МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Leftrightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (\sqrt{1-\cos^2 2\beta}) \\ \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \quad (-\sqrt{1-\cos^2 2\beta}) \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}) \\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \quad (\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}) \end{array}\right.$;

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = \frac{16}{17} \\ \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{16}{17} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$ (1) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\in Z \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -1}$

(2) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \frac{8}{17} & (2.1) \\ \cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{8}{17} & (2.2) \end{array}\right.$

(2.1) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{34}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{25}{34}$

$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{25} \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = \pm\frac{3}{5}}$ $\quad$ (2.2) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{25}{34}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{34}$

$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{25}{9} \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = \pm\frac{5}{3}}$ $\quad$ Ответ: $tg\,\alpha = \{-1; -\frac{5}{3}; -\frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}\}$.

№2

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $\quad 9x^2-18x+9+y^2-12y+36-45=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$ $\quad$ ОДЗ: $xy-6x-y+6 \geq 0$ $\quad y(x-1)-6(x-1)\geq 0$ $\quad (x-1)(y-6)\geq 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 6 \end{cases} \end{array}\right.; y\geq 6x$

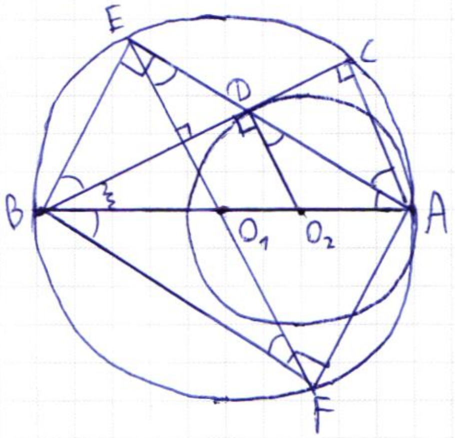
$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 + y(1-13x) + 36x^2 - 6x - 6 = 0$ $\quad D = 169x^2 - 26x + 1 - 144x^2 + 24x + 24 = 25x^2 - 2x + 25 \geq 0,$ при любом x

$y = \frac{\pm\sqrt{25x^2-2x+25} + 13x - 1}{2}$

См. график на следующей странице →

№4



1) O_1 – центр Ω, а O_2 – ω 2) $O_2D \perp BC$ (т.к. D – касания); $O_2 \in AB$ (по св-ву); $\angle BCA = 90^\circ$ (т.к. он вписан., опир. на диаметр) $O_1 \in AB$ (т.к. AB – диаметр) 3) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по острому углу) ⇒

⇒ $\frac{BC}{BD} = \frac{2R}{2R-r}$ (R – радиус Ω; r – радиус ω) $BC = 13+12 = 25$ $\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13}$

($O_2B = 2R-r$; $O_2A = r$; $BA = 2R$)

$26R = 50R - 25r$ $R = \frac{25}{24}r$ $O_2D = r$ ⇒ по теор. Пиф.:

~~[illegible]~~ $(2R-r)^2 = 169 + r^2$ ⇒ $4R^2 - 4Rr = 169$ ⇒

⇒ ~~$r = \frac{4R^2 - 169}{4R}$ [illegible]~~ $\frac{625 \cdot 4}{576}r^2 - \frac{4 \cdot 25}{24}r^2 = 169$

$r^2 = \frac{169 \cdot 576}{100}$ $\underline{r = 31{,}2}$ $\underline{R = \frac{25}{24}r = 32{,}5}$

4) Пусть $\angle EFB = \alpha$; $\angle AFB = 90^\circ$ (т.к. он впис., опир. на диаметр) ⇒ $\angle AFE = 90^\circ - \alpha$; $\angle EAB = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$\angle ADO_2 = \alpha$ (т.к. $\triangle ADO_2$ – р/б, т.к. $O_2A = O_2D = r$); $O_2D \perp BC$; $AC \perp BC$ ⇒ $AC \parallel DO_2$ ⇒ $\angle CAD = \alpha$ (накр. леж.)

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{32{,}5 \cdot 2} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$; $2\alpha < 90^\circ$ ⇒ $\cos 2\alpha > 0$ ⇒ $\alpha < 90^\circ$ ⇒ $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$;

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{12}{13}$ $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{26}$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $\angle AFE = 90^\circ - \alpha$ ⇒ $\cos\angle AFE = \sin\alpha =$

$= \frac{1}{\sqrt{26}}$ ⇒ $\underline{\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}}$. 5) ~~AF = AB [illegible]~~ $\angle FEA = \angle O_2DA$ (как соотв.) $= \alpha$; $\angle ABF = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$AF = AB \cdot \sin\alpha = \frac{65}{\sqrt{26}}$; $\angle BEA = 90^\circ$ (опир. на диаметр) ⇒ $AE = AB \cdot \cos\alpha = 65 \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot 65 = \frac{325}{\sqrt{26}}$

~~По теор. cos: $AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2AF \cdot EF \cos\angle AFE$ ⇒ $\frac{325^2}{26} =$~~ $\angle AFE = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \angle AEF$ ⇒ $\angle EAF = 90^\circ$ ⇒

⇒ $\underline{S_{AEF}} = \frac{AF \cdot EA}{2} = \frac{325 \cdot 65}{26 \cdot 2} = \underline{\frac{21125}{52}}$

Ответ: $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$; $\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF} = \frac{21125}{52}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

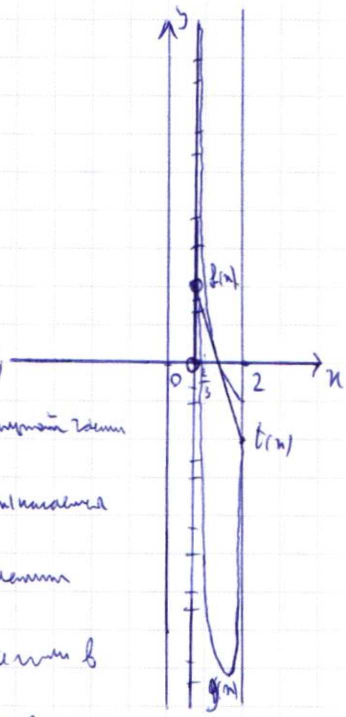
№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28,\ x \in (\frac{2}{3};2]$

$f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$

$g(x)=18x^2-51x+28$

$t(x)=ax+b$ При $a=-3;\ b=4$ Условие выполняется, потому что $t(x)$ пересекает $g(x)$ в т. $\frac{2}{3}$ и 2, а в остальной части отрезка графи $g(x)$ лежит ниже, чем $t(x) \Rightarrow g(x) \leq t(x)$, график $t(x)$ касается графика $f(x)$ в т. $\frac{4}{3}$, и в остальной части отрезка график $f(x)$ лежит выше, чем $t(x) \Rightarrow f(x) \geq t(x)$. При изменении a или b график $t(x)$ либо начинает пересекать график $f(x)$ в 2 точках $\Rightarrow$ его часть лежит ниже, чем $t(x) \Rightarrow f(x) \ngeq t(x)$ или пересекать $g(x)$ в других точках $\Rightarrow$ часть $g(x)$ лежит выше чем $t(x) \Rightarrow g(x) \nleq t(x) \Rightarrow$ такая пара $(a;b)$ – единственная.



Ответ: $(-3;4)$.

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26) \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$ Пусть $26x-x^2=t$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t} \Leftrightarrow 12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$ Пусть $\log_5 t=a$, тогда

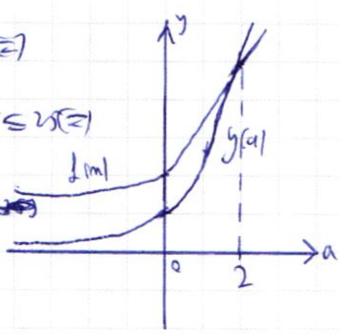
$12^a+5^a \geq 13^a \ |:5^a>0 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^a+1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^a$ $f(a)=\left(\frac{12}{5}\right)^a+1$ $y(a)=\left(\frac{13}{5}\right)^a$

Тогда из графика следует, что $a \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5 t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 25 \Leftrightarrow 26x-x^2 \leq 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-26x+25 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[1;25] \in$ ОДЗ



Ответ: $x\in[1;25]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

1) $-\frac{1}{17} + \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = -1$ $\quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\in Z$ $\quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow \tan\alpha = -1$

2) $-\frac{1}{17} - \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{34}$

Пусть $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \frac{8}{17}$, тогда

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{34}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{25}{34}$

$\tan^2\alpha = \frac{9}{25}$ $\quad \tan\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Пусть $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{8}{17}$, тогда $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{25}{34}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{34}$

$\tan^2\alpha = \frac{25}{9}$ $\quad \tan\alpha = \pm\frac{5}{3}$

Ответ: $\tan\alpha = \{-\frac{5}{3}; -1; -\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$

34 · 34 = 1156, 289 − 225 = 64, 136, 102, 100, $\frac{13\cdot 24}{70}$

$y = \pm\sqrt{90-9(x-1)^2} + 6$

$y^2 - 12y + 9x^2 - 18x - 45 = 0$ $\quad 36 - 9x^2 + 18x + 45$

Пусть $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$, тогда

$\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{15}{34}$

$\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \frac{225}{1156}$

$\frac{\pm\sqrt{25x^2-2x+25}+13x-1}{2} =$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 13xy + y + 36x^2 + 6x - 6$

$\frac{\pm\sqrt{25x^2-2x+25}+13x-1}{2}$

№2

$y^2 - 13xy + 6x + y + 36x^2 - 6 = 0$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$ $\quad$ ОДЗ: $xy - 6x - y + 6 \geq 0$ $\quad y(x-1) - 6(x-1) \geq 0$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$ $\quad (y-6)(x-1) \geq 0$

$\cancel{9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 0}$ $\quad y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 6 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \frac{\pm 5 - 1}{2}$

$\cancel{\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}}$ ~~Ответ: (1; 6).~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$|n^2-26n|^{\log_5 12}+26n \geq n^2+13^{\log_5(26n-n^2)}$ ОДЗ: $26n-n^2>0$ $n\in(0;26)$

$(-(n^2-26n))^{\log_5 12} \geq n^2-26n+13^{\log_5(26n-n^2)}$

$(26n-n^2)^{\log_5 12}+26n-n^2 \geq 13^{\log_5(26n-n^2)}$ $26n-n^2=t$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$\frac{325\cdot 65}{26\cdot 2}$

$\frac{65^2\cdot 5}{52}$

24 13 72 24 312

325 25 13 75 25

$4r^2+169\cdot 4$

$26^2r^2-24^2r^2=13^2 24^2$

$R=32,5$

$r^2\cdot 100=13^2 24^2$

$(2R-2r)\cdot 2R=169$

$4R^2-4Rr-169=0$

$r=\frac{13\cdot 24}{10}=31,2$

$R=\frac{2\sqrt{r^2+169}+2r}{4}=$

189 378 3969 − 225 3744 936 63 4225·5 81125

№4

$\sin 2\angle=\frac{25}{65}=\frac{5}{13}$ $\angle AFE=90^\circ-2$

$\frac{AB}{2R}$

$40\cdot 90$

$(2R-r)^2-r^2=169$

625 625 $=\frac{\sqrt{r^2+169}+r}{2}=\frac{25r}{24}$

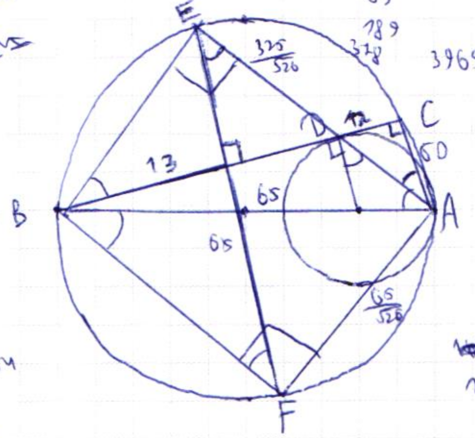
$\frac{25}{13}=\frac{2R}{2R-r}$

3969 − 625

3725 $26r^2=24\sqrt{r^2+169}$

1250 3750

$50R-25r=26R$



$S_{AFE}=\frac{81125}{52}$

3344

$R=\frac{25r}{24}$

390625

836

$\frac{r}{25\sqrt{\frac{r^2}{576}-1}}=\frac{25}{13}$

17

209

34

736 313

$\cos 2\angle=\frac{12}{13}$

$625\sqrt{\frac{r^2}{576}-1}=13r$

$\sin\angle AFE=\frac{5}{\sqrt{26}}$ 24 13 72 24 312

39

24 13 72 24 312

129 17

13 26

$\sin^2\angle=\frac{1-\frac{12}{13}}{2}=\frac{1}{26}$ $\sin\angle=\frac{1}{\sqrt{26}}$

13

$\frac{625^2r^2}{24^2}-1=13^2r^2$

260·390 35

$625\cdot 4R^2-625^2=169r^2$

$\cos\angle AFE=\frac{1}{\sqrt{26}}$

1250

$4R^2-625=\frac{169r^2}{625}$

$625^2r^2-312^2r^2=24^2$

4225 −

469 781

$r=\frac{25\sqrt{4R^2-625}}{13}$

26 24

$313\cdot 937r^2=24^2$

$65^2\cdot 625$

104 52 624

$\frac{65^2}{26}=EF^2+\frac{65^2}{26}-\frac{2\cdot 65}{26}EF$

$R=\frac{625\sqrt{4R^2-625}}{24\cdot 13}$

$r=\frac{24}{\sqrt{313\cdot 937}}$

$24^2\cdot 13^2\cdot R^2=625^2\cdot 4R^2-625^3$

$26EF^2-2\cdot 65$

$=$

1625 1950

$R^2\cdot 938\cdot 1562=625^3$

$26EF^2-2\cdot 65EF+26\cdot 390=0$

21125

$R=\frac{25^3}{2}$

$\angle AFE=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$

325 65 1625 1250

$65^2 \quad 13^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 10^4$

$EF^2-2\cdot\frac{65}{26}EF-\frac{24\cdot 65^2}{26}=0$

$26EF^2-2\cdot 65EF-24\cdot 65^2=0$

$EF=\frac{65\cdot 25+65}{26}=$
$=65$

$D=65^2+24\cdot 26\cdot 65^2=65^2\cdot 625$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 = \frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}} - 2$

$18x^2 - 51x + 28$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

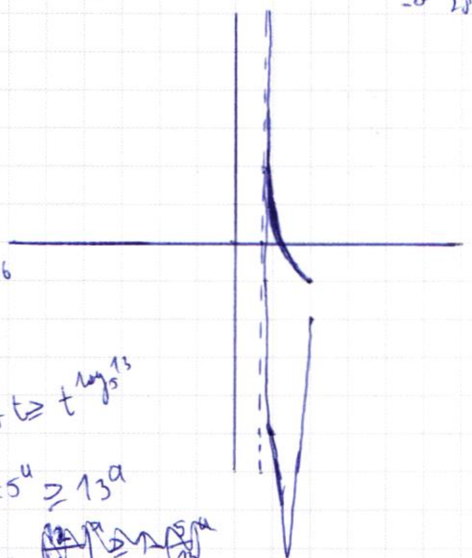
$\frac{289 \cdot 18}{144} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

$\frac{289}{8} - \frac{289 \cdot 2}{48} + 28$

$28 - \frac{289}{8}$ $\quad \frac{224-289}{8}$ $\quad -\frac{65}{8}$

$8 - \frac{34}{x} + 28$

$72 - 102 + 28$



$\frac{4}{3}$

3

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$\sqrt{25x^2 - 2x + 25}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$12^a + 5^a \geq 13^a$

$\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^a$

$\left(\frac{12}{5}\right)^a + 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^a$

$-3x + 4 = \frac{8-6x}{3x-2}$ $\quad 144-$

$-9x^2 + 12x + 6x - 8 = 8 - 6x$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$

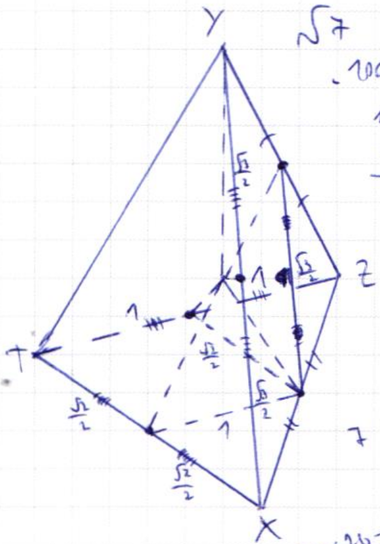
$(3x-4)^2 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

№5

$f(2) = 0$ $f(3) = 0$ $f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(13) = 3$ $f(17) = 4$ $f(19) = 4$ $f(23) = 5$

$f(4) = 0$ $f(6) = 0$



№7

$100 + 25 - 4$ $\quad t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$\frac{11+26-1}{2}$

$t^{\log_5 \frac{12}{13}} + t^{\log_5 \frac{5}{13}} \geq 1$

18

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$ $\quad \log_5 t = a$

9

$12^a + 5^a \geq 13^a$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$ $\quad 529$

7 18

23

23

$25 \cdot 17$

$\frac{-11+26-1}{2}$ $\quad -\sqrt{10}+1$

175

25

$100-$

$11 - 2\sqrt{10}$

$275 - 50\sqrt{10} - 22 + 4\sqrt{10} + 25$

$425 - 8$

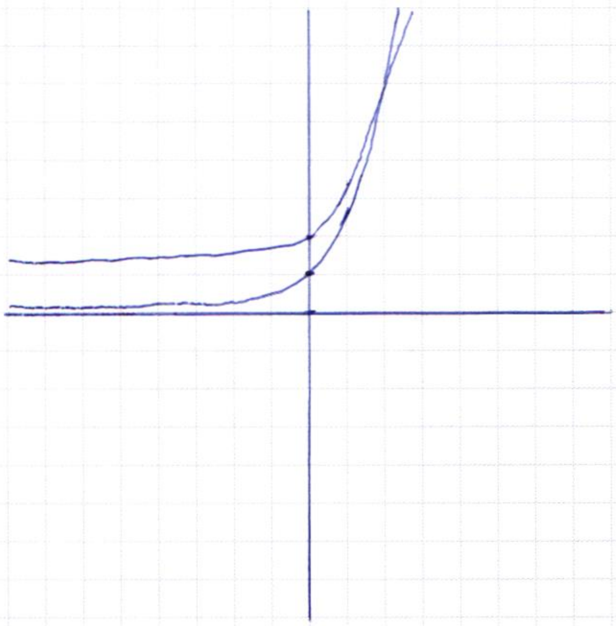
$\sqrt{278 - 46\sqrt{10}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{13}{5}\right)^{a} = \left(\frac{12}{5}\right)^{a} + 1$$

$$a\left(\frac{13}{5}\right)^{a-1} = a\left(\frac{12}{5}\right)^{a-1}$$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)