МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x - x^2$

$10x - x^2 = t$

$\Downarrow$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

При $t=9$ достигается рав-во

$9 + 9^{\log_3 4} = 9 + 16 = 25$

$9^{\log_3 5} = 5^2 = 25$

$t = 10x - x^2 \Rightarrow t_{наиб}$ при $x_0 = \frac{-10}{2\cdot(-1)} = 1$

$t_{наиб} = 10\cdot 1 - 1 = 9$

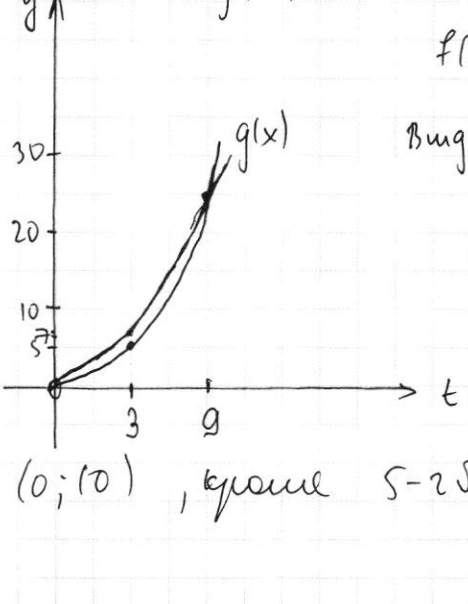
$t_{наим}$ при $x \to 0$, $t \to 0$.

$\Downarrow$

$t \in (0;9]$

Построим график ф-ции

$y = t + t^{\log_3 4}$ ($f(x)$) и $y = t^{\log_3 5}$ ($g(x)$) схематично



Ответ: $(0;10)$, кроме $5-2\sqrt{6}$

ОДЗ

$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 & (1) \\ |x^2-10x| \neq 1 & (2) \end{cases}$

(1) $10x - x^2 > 0$

$x(10-x) > 0$

0 10

$x \in (0;10)$

(2) $|x^2 - 10x| \neq 1 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 10x \neq 1)$ | с учётом $|x^2-10x| = 10x - x^2$

$10x - x^2 \neq 1$

$x^2 - 10x + 1 \neq 0$

$x^2 - 10x + 1 = 0$

$D = 100 - 4 = 96$

$x = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24} =$

$= 5 \pm 2\sqrt{6}$

$x \in (0;10)$, кроме $x = 5 - 2\sqrt{6}$

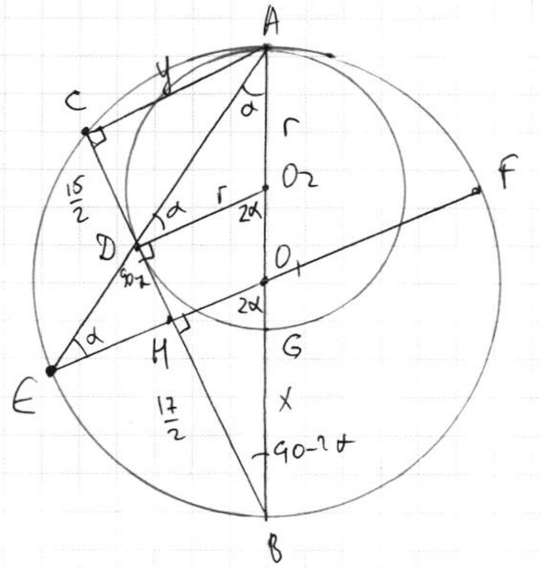
$f(3) = 3 + 3^{\log_3 4} = 7$

Видно, что $f(x) > g(x)$ при

$t \in (0;9] \Rightarrow$ подходят все x уд. ОДЗ $\Rightarrow$

$x \in (0;10)$, кроме $x = 5 - 2\sqrt{6}$

4)



1) пусть $\angle AEF = \alpha$

$O_2D \perp BC$ (как радиус к кас.), $EF \perp BC$ $\Rightarrow O_2D \parallel EF \Rightarrow \angle ADO_2 = \angle AEF = \alpha$

$\triangle DO_2A$ - р/б $\Rightarrow \angle EAB = \alpha$.

Из $\triangle EDH$: $\angle EDH = 90 - \alpha$

$$\frac{\smile AC + \smile EB}{2} = 90 - \alpha$$

⇓

$\smile AC = 180 - 2\alpha - 2\alpha = 180 - 4\alpha \Rightarrow$

$\angle CBA = 90 - 2\alpha$ (как впис.)

⇓

Из $\triangle HO_1B$: $\angle HKB = 2\alpha$, где $EF \cap AB = K$. Но

$\angle EO_1B = 2\alpha$ (как центральный)

⇓

т.к. $O_1 \in AB$, $K \in AB$

⇓

$\left[O_1 \equiv K \right]$

2) пусть $BG = x$, $AC = y$, r и R - радиусы ω и Ω.

~~По т.~~ $AB = 2R = x + 2r$ (1)

По т. кас. и секущей:

$BD^2 = BG \cdot BA$

⇓

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = x \cdot 2R$ (2)

$\angle ACB = 90$ (опир. на диам.)

⇓

у подобие $\triangle BCA$ и $\triangle BDO_2$ (по 2-м углам):

$$\frac{17}{2\left(\frac{17}{2} + \frac{15}{2}\right)} = \frac{r}{y} = \frac{x+r}{2R}$$

⇓

$$\frac{17}{32} = \frac{r}{y} = \frac{x+r}{2R}$$

⇓

$y = \frac{32r}{17}$ (3) $\quad 34R = 32x + 32r$ (4) $\Rightarrow 17R = 16x + 16r$

по т. Пифагора для $\triangle BCA$:

$4R^2 = \cancel{BC}^2 + y^2$ (5)

⇓

$$\begin{cases} 2R = x + 2r & (1) \\ 17R = 16x + 16r & (2) \\ y = \frac{32r}{17} & (3) \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = x \cdot 2R & (4) \\ 4R^2 = 16^2 + y^2 & (5) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 32R = 16x + 32r \\ 17R = 16x + 16r \end{vmatrix} \Rightarrow 15R = 16r \Rightarrow r = \frac{15}{16}R$ (1')

Из (3) и (5): $4R^2 = 16^2 + \frac{32^2 r^2}{17^2} \Rightarrow$ с уч. (1')

$$4R^2 = 16^2 + \frac{32^2}{17^2} \cdot \frac{15^2 R^2}{16^2}$$

⇓

$$4R^2 = 16^2 + \frac{15^2}{17^2} 4R^2$$

⇓

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R^2\, 4\left(1-\frac{15^2}{17^2}\right)=16^2$

$R^2\, 4\,\frac{(\overset{2}{17-15})(\overset{32}{17+15})}{17^2}=16^2$

$R^2\cdot\frac{4\cdot 64}{17^2}=16^2$, $R>0$

$R\cdot\frac{2\cdot 8}{17}=16$

$\Downarrow$

$\boxed{R=17}$

$\Downarrow$

$\left(r=\frac{15}{16}\cdot 17=\cancel{\frac{665}{16}}\ \frac{255}{16}\right)$

Из (3): $y=AC=\frac{32}{17}r=\frac{\overset{2}{\cancel{32}}}{\cancel{17}}\cdot\frac{15\cdot\cancel{17}}{\cancel{16}}=30$

Из $\triangle BCA$: $\angle BAC=2\alpha \Rightarrow tg2\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}\Rightarrow \cos2\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2 2\alpha}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8^2}{15^2}}}=\sqrt{\frac{15^2}{289}}=\frac{15}{17}$ (угол 2α - острый)

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{\overset{16}{32}}{2\cdot17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow\left(\angle AFE=\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$AF=2R=2\cdot17$

$\angle AED=90^\circ$ (т.к. $\angle AEB$ опир. на диаметр.)

$\Downarrow$

Из $\triangle EAB$: $AE=2R\cdot\cos\alpha=2\cdot17\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$

$S_{AFE}=\frac12 EF\cdot EA\sin\alpha=\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\cdot17\cdot\frac{2\cdot17\cdot4}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}=17\cdot8=136$

Ответ: $R=17$; $r=\frac{255}{16}$; $\angle AFE=\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{AFG}=136$.

6) $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ $\qquad h(x) = ax+b$

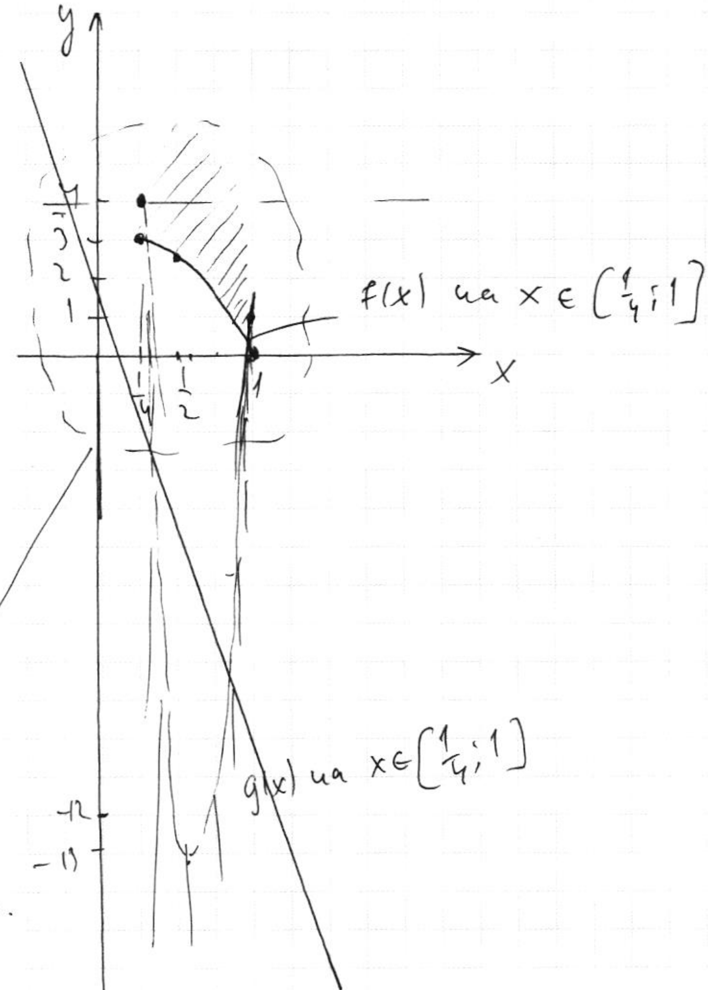
$g(x) = -32x^2 + 36x - 7$

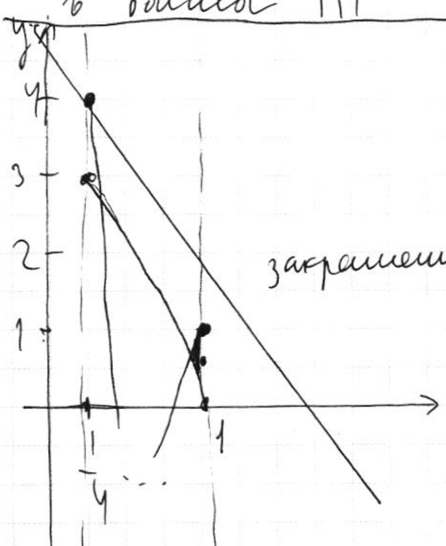
$x_b = \frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$\cancel{g\left(\frac{9}{16}\right) = -17\frac{1}{3}}$

$h(x) \geq f(x)$ => прямая $h(x)$ полностью на $\left[\frac{1}{4};1\right]$ должна располаг. в заш. /// области

$h(x) \leq g(x)$ => прямая $h(x)$ должна на $\left[\frac{1}{4};1\right]$ полностью располагаться в област ///



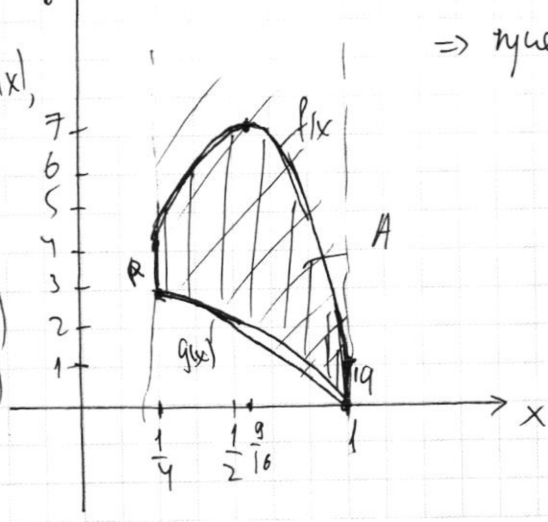


закрашенная часть.

$g\left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{32\cdot 81}{16\cdot 168} + \frac{36\cdot 9}{168} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = 10\frac{1}{8} - 3 = 7\frac{1}{8}$

Т.к. при каком-то значении $h(x) = f(x)$, то возможны 2 варианта.

1) начало прямой в $\left(\frac{1}{4};4\right)$
2) конец прямой в $(1;1)$ (на $\left[\frac{1}{4};1\right]$)



=> прямая $ax+b$ полностью должна лежать в A

⇓

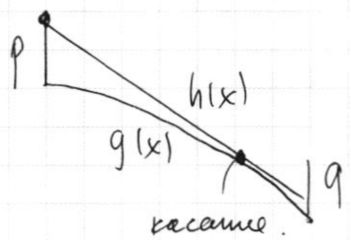
начало прямой на прямом отрезке f, а конец на g.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При этом должно выполняться $h(x) = g(x)$ в облас. ну точек. $\Rightarrow$

1) вариант.



$a\cdot\frac{1}{4} + b = 4 \Rightarrow a + 4b = 16$, видно, что $a<0,\ b>0$

касание, т.е. ур-е.

$ax+b = -32x^2+36x-3$ имеет 1 реш-е.

$32x^2 + x(a-36) + b+3 = 0$ $\quad D=0.$

$D = a^2 - 2\cdot 36a + 36^2 - 4\cdot 32\cdot(b+3) = 0$

$a^2 - 2\cdot 36a + 36^2 - 4\cdot 32\left(4 - \frac{a}{4} + 3\right) = 0$

$a^2 - 2\cdot 36a + 36^2 - 32\cdot 28 + 32\cdot a = 0$

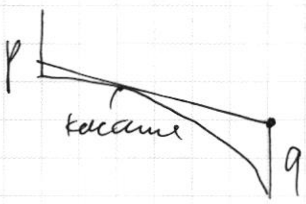
$a^2 - 44a + 36^2 - 32\cdot 28 = 0$

~~$a = 44$~~ $\quad D = 44^2 - 4\cdot(36^2 - 32\cdot 28) =$
$= 4^2\cdot 11^2 - 4\cdot 36\cdot 36 + 4\cdot 32\cdot 28 =$
$= 4^2(121 - 324 + 224) = 4^2\cdot 21$

$a = \frac{44 - 4\sqrt{21}}{2} = 22 - 2\sqrt{21}$

$b = 4 - \frac{a}{4} = 4 - \frac{22-2\sqrt{21}}{4} =$
$= \frac{16 - 22 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{2\sqrt{21} - 6}{4} = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$

2) вариант.



$a + b = 1$, $a<0$
касание $\Rightarrow$, $b>0$

$ax + b = -32x^2 + 36x - 3$
$D = 0$

$D = a^2 - 2\cdot 36a + 36^2 - 4\cdot 32(1 - a + 3) =$
$= a^2 - 2\cdot 36a + 36^2 - 4\cdot 32\cdot 4 + 4\cdot 32a =$
$= a^2 - 56a + 36^2 - 4\cdot 32\cdot 4 = 0$

$D = 7^2\cdot 8^2 - 4\cdot 36^2 + 4\cdot 4\cdot 4\cdot 32 =$
$= 4^2(49\cdot 4 - 324 + 32\cdot 4) = 4^2\cdot 0$

$a = \frac{56}{2} = 28 > 0 \Rightarrow$ противоречие с $a<0$

Ответ: $\left(22 - 2\sqrt{21};\ \frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)$

1) $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$
$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$
$= 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta +$
$+ \sin 2\beta\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha + 2\beta) = 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$
с уч. первого ур-е.

$\cancel{2}\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt5}$

В первое: $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}$. $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\pm 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 - \sin 2\alpha$

$-1-\sin 2\alpha = -1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = -(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = -(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \Rightarrow$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \pm 2(\cos\alpha - \sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha \pm 2(\cos\alpha-\sin\alpha)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha+\cos\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha,\ \cos\alpha\neq 0 \\ \sin\alpha+\cos\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha=0 \\ \sin\alpha+\cos\alpha-2\cos\alpha+2\sin\alpha=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ -\sin\alpha + 3\cos\alpha = 0 \\ 3\sin\alpha - \cos\alpha = 0 \end{array}\right. \Big| :\cos\alpha \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$ тк значений не менее трёх все ид.

Ответ: $-1;\ 3;\ \frac{1}{3}$

2) $x^2+36y^2-12x-36y=45 \qquad (x-6)(2y-1) = 2xy - x - 12y + 6$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \quad x-12y>0$

$x^2-24xy+144y^2-2xy+12y+x-6=0$

$(x-6)^2+12x-36+(12y-6)^2+144y-36-26xy+12y+x-6=0$

$(x-6)^2+(12y-6)^2-26xy+13x+156y-78=0$

$\begin{array}{l} x-6=u \\ 2y-1=v \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u^2+9v^2=90 \\ u^2+36v^2-13vu=0 \end{array}\right. \Rightarrow 27v^2-13vu+90=0$

$u = \frac{27v^2+90}{13v}$

$uv = 2xy-x-12y+6$

$\Downarrow$

$-13uv = -26xy+13x+156y-78$

$\Downarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{9(3v^2+10)}{13v}\right)^2 + 9v^2 = 90$$

$$\frac{9(3v^2+10)^2}{169v^2} + v^2 = 10 \quad \Big| \cdot 169v^2$$

$$9(9v^4+60v^2+100) + 169v^4 = 1690v^2$$

$$81v^4 - 540v^2 + 900 + 169v^4 - 1690v^2 = 0$$

$$250v^4 - 2230v^2 + 900 = 0$$

$$25v^4 - 223v^2 + 90 = 0$$

$$D = 223^2 - 4 \cdot 25 \cdot 90 = 49759 - 9000 = 40759$$

$$v^2 = \frac{223 \pm \sqrt{40759}}{50}$$

$$81v^4 + 540v^2 + 900 + 169v^4 - 1690v^2 = 0$$

$$250v^4 - 1150 + 900 = 0$$

$$25v^4 - 115v^2 + 90 = 0$$

$$5v^4 - 23v^2 + 18 = 0$$

$$D = 529 - 4 \cdot 5 \cdot 18 = 529 - 360 = 169$$

$$\cancel{v = \frac{-23 \pm 13}{2 \cdot 5}} = \left[\begin{array}{l} -\frac{36}{10} \\ \frac{36}{10} \end{array}\right.$$

$$v^2 = \frac{23 \pm 13}{10} = \left[\begin{array}{l} \frac{36}{10} \\ 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v = \pm\frac{6}{\sqrt{10}} \\ v = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = 1 \\ u = \frac{27+90}{13} = \frac{117}{13} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -1 \\ u = \frac{27+90}{-13} = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{6}{\sqrt{10}} \\ u = \dfrac{\frac{27 \cdot 36}{100} + 90}{13 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ u\left(\pm\frac{6}{\sqrt{10}}\right) \end{cases}$$

не уд. т.к. $v > 0$

$$\begin{cases} v = 1 \Rightarrow (x-6)^2 = 1 \\ u = 9 \Rightarrow (2y-1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-6 = 1 \\ x-6 = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2y-1 = 3 \\ 2y-1 = -1 \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

тр-ка

$x - 12y > 0$

$x = 7$: $7 - 12 \cdot 2 < 0$; $7 - 12 \cdot (-1) > 0$

$x = 5$: $5 - 12 \cdot 2 < 0$; $5 - 12 \cdot (-1) > 0$ $\Rightarrow \left[\ (7; -1)\quad (5; -1)\ \right.$

$v = -1$

$u = -9$ – не уд. т.к. $u > 0$, $v > 0$

$$\begin{cases} v = \frac{6}{\sqrt{10}} \\ u = \dfrac{\frac{27 \cdot 36}{25 \cdot 80 \cdot 100} + 90}{13 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}} = \dfrac{\frac{243}{25} + 90}{13 \frac{6}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}(243 + 225)}{25 \cdot 13 \cdot 6} = \frac{\sqrt{10} \cdot 468}{25 \cdot 13 \cdot 6} = \frac{\sqrt{10}}{25} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (x-6)^2 = \frac{6}{\sqrt{10}} \\ (2y-1)^2 = \frac{\sqrt{10}}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 6 = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} \\ 2y - 1 = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

~~$x = 6 \pm \sqrt{6} \cdot \sqrt{\sqrt{10}}$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} \\ y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10} \end{cases}$$

Пр-ка $x - 12y = 6 \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} - 12\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10}\right) =$

$= 6 \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} - 6 \pm \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10} = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} \pm \frac{12\sqrt{\sqrt{10}}}{10} \Rightarrow$

$\left(6 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10}\right)$

1 реш-е.

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} \vee \frac{6\sqrt{\sqrt{10}}}{5}$

$\frac{36}{100} \vee \frac{36 \cdot 10}{25 \cdot 25}$

$\frac{4}{10} \vee \frac{10}{25 \cdot 25}$

$\frac{1}{10} \vee \frac{1}{625/2}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{10} > \frac{1}{625/2}$

$\Downarrow$

$\left(6 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10}\right)$ – реш-е.

Ответ: $(7; -1)$; $(5; -1)$

$\left(6 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\sqrt{10}}} ; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\sqrt{10}}}{10}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$\sin 2\alpha =$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 2\cos 2\alpha$

$=$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\alpha =$
$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

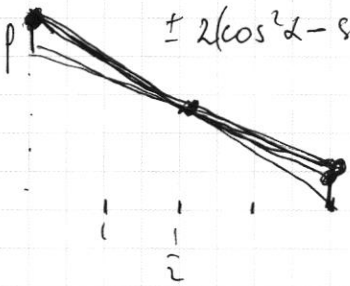
6, 3, 4 $\quad 36 \cdot \cancel{36} \cdot \cancel{x}$ 9

$\pm 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 - \sin 2\alpha$

$(a;b) \quad -1-\sin 2\alpha$

64

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



$\cancel{1-\frac{9}{4}}$

$-1 - 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \cancel{\frac{4-9}{4}} \cdot x \cdot 12 \quad \times 32 \quad = -\sin$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$7 - \frac{9}{4} = \frac{28-9}{4}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$36 \times 9 = 324$ $\quad 28 \times 8 = 224$

36×36 $\quad 6 \cdot 8$ $\quad 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta$

$76 - 32 = 44$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

$36 \times 9 = 324$ $\quad 27$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 + 1$

$4 \cdot 11$

$36 \times 2 = 72$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot$
$\cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta 4 \cdot$

$36 \times 9 = 74$ $\quad 32 \times 4 = 128$, $128 - 72 = 56$

$2\sin 2\alpha \cos 2\beta \cdot \cos 2\beta +$
$+ 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$32 \times 7 = 224$

$4 \cdot 36 \cdot 36 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot$
$4 \cdot 9 \quad 4 \cdot 9$

$= 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha)$

$49 \times 4 = 196$

$=$

$32 \times 4 = 128$, $128 + 196 = 324$, $324 - 324 = 0$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha$

$\sin$

$tg 2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{\cancel{\sqrt{5}}} \pm \frac{\cos 2\alpha}{\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

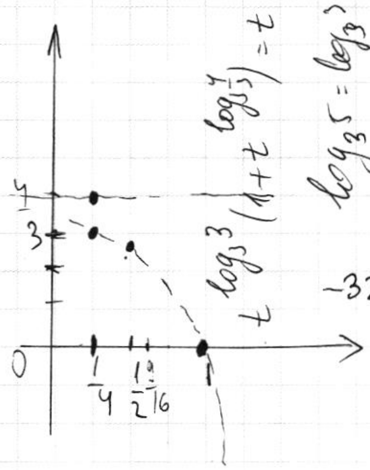
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} = t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3}(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) = t^{\log_3 5}$

$\log_3 4 - \log_3 3 = \log_3 \frac{4}{3}$



$t^{\log_3 3}(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) = t^{\log_3 4}$

$\log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 \frac{5}{3}$

$-32.$

$4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{-4}{-4}$

$4 + \frac{4}{4\cdot 1-5}$

$4(4x-5)+4 \quad 4-5=-1$

$4 + \frac{4}{-1} = 0$

$4 + \frac{4}{4x-5}$

$16 \cdot \frac{1}{4} - 16 = -8$

$4 \cdot \frac{1}{4} - 5 = -4$

$x = \frac{1}{4}.$

$4 + \frac{4}{4\cdot\frac{1}{4}-5} = 0$

$-32x^2+36x-3 \quad 4 + \frac{4}{4\cdot 2-5}$

$-32+36-3=$

$=1$

$\frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{18}{32} = \frac{1}{2}$

$4 + \frac{4}{2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}-5} = 4 + \frac{4}{3} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

$t \neq 0$

$t^{\beta-1} = t^{\alpha-1} + 1$

$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t \leq 0$

$-32x^2+36x-3$

$\frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$-\frac{32\cdot 9\cdot 9}{16\cdot 16\cdot 8} + \frac{36\cdot 9}{16\cdot 4} - 3 =$

$= -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 =$

$= \frac{-81+162-24}{8} = \frac{129}{8} =$

$-\frac{81}{8} = 3 = -10\frac{1}{8} - 3 = -13\frac{1}{8}$

$t + t^{\log_3 4}$

$t + t^{\alpha} = t^{\beta}$

$t + t^{\alpha} - t^{\beta} = 0$

$t(1 + t^{\alpha-1} - t^{\beta-1}) = 0$

$-\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = 0$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$(0;9)$

$\log_3(5\cdot\frac{4}{5})$

$t^{\log_3 5 + \log_3 \frac{4}{5}} =$

$t + t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 5} \cdot t^{\log_3 \frac{4}{5}} - t^{\log_3 5} = 0$

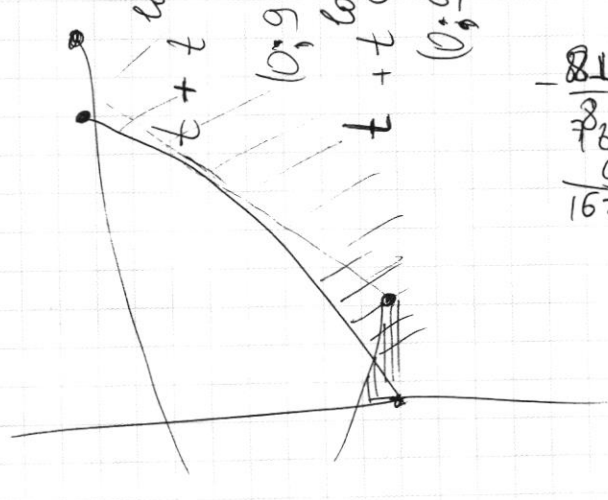
$t^{\log_3 5}(t^{\log_3 \frac{4}{5}} - 1) = 0$

$t + t^{\log_3 5}$

$(0;9)$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$(0;9)$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

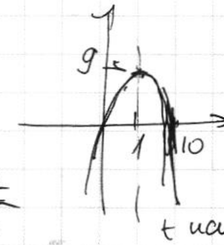
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)$ $\quad \boxed{t\in(0;9)}$ $\quad 10x-x^2>0$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$



$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

t наим. $=0$.

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta)+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{2}{5}$ $\quad t$наим.

$10\cdot10-10\cdot10=0$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$96 \mid 4$, -8, 16, 24

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)$

$\le 24\le 25$

6

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{5}$

$\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}=\frac{1}{5}$

$\frac{2}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=1-\cos(4\alpha+4\beta)$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+\cos 4\alpha\cos 4\beta-\sin 4\alpha\sin 4\beta=1$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\ge x^2+5^{\log_3 10x-x^2}$

$5^{\log_3 10}$ max $\quad t+t^{\log_3 4}\ge 5^{\log_3 t}$

t - возр. $\quad \log_3 4>1$

$5^{\log_3 ⓪}$ $\quad \log_3 t$ - возр. $\quad 5$

$10x-x^2-$

$\log_5(t+t^{\log_3 4})\ge\log_5 5^{\log_3 t}$

$\frac{-10}{2\cdot(-5)}=1$ $\quad \log_5(t+t^{\log_3 4})\ge\log_3 t$

$10x-x^2=\underline{9}$ $\quad \boxed{t\text{ наиб.}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t \in (0; 9]$ $\quad$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 255 \end{array}$ $\quad t \quad$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$ $\quad t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

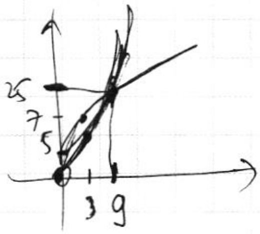
$5^{\log_3 9}$ $\quad 1 + t^{\log_3 4} \cdot \ln 3 - t^{\log_3 5} \ln 3 \geq 0$

$5^{\log_3 9}$ $\quad 1 + t^{\log_3 4} \cdot \ln 3 - t^{\log_3 5} \ln 3 = 0$

$9 + 9^{\log_3 4} \geq 5^2 = 25$ $\quad t \in (0; 9]$

$9 + 3^{\log_3 16}$

$t + t^{\log_3 4}$ $\quad 9 + 16 \geq 25$ $\quad t \to 0$ $\quad 0 < t^{\log_3 t} \leq 25$



$15^2 = 225$ $\quad \begin{array}{r} 225 \\ + 64 \\ \hline 289 \end{array}$ $\quad t+$

$1 + t^{\log_3 4} \ln 3 > t^{\log_3 5} \ln 3$

$3 + 3^{\log_3 4}$ $\quad \begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\quad 5^{\log_3 3}$ $\quad \frac{1}{\ln 3} + t^{\log_3 4} > t^{\log_3 5}$

$3 + 4 = 7$ $\quad 5$

$32 = \frac{16 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2}{16 \cdot 16}$

$3 + 3$

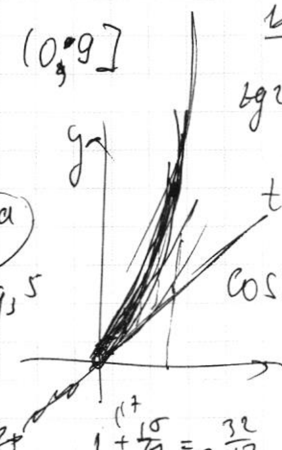
$7 \geq 5$ $\quad 4^2 = 16$ $\quad t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$ $\quad \sin\alpha$ $\quad tg^2\alpha$

$5^{\log_3 t} = \frac{1}{\log}$ $\quad t\ (0; 9]$ $\quad \cancel{1 - \cos\alpha}$

$t = 9$ $\quad tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\frac{30}{2 \cdot 17}$ $\quad \frac{15}{17}$

$5^{\log_3 t}$ $\quad t^{\log_3 5}$ $\quad x^a$

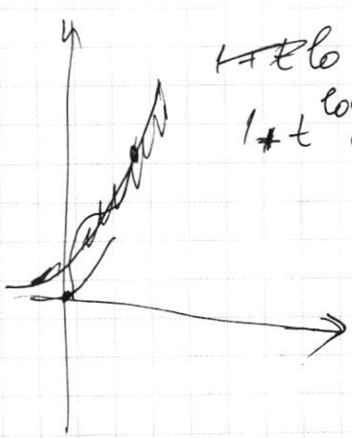


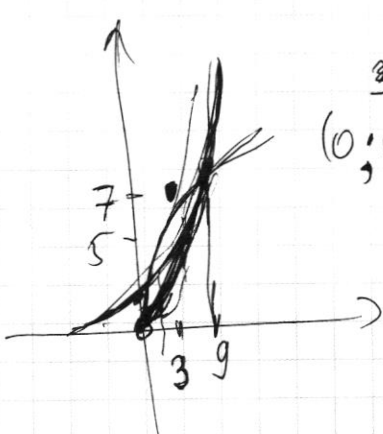
$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ $\quad 9 + 9^{\log_3 4} \geq 9^{\log_3 5}$ $\quad \cos 2\alpha$ $\quad \begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$1 + \frac{15}{17} = \frac{32}{17} = 2 \cdot \frac{16}{17}$

$1 + t \log$

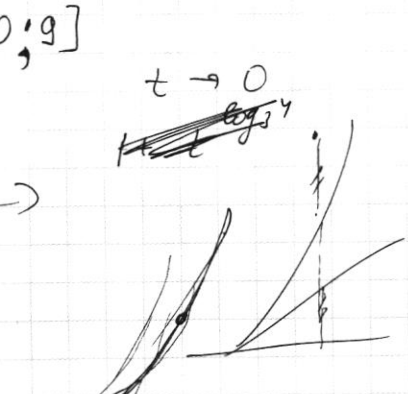
$1 + t^{\log_3}$ $\quad (0; 9]$





$t \to 0$

$\cancel{1 + t^{\log_3 4}}$



$t + t^{\log_3 4}$

$\log_t (t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 5$

$\log_t t\,(1 + t^{\log_3 4 - 1})$ $\quad 1 + \log_t (1 + t^{le}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

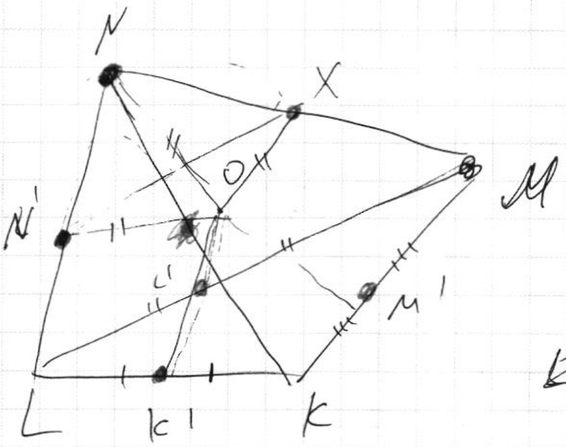
$x + 12y > 0$

$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$36y^2 - 36y - 45 =$

$= 36\left(y^2 - y - \frac{5}{4}\right)$

$\frac{45}{36} = \frac{5}{4}$ $D = 1 + 4 \cdot \frac{5}{4}$



$\angle K'$

~~$LN' \cdot LN = LK' \cdot LK$~~

$\frac{1}{2} LN^2$

$x^2 - 24xy + y^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0$

$x^2 - 26xy + y^2 + 12y + x - 6 = 0$

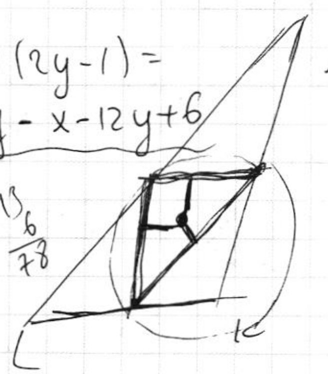
$(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$

$(x-6)^2 + 13x +$

$uv =$

$= (x-6)(2y-1) =$

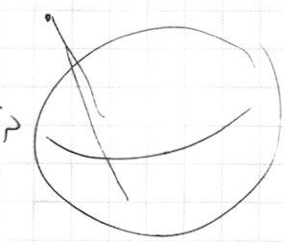
$= 2xy - x - 12y + 6$



$27v^2 - 13v^2 = -9$

$27v^2 - 13v^2 = 90$

$v = 27$



$2y - 1 \div 2$

$y - \frac{1}{2}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$1 - \cos(4\alpha + 4\beta) = \frac{2}{5}$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$u^2 + 9v^2 = 90$

$y^2 - \quad 6(2y-1)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \cos(4\alpha + 4\beta) - 1$

$\sqrt{144y^2 + 12y}$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 4\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$12 \cdot 6 = 72$ 144 $36 = 6 \cdot 2 =$ $12^2 y^2$

$(x-6)^2 - 36 + \cancel{36y^2} - 3 \quad (6y-3)^2 - 9 = 45$ $36 + 36 + 6 = 78$

$72 \quad (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \quad (12y-6)^2$

$13 \cdot 6 = 78$

$x^2 - 24xy + y^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0$

$\cancel{x^2 - 26} \quad (x-6)^2 + 13x - 36 - 26xy + \cancel{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2} (12y-6)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

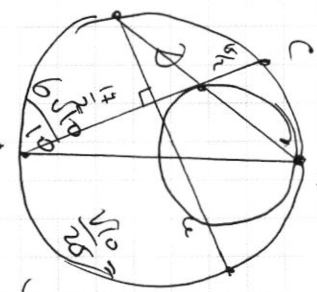
$4R^2 = 16^2 + CA^2$

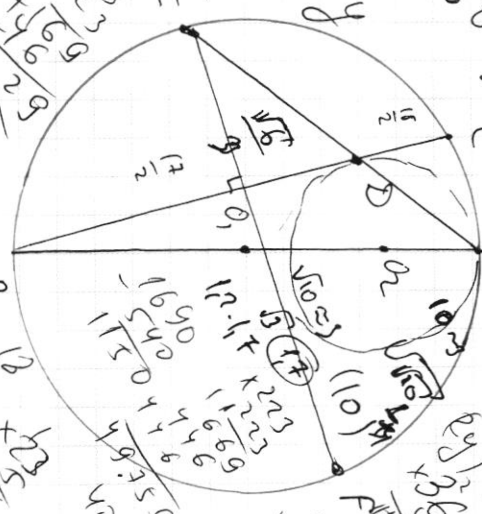
$CA = 2R \cdot \sin(90-2\alpha) = 2R\cos 2\alpha$

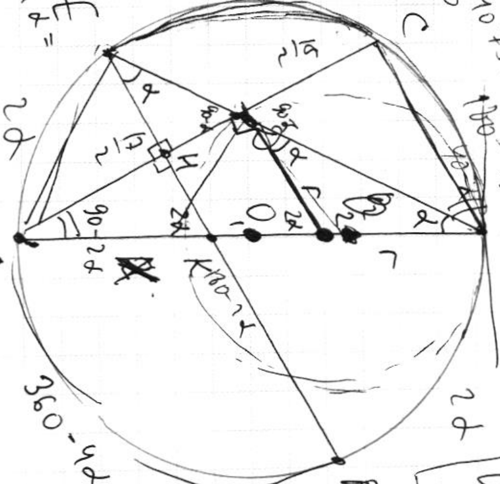
$4R^2 = 16^2 + CA^2$

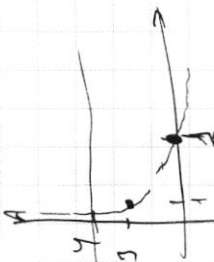
$27v^2 - 13vu = -90$

$\boxed{u = \frac{27v^2+90}{13}}$









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)