МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Задача 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) : 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 & (\mathrm{I}) \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha$ (из I)

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$ (из II)

1) $\sin 2\alpha = 0$ $\cos 2\alpha = -1$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ не определён

2) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-4/5}{1+3/5} = -\frac{1}{2}$

(2) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot -\frac{1}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 & (\mathrm{I}) \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha + 1$ (из I)

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$ (из II)

1) $\sin 2\alpha = 0$ $\cos 2\alpha = 1$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 0$

2) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-4/5}{-3/5+1} = -2$

Поскольку сказано, что $\operatorname{tg}\alpha$ принимает ≥ 3 значения, все эти значения достигаются и не требуют проверки

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0, -\frac{1}{2}, -2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

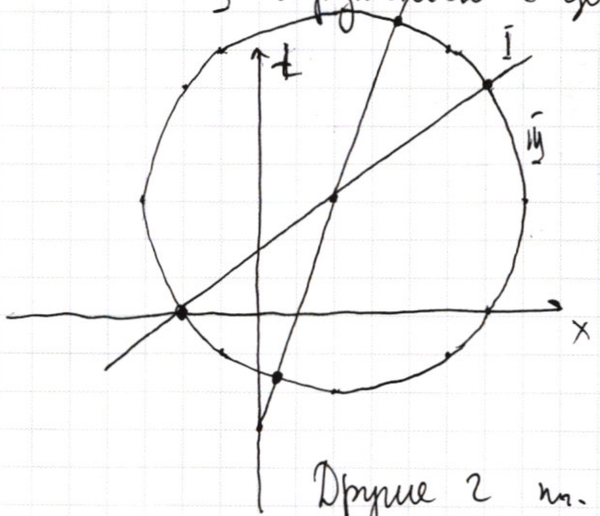
② $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ Ограничение: $xy-x-2y+2\geq 0$

~~На~~ Учитывая ограничения (корни мы не теряем, могут быть будут лишние)

$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow (x-4y+2)(x-y-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} y=\frac{x+2}{4} & (\text{I}) \\ y=x-1 & (\text{II}) \end{array}\right. \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \quad (\text{III}) \end{cases}$

$3y=t$. Тогда I и II прямые $t=\frac{3(x+2)}{4}$ и $t=3x-3$, а III - окружность с центром $(2;3)$ и радиусом 5.



Две точки пересечения мы сразу понимаем из графиков:

$x=-2$ $t=0$ $y=0$

(Не подх, т.к. $x-2y=-2=\sqrt{\dots}$)

$x=6$ $t=6$ $y=2$

(~~полагая~~ подходит, все знаки соблюдаются)

Другие 2 т. пересечения:

$\begin{cases} y=x-1 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-2)^2+(3x-6)^2=25$

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$

$x_{1,2}=+2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_{1,2}=x_{1,2}-1=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x_1-2y_1=2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0$. Не подходит.

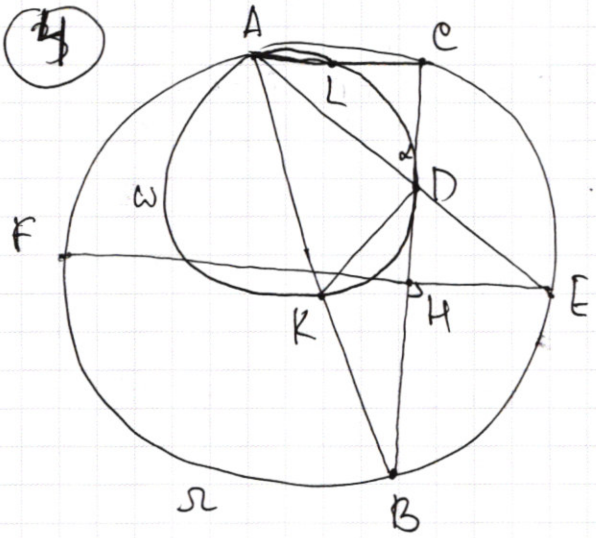
$\begin{cases} x_2-2y_2=2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}>0 \\ x_2y_2-x_2-2y_2+2=(2-\frac{\sqrt{10}}{2})(1-\frac{\sqrt{10}}{2})-2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}+2= \\ =-\frac{3\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{4}+\frac{3\sqrt{10}}{2}>0 \text{ подходит.} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x=6 \quad y=2$

$x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \quad y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

4



$BD=17$
$CD=8$

Степень т. B отн. ω: $BD^2=BK\cdot AB=17^2$

Степень т. C отн. ω: $CL\cdot CA=CD^2=8^2$

$KL\parallel BC$, т.к. при гомотетии в т. A, переводящей $\omega\to\Omega$, $KL\to BC$.

$\Rightarrow \frac{CL}{CA}=\frac{BK}{BA}$

$\angle ACB=90$ т.к. AB - диаметр $\Rightarrow AB^2=BC^2+AC^2$

$\Rightarrow AB^2-CA^2=25^2$

$$\begin{cases} CL\cdot CA=8^2 & (I) \\ BK\cdot BA=17^2 & (II) \\ \frac{CL}{CA}=\frac{BK}{BA} & (III) \\ AB^2-CA^2=25^2 & (IV) \end{cases}$$

$\frac{8^2}{CA^2}=\frac{17^2}{BA^2}$ (из I II III)

$\Downarrow$

$\frac{8^2}{CA^2}=\frac{17^2}{25^2+CA^2}$ (из IV)

$\Rightarrow 17^2\cdot CA^2=(8\cdot 25)^2+8^2CA^2$

$CA^2=\frac{(8\cdot25)^2}{17^2-8^2}=\frac{(8\cdot25)^2}{15^2}$

$AB^2=25^2+CA^2=25^2\left(1+\frac{8^2}{15^2}\right)=25^2\frac{17^2}{15^2}$

$\Rightarrow AB=\frac{25\cdot17}{15}=\frac{5\cdot17}{3}$ = диаметр Ω $\Rightarrow R_\Omega=\frac{5\cdot17}{6}=\frac{85}{6}$

диаметр ω = AK (т.к. центр Ω ∈ AB, A ∈ AB ⇒ центр ω ∈ AB, т.к. Ω и ω касаются)

$AK=BA-BK=BA-\frac{17^2}{BA}=\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)17=\frac{16}{15}\cdot17$

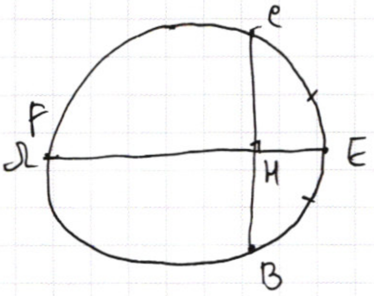
$\Rightarrow R_\omega=\frac{AK}{2}=\frac{8\cdot17}{15}=\frac{136}{15}$

$\angle CAD=90-\alpha$; $\angle ADC=\angle AKD=\alpha$, т.к. $\angle ADC$ - угол между касат. и хордой AD.

$\Rightarrow \angle CAD=\angle KAD=90-\alpha$ (т.к. AK - диаметр)

$\Rightarrow$ ~~все~~ E - середина дуги ∪CB (не вкл. F), т.к. впис. углы $\angle BAE$ и $\angle EAC$ равны.

=> У нас есть хорда CB, сер. дуги, и перпендикуляр у неё



=> EF – диаметр, т.к. EF – серпер к BC.

$\triangle$: $AC \parallel EF$, т.к. $AC \perp BC$ (AB – диаметр)

=> ACEF – равноб. трапеция

=> $\triangle ECF = \triangle FAE$.

$S(ECF) = CH \cdot EF/2 = \frac{CB \cdot EF}{4} = \frac{D_\Omega \cdot 25}{4} = \frac{5 \cdot 17 \cdot 25}{3 \cdot 4} =$

$= \frac{125 \cdot 17}{12} = S(AEF)$

$\angle AFE = \angle CEF = \frac{1}{2}\angle CEB$. $\angle CEB > 90$, т.к. $\angle CEB = 180 - \angle BAC$

симметрия отн. EF. $\angle BAC < 90$, т.к. $\angle ACB = 90°$

$\frac{CB}{\sin\angle CEB} = EF$. (т. Синусов)

=> $\sin\angle CEB = \frac{CB}{EF} = \frac{25 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{15}{17}$

$\angle CEB = 180° - \arcsin\frac{15}{17}$ (т.к. arcsin определен от $-90°$ до $90°$)

$\angle CEF = \frac{1}{2}\angle CEB = 90° - \frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17} = \angle AFE$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$ $R_\omega = \frac{136}{15}$

$S_{AEF} = \frac{125 \cdot 17}{12}$

$\angle AFE = 90° - \frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}$.

Это не конец, есть ещё страницы!!!

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Ограничение (ОДЗ): $x^2+18x>0$

~~На~~ При этом условии модуль раскрывается однозначно. Далее действия происходят на ОДЗ.

$5=12^{\log_{12}5}$ (запишем основание 1го слагаемого так и затем возведем в степень $\log_{12}(x^2+18x)$)

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

Заменим $x^2+18x=t>0$.

$t \geq t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

~~$t \geq t(t^{\log}$~~

Заменим t на $12^{\log_{12}t}$, и запишем основания 5, 12 и 13

$12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}-5^{\log_{12}t}$

$12^{\log_{12}t}+5^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$\log_{12}t=z$

$12^2\cdot12^{z-2}+5^2\cdot5^{z-2} \geq (12^2+5^2)13^{z-2}=12^2\cdot13^{z-2}+5^2\cdot13^{z-2}$

При $z-2>0$ $\quad 12^{z-2}<13^{z-2}$, $5^{z-2}<13^{z-2}$ $\Rightarrow$ левая часть < правой части, т.к. каждое слагаемое <

При $z-2<0$ $\quad 12^{z-2}>13^{z-2}$, $5^{z-2}>13^{z-2}$ $\Rightarrow$ левая часть > правой. т.к. каждое слагаемое >.

При $z-2=0$ равенство.

$\Rightarrow z-2\leq0$

$\log_{12}t\leq2 \qquad t\leq12^2=x^2+18x$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq144 \end{cases}$ $\quad -18 \quad 0 \quad (x+9)^2\leq225 \quad -24 \quad 6$

Ответ: ~~$x \notin [-24; -\frac{1}{18}$~~

$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\Rightarrow f(1 \cdot a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Выпишем все значения f для $1, 2 \ldots 24$.

a	f(a)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$

$f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$.

Исходя из этого, раскладывая на простые, мы считаем значения.

Посмотрим, в скольких упорядоченных парах $(x; y)$ ~~в~~ $f(x) = f(y)$

У нас 11 нулей ($f = 0$), т.е. пар, когда $f = 0$, 11^2.

7 единичек, т.е. 7^2 пар, когда $f = 1$.

2 двойки — 2^2 пар

1 тройка 1 пара

2 четверки 4 пары

1 пятерка 1 пара.

$\Rightarrow$ всего пар, когда $f(x) = f(y)$, будет

$11^2 + 7^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 = 121 + 49 + 8 + 2 = 180$

Остальные пары, в которых $f(x) \neq f(y)$, делятся на пары $f(t_1) > f(t_2)$

$f(t_2) < f(t_1)$,

т.е. среди оставшихся пар половина где $f(x) > f(y)$, а другая половина $f(y) > f(x)$.

всего пар 24^2, равенство в 180 $\Rightarrow$ знак $<$ в

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{24^2 - 180}{2}$ парах

Это равно $(576-180):2 = 198$

Ответ: 198 пар.

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$tg\,\alpha = ?$

$\Rightarrow 2\cos(2\beta) = \frac{4}{5} : \frac{1}{\sqrt5} = \frac{4\sqrt5}{5}$

$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\cos(2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{4\cdot5}{25}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta =$

$= 1)\ \sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} + \cos2\alpha\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1$ ~~$\sin2\alpha = -1-\cos$~~

$\cos2\alpha = -1-2\sin2\alpha$

$2\cdot\frac{4}{5}-1$

$\sin^2 2\alpha + (1+2\sin2\alpha)^2 = 1$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

~~$\sin2\alpha(1+4\sin2\alpha)=0$~~

~~$\sin2\alpha = 0 \quad \cos2\alpha = -1$~~

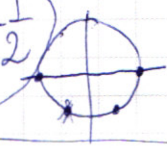
$\sin2\alpha = -\frac{1}{4}$ $\cos2\alpha =$

$\sin2\alpha(5\sin2\alpha+4) = 0$ небыв

$\sin2\alpha = 0 \quad \cos2\alpha = -1$

$\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \cos2\alpha = \frac{3}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{-4/5}{8/5} = -\frac{1}{2}$



2) $2\sin2\alpha - \cos2\alpha = -1$

$\cos2\alpha = 2\sin2\alpha+1$

$\sin^2 2\alpha + (1+2\sin2\alpha)^2 = 1$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin2\alpha = 0$

$\sin2\alpha = 0 \quad \cos2\alpha = 1$

$\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \cos2\alpha = -\frac{3}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{0}{1+1} = 0$

$tg\,\alpha = \frac{-4/5}{2/5} = -2$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$

ОДЗ: $xy-x-2y+2 \geq 0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$

$4+9$

$|3y-3| = 4$ $y = \frac{7}{3}$ $3-3y=4$ $-\frac{1}{3}$

На ОДЗ

$-4xy+x^2+4y^2 = xy-x-2y+2$ $\qquad x^2+4y^2-5xy+x+2y-2$

$(x+4y+2)(x-y-1)$ $\qquad (x-4y+2)(x-y-1)=0$

x^2+4y^2-2-xy $\qquad y = \frac{x+2}{4} \qquad y = x-1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta} =$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

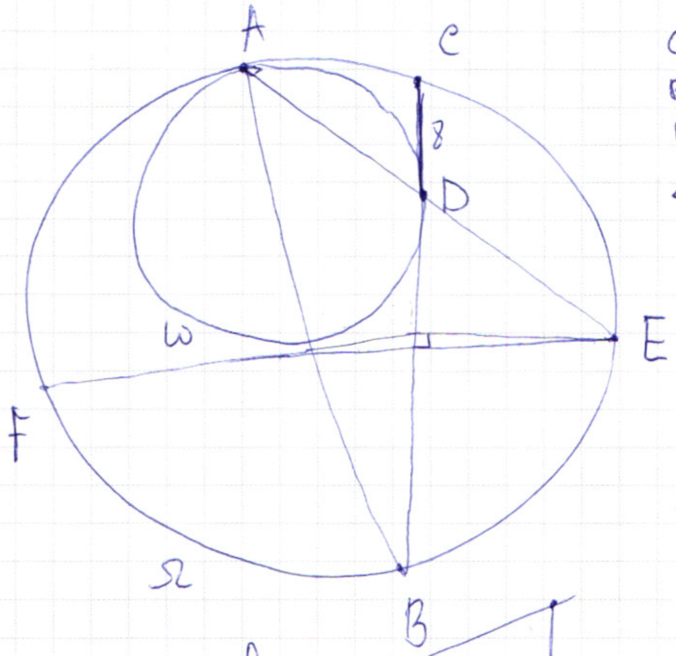
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



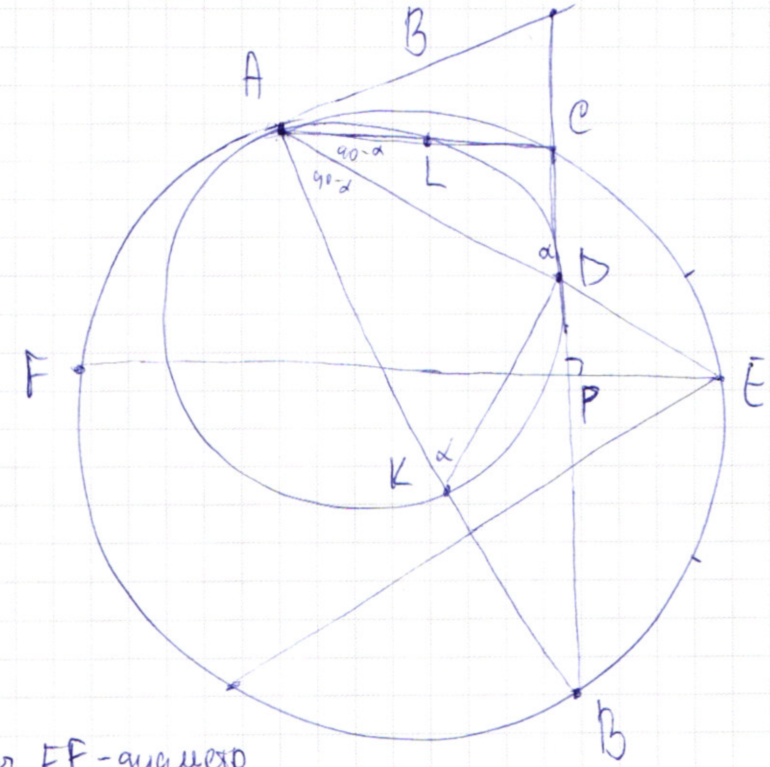
$CD = 8$

$BD = 17$

$R,\ r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S(AFE) - ?$



$AC \parallel EF$

$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC}$

$\frac{CL}{CA} = \frac{BK}{BA}$

$CL \cdot CA = 8^2$

$BK \cdot BA = 17^2$

$CL = \frac{64}{CA}$

$BK = \frac{17^2}{BA}$

$\frac{64}{CA^2} = \frac{17^2}{BA^2}$

$\frac{8}{CA} = \frac{17}{AB}$

$AB^2 - CA^2 = 25^2$

$\frac{8^2}{CA^2} = \frac{17^2}{25^2 + CA^2}$

$17^2 \cdot CA^2 = 8^2 \cdot 25^2 + 8^2 CA^2$

$CA^2 = \frac{8^2 \cdot 25^2}{17^2 - 8^2}$

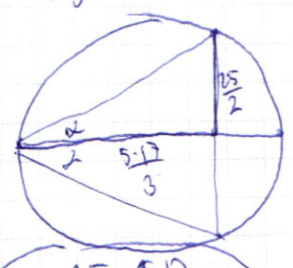
$CA = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$

$AB^2 = 25^2 + \frac{8^2 \cdot 25^2}{15^2} = 25^2\left(\frac{15^2 + 8^2}{15^2}\right) = \frac{25^2 \cdot 17^2}{15^2}$

$AB = \frac{25 \cdot 17}{15} = \frac{5 \cdot 17}{3}$

2) EF - диаметр

$CB = 25$



$S = \frac{25 \cdot 5 \cdot 17}{12}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg} \frac{25}{2 \cdot 5 \cdot 17}$

$\frac{25}{\sin 2\alpha} = D$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{D} = \frac{25 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{15}{17}$

$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17}$

$BK \cdot BA = 17^2$

$BK = \frac{17^2 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{17 \cdot 3}{5}$

$AK = BA - BK = \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)17 = \frac{16 \cdot 17}{15}$

$\frac{25}{15} - \frac{9}{15}$

$R = \frac{5 \cdot 17}{6} \quad r = \frac{16 \cdot 17}{30}$

$17 \times 8 = 136$

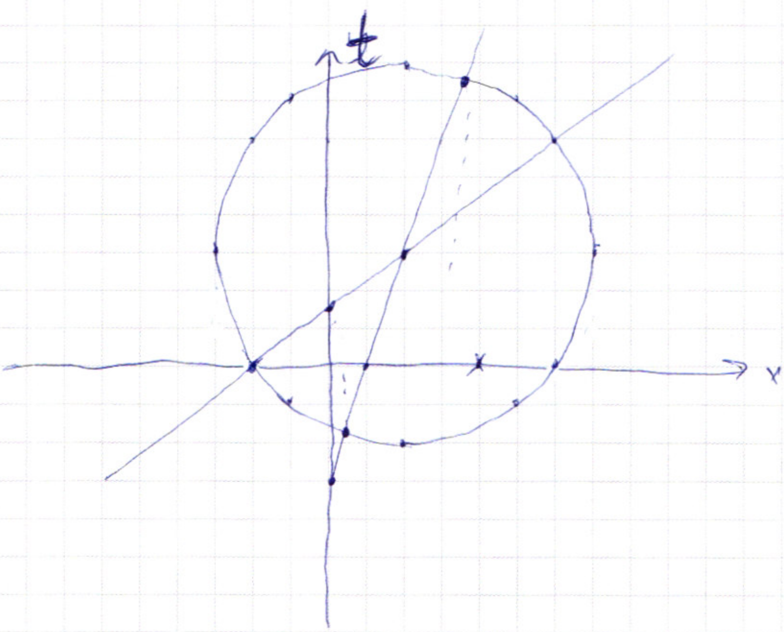
$17 \times 17 = 289$

$25 \cdot 9$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~3y=t~~ $3y=t$

$3y=\frac{3(x+2)}{4}$

$t=\frac{3x+6}{4}$ $x=0$ $t=\frac{3}{2}$ $x=2$ $t=3$

$t=3x-3$ $x=0$ $t=-3$

36+4

$(x-2)^2+(3x-3)^2=25$

64 −24 40

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$

~~(2x-1)(x-3)~~

$D=64-4\cdot6=40=4\cdot10$

$x_{1,2}=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{4}=2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y=x-1=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x-2y=2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0$ не подх.

$2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}$ подх.

не подх под ОДЗ
$-2-0$.

~~x=0~~ $x=-2$ $y=0$ $=2+2-0+2=\sqrt{2}$

$x=6$ $y=2$. $6-4=2$ подх

Ответ: $x=6$ $y=2$
$x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$
$y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$12-6-4+2=$
$=4$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ для рацион.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$1 \le x \le 24$
$1 \le y \le 24$

$f(x/y) < 0$

$f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$

$f\left(\frac{a}{a}\right) = 0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f(pq) = f(p) + f(q) = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{q}{4}\right]$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left[\frac{p}{4}\right] - \left[\frac{q}{4}\right]$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}{q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}}\right) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots - \left(\beta_1\left[\frac{q_1}{4}\right] + \ldots\right) < 0$

2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

$f(x) < f(y)$

$f(x) = f(y)$

5	7
17	19
5	5·2

нули сколько

1	0	✓	
2	0	✓	
3	0	✓	
4	0	✓	
5	1	✓	
6	0	✓	
7	1	✓	
8	0	✓	
9	0	✓	11^2
10	1	✓	7^2
11	2	✓	2^2
12	0	✓	
13	3		1
14	1	✓	1
15	1	✓	1
16	0	✓	
17	4		
18	0	✓	11+7+2
19	4		
20	1	✓	
21	1	✓	
22	2	✓	
23	5		
24	0	✓	

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ -180 \\ \hline 396 \end{array} \quad \Big| \, 2$$

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 2 \\ \hline 390 \end{array}$$

170
+ 7

$\times 198$
2

$$\begin{array}{r} 11 \\ +7 \\ +5 \\ \hline 23 \end{array}$$

$400 - 4 = 396$
$$\begin{array}{r} 396 \\ +180 \\ \hline 576 \end{array}$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x > 0$ $\quad x(x+18)$

$x \in (-\infty; -\frac{1}{18}); (0; +\infty)$

$12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12}(x^2+18x)}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2 \geq$

$x^2+18x \geq -(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = t > 0$

$t \geq t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5}$

$t \geq t(t^{\log_{12}13-1} - 1)$ $\quad t>0$ поэтому

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \leq 1$

степень

$h^f - h^g \Leftrightarrow (f-g)(h-1)$

$(\log_{12}\frac{13}{12})(t-1) \leq 0$

$t-1 \leq 0$

$t \leq 1$

$2(\log_{12}13 + \log_{12}5)$

$\log_{12}13^2$

$t = 12^{\log_{12}t}$

$t^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}t}$

$\begin{cases} x^2+18x > 0 \\ x^2+18x \leq 1 \end{cases}$

$x^2+18x-1 \leq 0$

$(x+9)^2 \leq 82$

$|x+9| \leq \sqrt{82}$

$x \leq \sqrt{82}-9$

$x \geq -\sqrt{82}-9$

$-x-9 \leq \sqrt{82}$

$x \geq -\sqrt{82}-9$

$x \in [-\sqrt{82}-9; -\frac{1}{18}) \cup (0; \sqrt{82}-9]$

$144 - 81 = 43$ $\quad 144 + 81 = 225$

$12^{\log_{12}t} + 5^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$a^x + b^x - c^x$

$(12^2+5^2)^{\frac{1}{2}\log_{12}t}$

$12^2+5^2 = 13^2$

$a^k + b^k \geq (a+b)^k$

$x+9 \leq 15$ $\quad x \leq 6$

$-x-9 \leq 15$ $\quad x \geq -24$

$\frac{1}{13} < \frac{1}{5}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)