac{x}{y}) = 0 \Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{y}) \Leftrightarrow x = y$

$f(6) \neq$

$x \neq y \quad f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{x}{y}) + f(\frac{x}{y}) + f(\frac{1}{x}) =$

$2f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) \Rightarrow f(\frac{y}{x}) = -f(\frac{x}{y})$

пусть $f(\frac{y}{x}) = 0 \Leftrightarrow f(y) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\frac{y}{x}) + f(x) + f(\frac{y}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(\frac{y}{x}) + f(\frac{x}{y}) = 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x \neq y$:

$$\boxed{f\left(\frac{y}{x}\right) = -f\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$

x - простое $\Leftrightarrow$

x - сост. $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(a) + f(b)$ $\quad ab = x$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	2·2	p	2·3	p	4·2	3·3	2·5	p	2·6 3·4	p

$\times \begin{array}{r} 17 \\ 17 \end{array}$ $\quad$ 4

$+ \begin{array}{r} 119 \\ 17 \end{array}$ $\quad$ 289

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x^2}{y}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

60

240

$-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x)$ при x

$2(4x^2 - 17x + 15)$

$289 - 4\cdot 4\cdot 15 = 49$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2 - 34x + 30$

$x = \frac{17 \pm 7}{8} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$34\cdot 9$

$8(x-3)\left(x - \frac{5}{4}\right)$

$\frac{4\left(x - \frac{3}{4}\right)}{2(x-1)} \geq 8(x-3)\left(x - \frac{5}{4}\right)$

$-\begin{array}{r} 340 \\ 34 \end{array}$

306

$x > 1 \Rightarrow \frac{4(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-1)}{\left(x - \frac{3}{4}\right)} \leq 0$

$62 - 78$

-16

$\frac{321 - 306}{8}$

$\frac{27-6}{8} = \frac{15}{8}$

$(x-3)\left(x - \frac{5}{4}\right) > 0$

$32 - 78 + 30$

$\frac{8-3}{} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{9}{8}$

$\frac{81}{8} - \frac{34\cdot 9}{8} + \frac{30\cdot 8}{8} = \frac{81 - 306 + 240}{8}$

$\frac{4\cdot\frac{9}{8} - 3}{2\cdot\frac{9}{8} - 2} = \frac{\frac{9}{2} - 3}{\frac{9}{4} - 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{1} = 6$

$\frac{81}{64}\cdot 8 - 34\cdot\frac{9}{8} + 30 \qquad \frac{15}{8}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Чему равно $f(x)$ при $3 \le x \le 27$?

x	~~1~~	~~2~~	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
представления x			1·3	2·2	5·1	2·3									
$f(x)$			0	0	1										

179

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

$2(4x^2 - 17x + 15)$

$289 - \cancel{60} \cdot 4 = 49$

$x = \frac{17 \pm 7}{8} = \left[\begin{matrix} 3 \\ \frac{5}{4} \end{matrix}\right.$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2 - 34x + 30$

$\frac{4(x-\frac{3}{4})}{2(x-1)} \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$\frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

$72 - 102 + 30$

~~поздел.~~ при $x \in [1; 3]$: $x - 1 > 0$, $x - \frac{3}{4} > 0$

$\Rightarrow \frac{8(x-3)(x-\frac{5}{4})(x-1)}{(x-\frac{3}{4})} \leq 1$

$$\begin{array}{r} 140 \\ +\ 56 \\ \hline 196 \\ +\ 15 \\ \hline 211 \\ +\ 6 \\ \hline 217 \\ +\ 2 \\ \hline 219 \end{array}$$

$32 - 68 + 30$

-6

$\frac{5}{2} \geq 2a + b \geq 16 - 78 + 30$

$\frac{8-3}{4-2} = \frac{5}{2}$ $\quad 2{,}5 \geq 2a + b \geq -$

$3a + b + \frac{5}{2} \geq 2a + b$

$a \geq -\frac{5}{2}$

$\boxed{\frac{5}{2} \geq 2a + b \geq -6}$

$\frac{9}{4} \geq 3a + b \geq 0$

$2a + \cancel{b} + \frac{9}{4} \geq -6 + 3a + \cancel{b}$

$\boxed{a \leq \frac{9}{4} + 6 = \frac{33}{4}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30 \quad | \cdot 2x-2$

$\times \frac{16}{8}$

$4x-3 = 2(x-2)(8x^2-34x+30) = 2(8x^3 - 16x^2 - 34x^2 + 68x + 30x - 60)$

$4x-3 = 16x^3 - 100x^2 + 296x - 120$

$16x^3 - 100x^2 + 212x - 117 = 0$

17

$289 - 64 = 225 = 15^2$

$16 \cdot 2^3 - 400 + 414 - 117 \qquad 121 \qquad 1$

$4x-3 = 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 57 = 0$

$62 \times 3 = 186$

$16 \cdot 8 - 84 \cdot 4 + 248 - 57$

$42 \quad 21 \qquad 21 \times 9 = 189$

$(16-42) \cdot 8 = -8 \cdot 26$

$\frac{27}{8} \cdot 16 - \frac{84 \cdot 9}{4} + 124 \cdot \frac{3}{2} - 57$

$42 - 16 = 26 \qquad 26 \times 8 = 208 \qquad 52 \qquad 248 - 57 = 191$

$54 - 189 + 186 - 57$

$54 - 60 = -6$

$\frac{6 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 3 \geq \frac{3}{2}a + b \geq 6 - 17 \cdot 3 + 30$

$\frac{5}{2} \geq 2a + b \geq -6$

$32 - 68 + 30$

$54 \quad 64 \quad 71 \qquad -71+30 \quad -41+6 \quad -35 \qquad 62 - 68 \quad -6$

$3 \geq \frac{3}{2}a + b \geq -35$

$2a + b \geq -6$

$\frac{3}{2}a + b \leq 3$

$\frac{5}{2} \geq 2a + b$

$-a \qquad a \geq -1$

$2a + \cancel{b} + 3 \geq -6 + \frac{3}{2}a + \cancel{b}$

$\frac{3}{2}a + b \geq -35$

$\boxed{a \leq 75}$

$\frac{1}{2}a \geq -9$

$\frac{3}{2}a + \cancel{b} + \frac{5}{2} \geq 2a + \cancel{b} - 35$

$a \leq 25$

$a \geq -18$

$\frac{1}{2}a \leq \frac{5}{2} + 35 = \frac{75}{2}$

$3a \leq 75$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$225 : 15 = 15$, -15, 75, -75, 0

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-8y=4 \end{cases}$$

$225 - 144 = 81$

162

9

$4 \cdot 16$

160

144

-90

-72

$\boxed{3y-2x\geq 0}$ – ОДЗ

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$\cancel{9y^2+3y-15xy+4x^2+2x=2}$$

$$\cancel{(4y^2-8xy+4x^2)+5y^2+3y-17xy+2x-2=0}$$

$$\cancel{+5y(y-x)+3y-2xy+2x-2}$$

$$\cancel{-a(x+b)(y+c)=-axy-aby-acx-abc}$$

$$\cancel{-2xy-2by-2cx-abc}$$

$$\cancel{-2xy+3y-2cx+3c}$$

$$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$$

$$9y^2+(3-15x)y+(4x^2+2x-2)=0$$

$$D=(3-15x)^2-4\cdot 9\cdot(4x^2+2x-2)=9+225x^2-90x-144x^2-72x+72=$$

$$=81x^2-162x+81=(9x-9)^2=9^2(x-1)^2$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$y = \frac{15x-3 \pm 9(x-1)}{18} = \left[\begin{array}{l} \frac{24x-12}{18} = \frac{4x-2}{3} \\ \frac{6x+6}{18} = \frac{x+1}{3} \end{array}\right.$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$3^2 + 12 \geq \cancel{5}^2 + 4$

$27 \geq 27$

$p^{\log_m q} = q^{\log_m p}$

$64 - 6 \cdot 8 = 64 + 8 = 16$

$\log_m p^{\log_m q} = \log q \cdot \log_m p$

$3^2 - 48 \geq \cancel{16}\ 5^{-2} - 64$

$\log_4\left(\frac{5}{4}\right)$

$(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)} + 1 \geq (x^2+6x)$

-48, 9, 39

-64, 25, 39

$a = 1 \to f(1) = 0$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$a = 2;\ b = 3$

$f(ab) = f(2) + f(3) = 0$

$\boxed{f(6) = 0}$

$x^2 + 6x = p \qquad \log_4\left(\frac{3}{4}\right) = \log_4(3) - 1 = q$

$p^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)} + 1 \geq p^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$

$\log_4\left(\frac{3}{4}\right)\ p^{\log_4\left(\frac{9}{16}\right)}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\log_4\left(\frac{5}{4}\right)\ p^{\log_4\left(\frac{5}{16}\right)}$

$\frac{9}{16} + \cancel{16} \geq \frac{25}{4}$

$\log_4\left(\frac{3}{4}\right) p^{\log_4\left(\frac{3}{16}\right)} \vee \log_4\left(\frac{5}{4}\right) p^{\log_4\left(\frac{5}{16}\right)}$

$f(ab) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$

пусть $b = 4k + p$, $0 \leq p < 4$

$\log_4$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha) + \sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha)(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta)) + 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)$

$(\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha))\cos(2\beta) + (\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \sin(2\alpha)\sin(2\beta))\sin(2\beta) +$

$+\sin(2\alpha) = \cos(2\beta)\cdot\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) + \cos(2\beta)\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17} - \sin(2\alpha)$

1 сл. $\cos(2\alpha+2\beta) > 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\beta) = -\frac{8}{17} - \sin(2\alpha)$

$\cdot 17$ $\quad 289$

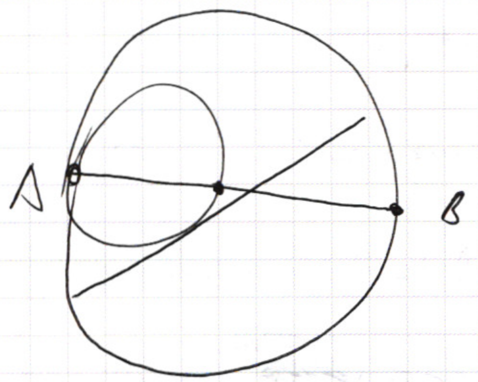
$$\begin{array}{r} 144 \\ -\ 25 \\ \hline 119 \end{array}$$

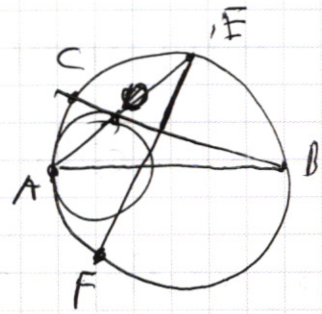
☐ черновик ☐ чистовик

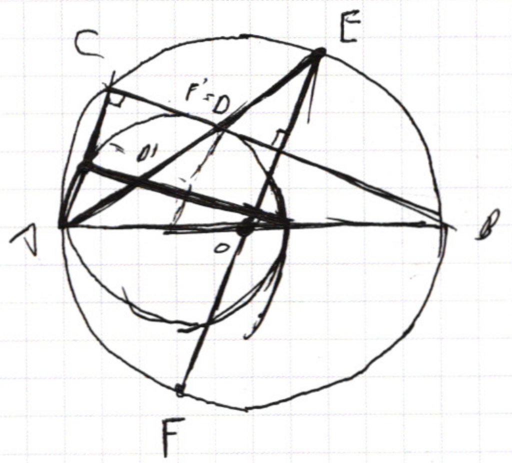
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


A
B


C
E
A
B
F


C
E
F'=D
O1
A
O
B
F

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases} \qquad x,y=?$$

Возведем (1) в квадрат:

$\boxed{\text{ОДЗ: } 3y-2x\geq 0}$

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$9y^2+(-15x+3)y+(4x^2+2x-2)=0$$ — кв. ур-ние отн. y:

$$D=(3-15x)^2-9\cdot4\cdot(4x^2+2x-2)=9-90x+225x^2-144x^2-72x+72=$$
$$=81x^2-162x+81=(9x-9)^2=9^2(x-1)^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y=\frac{15x-3\pm9(x-1)}{18}=\left[\begin{array}{l}\frac{24x-12}{18}=\frac{4x-2}{3}\\ \frac{6x+6}{18}=\frac{x+1}{3}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}3y=4x-2\\ 3y=x+1\end{array}\right.$$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}4x-2-2x=2x-2\geq0 \Rightarrow \boxed{x\geq1}\\ x+1-2x=1-x\geq0\Rightarrow\boxed{x\leq1}\end{array}\right.$

Систему можно переписать иначе:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3y=4x-2\\ x\geq1\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}\\ \begin{cases}3y=x+1\\ x\leq1\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}\end{array}\right.$$

см. сл. стр. →

1 сл $3y = 4x - 2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9}(4x-2)^2 = \frac{1}{9}(16x^2 - 16x + 4) = \frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{4}{9}$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \Rightarrow 3x^2 + 3\left(\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{4}{9}\right) - 6x - 4\left(\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 4$

$3x^2 + \frac{16}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3} - 6x - \frac{16}{3}x + \frac{8}{3} = 4 \quad | \cdot 3$

$9x^2 + 16x^2 - 16x + \cancel{4} - 18x - 16x + \cancel{8} = \cancel{12}$

$25x^2 - 50x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, но по

ОДЗ $x \geq 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$ - корень $\Rightarrow \boxed{y = 2}$

2 сл. $3y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$y^2 = \frac{1}{9}(x+1)^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \Rightarrow 3x^2 + 3\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}\right) - 6x - 4\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 4$

$\Rightarrow 3x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - 6x - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 4 \quad | \cdot 3$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 = 12$

$10x^2 - 20x - 15 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{5}$

$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 16 + 8 \cdot 3 = 16 + 24 = 40$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4} = 1 \pm \sqrt{\frac{40}{4 \cdot 4}} = 1 \pm \sqrt{\frac{10}{4}} = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$, но, по ~~ку~~ ОДЗ:

$x \leq 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}}$ - корень $\Rightarrow \boxed{y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}}$

Ответ: $(x; y)$: $(2; 2)$ $\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$ по опр. логарифма. $\Leftrightarrow x(x+6)>0$
$\Updownarrow$
$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right.$

ОДЗ
$\Rightarrow x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

Известно, что при $p, q > 0$; $m>0$, $m \neq 1$ выполняется: $p^{\log_m q} = q^{\log_m p}$

$$\Rightarrow (x^2+6x)^{\log_4 5} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} = (x^2+6x)^{\log_4 3}$$

перепишем начальное нер-во:

$$\Rightarrow \underbrace{(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)}_{\vee 0} \geq \underbrace{(x^2+6x)^{\log_4 5}}_{\vee 0} \Rightarrow \text{~~прологарифмируем~~}$$

пусть $p = x^2+6x > 0$

$$p^{\log_4 3} + p \geq p^{\log_4(5)} \Leftrightarrow \underbrace{p^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)} + 1}_{f(p)} \geq \underbrace{p^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}}_{g(p)}$$

Сравним производные $f'(p)$ и $g'(p)$

При каких p $f'(p) \geq g'(p)$?

$$f'(p) = (p^{\log_4(\frac{3}{4})+1})' = \log_4(\tfrac{3}{4})\, p^{\log_4(\frac{3}{16})}$$

$$g'(p) = p^{\log_4(\frac{5}{4})} = \log_4(\tfrac{5}{4})\, p^{\log_4(\frac{5}{16})}$$

$$\log_4(\tfrac{3}{4})\, p^{\log_4(\frac{3}{16})} \geq \log_4(\tfrac{5}{4})\, p^{\log_4(\frac{5}{16})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_4(\frac{3}{4})}{\log_4(\frac{5}{4})} \geq p^{\log_4(\frac{5}{16}) - \log_4(\frac{3}{16})} = p^{\log_4(\frac{5}{3})}$$

$$\underset{(\text{т.к. } p>0)}{0 \leq} p^{\log_4(\frac{5}{3})} \leq \frac{\log_4(\frac{3}{4})}{\log_4(\frac{5}{4})} \underset{(\text{т.к. } \log_4(\frac{3}{4})<0)}{<0} \quad 0<\alpha<0 \Rightarrow \alpha \in \varnothing$$

$$\Rightarrow g'(p) > f'(p) \quad \forall p \geq 0$$

$\Rightarrow$ корень $p^{\log_4(3)} + p = p^{\log_4(5)}$ максимум 1 (либо вообще 0)

подставим $p = 16 = 4^2$

$$4^{2\log_4(3)} + 16 = 3^2 + 16 = 25 = 16^{\log_4(5)} = p^{\log_4(5)} \Rightarrow \boxed{p = 16 \text{ — корень}}$$

при этом при $p = 4$:

$3 + 4 = 7 \geq 5$ $\Rightarrow$ усл. задачи вып. ; то есть $\boxed{0 \leq p \leq 16 \text{ — корни}}$

данного нер-ва.

Обратная замена:

$$0 \leq x^2 + 6x \leq 16$$

$$x^2 + 6x - 16 \leq 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 16 = 36 + 64 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -8 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{-8 \leq x \leq 2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Чему равно $f(x)$ при $3 \leq x \leq 27$?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

x	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

$f(ab)=f(a)+f(b)$ пусть $a=1$ $\Rightarrow f(b)=f(1)+f(b) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$

Заполним табл. для простых чисел

$f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(12)=f(8)+f(3)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$; $f(20)=f(10)+f(2)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$; $f(24)=f(12)+f(2)=0$; $f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$; $f(27)=f(3)+f(9)=0$

Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\left(f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)\right)+\left(f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$

$=2f\left(\frac{x}{y}\right)+\left(f(y)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=-f\left(\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow$ при $y=1$ $\Rightarrow f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \Rightarrow$ знаем $f\left(\frac{1}{x}\right)$ при $1 \leq x \leq 27$. Заполним таблицу $\left(f\left(\frac{1}{x}\right), x\right)$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(y)$	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	-2	0	-3	-1	-1	0	-4

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	-4	-1	-1	-2	-5	0	-2	-3	0

пусть $3 \le x \le 27$, $3 \le y \le 27$ $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. надо найти кол-во пар (x, y) : $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$

1 сл.

при $f(x) = 0 \Rightarrow f(y) \ge 1$

($3 \le x \le 27$ по табл. 10 возможн. знач. x) (по табл. 14 возможн. знач. y) $\Rightarrow$ $\boxed{+(10 \cdot 14) \text{ к ответу}}$

2 сл.

при $f(x) = 1 \Rightarrow f(y) \ge 2$

(по табл. 7 знач. x) (по табл. 8 возможн. знач. y) $\Rightarrow$ $\boxed{+(7 \cdot 8) \text{ к ответу}}$

3 сл. при $f(x) = 2 \Rightarrow f(y) \ge 3$

(3 знач.) (5 знач.) $\Rightarrow$ $\boxed{+(3 \cdot 5) \text{ к ответу}}$

4 сл. при $f(x) = 3 \Rightarrow f(y) \ge 4$

(2 знач.) (3 знач.) $\Rightarrow$ $\boxed{+(2 \cdot 3) \text{ к ответу}}$

5 сл. при $f(x) = 4 \Rightarrow f(y) \ge 5$

(2 знач.) (1 знач.) $\Rightarrow$ $\boxed{+2 \text{ к ответу}}$

6 сл. при $f(x) = 5 \Rightarrow f(y) \ge 6$

(1 знач.) (0 знач.) $\Rightarrow$ $\boxed{+0 \text{ к ответу}}$

Ответ: Итого: $10 \cdot 14 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 =$
$= \boxed{219}$ пар (x, y)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

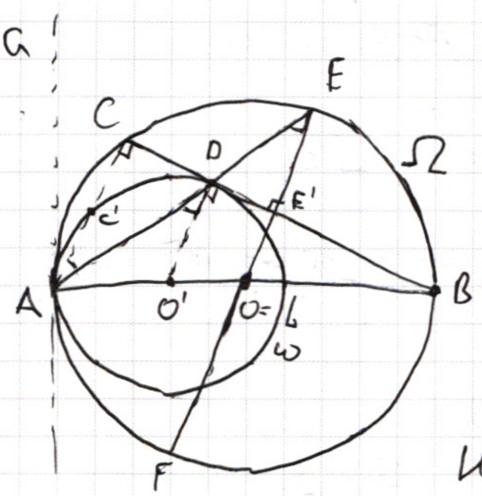
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть a - кас. к Ω в т. A

$\Rightarrow a \perp AB$.

также a-кас. к ω в т. A, и $AB \perp a \Rightarrow$

$\Rightarrow AB$: O' (центр ω) $\in AB$

$O \in AB$ (центр Ω)

заметим, что если $k = \frac{R_\Omega}{R_\omega}$, то:

$H_A^k(O') = O$; $H_A^k(C') = C$; $\boxed{H_A^k(D) = E}$ (*)

EE' - перп. из E на BC; $EE' \perp BC \perp DO' \Rightarrow EE' \parallel DO' \Rightarrow \angle ADO' = \angle AEE'$

(т.к. BC - кас. к ω в т. D)

Пусть $\{L\} = (EE') \cap (AB) \Rightarrow \angle LAE = \angle O'AD \Rightarrow \triangle ADO'$ и $\triangle AEL$ - подобные

причем $\frac{EA}{AD} = k = \frac{LA}{AO'} = \frac{R_\Omega}{R_\omega} \Rightarrow LA = R_\Omega \Rightarrow \boxed{L = O}$

$EO = LE \perp BC$ - хорде Ω $\Rightarrow E'C = E'B$

$E'C = CD + DE' = BD - DE' = BE' \Rightarrow DE' = \frac{1}{2}(BD - CD) = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{2}\right) =$

$= \boxed{2 = DE'}$

Также $\triangle ACD \sim \triangle DEE'$ ($\angle EDE' = \angle CDA$; $\angle EE'D = 90^\circ = \angle ACD$)

(т.к. $\angle C$ опир. на AB - диаметр Ω)

$\Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{DE'}{CD} = \frac{2}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{4}{5} \Rightarrow ED = AE - DA = \frac{4}{5} DA$

$AE = \frac{9}{5} AD$, где $\frac{AE}{AD} = \frac{R_\Omega}{R_\omega} = \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{R_\Omega = \frac{9}{5} R_\omega}$

Из подобия $\triangle BO'D$ и $\triangle BAC$ ($\angle B$ - общ.; $\angle D = \angle C = 90^\circ$):

$\frac{DO'}{O'B} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}R_\omega}{2R_\Omega - R_\omega} = \frac{AC}{2R_\Omega} \Rightarrow AC = \frac{2R_\omega \cdot \frac{9}{5} R_\omega}{2 \cdot \frac{9}{5} R_\omega - R_\omega} = \frac{\left(\frac{18}{5}\right)}{\left(\frac{18-5}{5}\right)} R_\omega = \boxed{\frac{18}{13} R_\omega}$

см. сл. стр. ⟶

по Т. Пифагора: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2R_\Omega)^2 - \left(\frac{18}{13}R_\omega\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(2\cdot\frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{18}{13}\right)^2}\, R_\omega = \sqrt{\frac{4\cdot 9^2}{5^2} - \frac{18^2}{13^2}}\, R_\omega = \sqrt{\frac{18^2\cdot 13^2 - 18^2\cdot 5^2}{5^2\cdot 13^2}}\, R_\omega =$

$= \frac{18}{5\cdot 13}\cdot 12\, R_\omega = \frac{12\cdot 18}{5\cdot 13} R_\omega = \frac{18}{2} = CD + DB$

$\frac{12}{5\cdot 13} R_\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow R_\omega = \frac{5\cdot 13}{12\cdot 2} = \boxed{\frac{65}{24}}$ - радиус ω

$R_\Omega = \frac{9}{5}\cdot R_\omega = \frac{9\cdot 13}{12\cdot 2} = \boxed{\frac{117}{24}}$ - радиус Ω

$\angle EAF = 90^\circ$, т.к. FE - диаметр Ω ~~AE~~ и $\angle A$ опир. на диаметр.

$\Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \angle AEF = 90^\circ - \angle CAD$

где $tg(\angle CAD) = \frac{CD}{AC} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{18}{13}R_\omega} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{18}{13}\cdot\frac{5\cdot 13}{12\cdot 2}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = 90^\circ - arctg\left(\frac{2}{3}\right)}$ или же $\boxed{\angle AFE = arctg\left(\frac{3}{2}\right)}$

(что одно и то же.)

~~$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF$, где~~ $\frac{AD}{DE} = \frac{5}{4}$; произв. хорд: $AD\cdot DE = CD \cdot DB = \frac{5\cdot 13}{4}$

$AD = \frac{5}{4} DE \Rightarrow \frac{5}{4} DE^2 = \frac{5}{4}\cdot 13 \Rightarrow DE = \sqrt{13}$; $AD = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

$\Rightarrow \boxed{AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}}$

При этом $AF \cdot tg(\angle AFE) = AE$, где $tg(\angle AFE) = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} AF = AE \Rightarrow AF = \frac{2}{3} AE$

$\Rightarrow S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot\frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}\cdot AE^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{9^2}{4^2}\cdot 13 = \frac{9\cdot 3}{16}\cdot 13 =$

$= \frac{27\cdot 13}{16} = \boxed{\frac{351}{16}}$ $\Rightarrow$ Ответ: $R_\omega = \frac{65}{24}$; $R_\Omega = \frac{117}{24}$; $\angle AFE = arctg\left(\frac{3}{2}\right)$; $S_{AFE} = \frac{351}{16}$

#

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\underbrace{\frac{4x-3}{2x-2}}_{g(x)} \geq ax+b \geq \underbrace{8x^2-34x+30}_{f(x)}$

Построим гр-ки $g(x)$ и $f(x)$:

$f(x) = 8x^2-34x+30$

корни: $x = \frac{5}{4}$; $x=3$

вершина: $x_0 = \frac{17}{8}$

значение: $-6 - \frac{1}{8} = y$

$f(1) = 4$

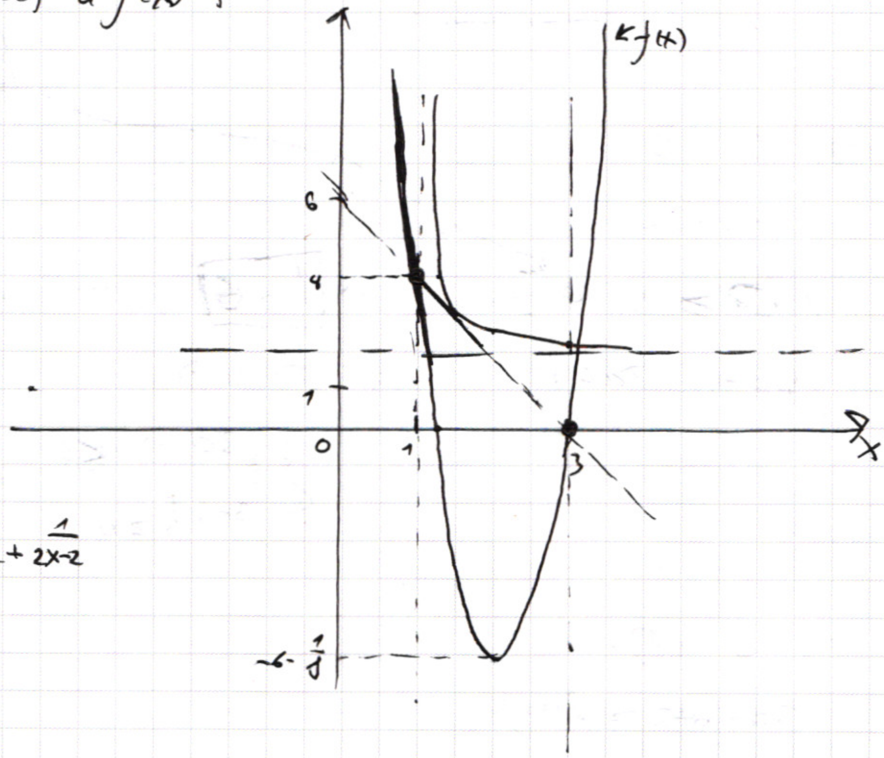
$f(3) = 0$

$g(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

асимптоты: $y=2$
$x=1$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(x) = \infty$

$g(3) = 2 + \frac{1}{4}$



Заметим, что максимальное знач. a является -2

~~иначе: $\left[\begin{array}{l} 3a+b \geq f(3) \\ 1\cdot a + b < f(1) \end{array}\right.$~~

~~Также $b_{min} =$~~

См. сл. стр. →

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

по усл.: $3a+b \geq f(3) = 0$

① $\boxed{3a+b \geq 0}$

$1 \cdot a + b \geq f(1) = 4$

② $\boxed{a+b \geq 4}$

$\frac{3}{2} \cdot a + b \leq g(\frac{3}{2}) = 3$

③ $\boxed{\frac{3}{2}a+b \leq 3}$

~~из ② и ③:~~

из ② и ③:

$3 \geq \frac{3}{2}a + b$

$+$

$a+b \geq 4$

$\Downarrow$

$a+\cancel{b}+3 \geq 4+\frac{3}{2}a+\cancel{b}$

$\frac{1}{2}a \leq -1$

$\boxed{a \leq -2}$ (**)

из ① и ②:

$4a+2b \geq 4$

$2b \geq 4-4a \geq 12 \Rightarrow \boxed{b \geq 6}$

также: из ③ и ①:

$\begin{cases} 3a+2b \leq 6 \\ 3a+b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3a+b+6 \geq 3a+2b$

$\Downarrow$

$\boxed{b \leq 6}$

$\boxed{b=6}$ - 1 ответ

из ① и ③:

$3a+\cancel{b}+3 \geq \frac{3}{2}a+\cancel{b}$

$\frac{3}{2}a \geq -3$

$\boxed{a \geq -2}$ (***)

из (**) и (***): $a=-2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } (a,b) = (-2,6)}$

очев $-2x+6 \geq f(x)$ при $x \in [1;3]$ (см. гр-к и способ задания a и b)

~~при~~ $-2x+6 \leq \frac{4x-3}{2x-2}$? т.к. $x>1$:

$(-2x+6)(2x-2) = -4x^2+12x+4x-12 = -4x^2+16x-12 \leq 4x-3$?

$-4x^2+12x-9 \leq 0$ на отрезке $(1;3]$ $\Rightarrow$ $\boxed{a=-2,\ b=6 \text{ подходит}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

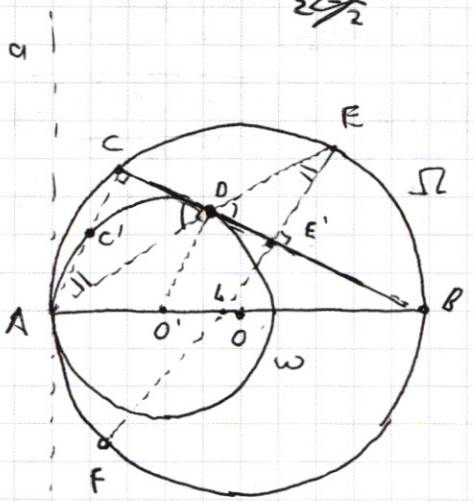
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

~~$\frac{5}{2}+\frac{4}{2}$~~ ~~$\frac{13}{2}-\frac{4}{2}$~~



заметим, что если a - кас. к Ω в т. A, то $AB \perp a$. Также a - кас. к ω в т. $A \Rightarrow$
$\Rightarrow O'$ (центр ω) $\in AB$ (как и O)

Пусть $k = \frac{R_\Omega}{R_\omega}$ тогда $H_A^k(O') = O$

$H_A^k(C) = B$

(*) $\boxed{H_A^k(D) = E}$

EE' - перп. из E на BC

$EE' \perp BC \perp O'D \Rightarrow EE' \parallel O'D \Rightarrow \angle ADO' = \angle AEE'$

(т.к. CB-кас. к ω в т. D)

Пусть $\{L\} = (EE') \cap (AB)$ тогда $\angle EAL = \angle DAO' \Rightarrow \triangle AEL \sim \triangle ADO'$ по 3 углам, причем коэф. подобия (из (*)) составляет k

$\Rightarrow \frac{LA}{O'A} = \frac{R_\Omega}{R_\omega} = \frac{LA}{R_\omega} \Rightarrow LA = R_\Omega \Rightarrow \boxed{L = O}$

т.е.: $EO \perp BC$ - хорде $\Omega \Rightarrow CE' = E'B$, где $CD + DE' = CE'$; $BD - DE' = BE'$

$CD + DE' = BD - DE'$, где, по усл.: $CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2} \Rightarrow DE' = \frac{1}{2}(BD - CD) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}\right) =$

$= \boxed{\frac{1}{4} = DE'}$

заметим, что $\angle ACD = 90°$, т.к. опир. на AB - диаметр Ω.

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle DEE'$ по 2 углам ($90°$ и вертикальные $\angle EDE'$ и $\angle ADC$)

причем коэф. подобия равен $\frac{DE'}{CD} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \boxed{\frac{1}{10}}$, также $\frac{EA}{DA} = \frac{R_\Omega}{R_\omega} = \frac{DA + DE}{DA} =$

$= \frac{DA + \frac{1}{10} DA}{DA} = \frac{\frac{11}{10}}{1} = \frac{11}{10} = \frac{R_\Omega}{R_\omega} \Rightarrow \boxed{R_\Omega = \frac{11}{10} R_\omega}$

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle O'BD$ (т.к. $DO' \parallel AC$; $AB \parallel O'B$; $BD \parallel CB$)

: $\frac{O'D}{O'B} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{R_\omega}{2R_\Omega - R_\omega} = \frac{AC}{2R_\Omega} \Rightarrow AC = \frac{2\cdot R_\omega \cdot \frac{17}{10}R_\omega}{2\cdot \frac{17}{10}R_\omega - R_\omega} =$

$= \frac{\frac{17}{5}R_\omega}{\frac{17}{5}-1} = \boxed{\frac{17}{12}R_\omega} = AC$

по т. Пифагора: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2R_\Omega)^2 - \left(\frac{17}{12}R_\omega\right)^2} =$

$= R_\omega\sqrt{\left(2\cdot\frac{17}{10}\right)^2 - \left(\frac{17}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{17^2}{25} - \frac{17^2}{12^2}}\,R_\omega = \frac{\sqrt{17^2\cdot 12^2 - 17^2\cdot 5^2}}{5\cdot 12}R_\omega =$

$= \frac{17}{5\cdot 12}\cdot\sqrt{12^2-5^2}\,R_\omega = \boxed{\frac{17\sqrt{119}}{60}R_\omega}$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$