МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Пусть $a = x-2$, $b = y-1$. Тогда исходную систему можно переписать как (добавив 13 к обоим частям второго ур-ия):

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

из (1) $\Rightarrow$ $a^2-5ab+4b^2=0$ (*) (учитываем, что ** $ab \geq 0$ и $a-2b \geq 0$)

По теореме виета (*) $a^2-5ab+4b^2 =$

$= \underline{(a-4b)(a-b)=0}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b. \end{array}\right.$

1) Если $a=4b$, то ~~из второго~~ подставив в (2), имеем:

$25b^2 = 25 \Rightarrow \underline{b = \pm 1} \Rightarrow a = \pm 4.$

Условиям (**) подходит пара $\underline{a=4 \text{ и } b=1}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \text{ — 1е решение. Ответ.}}$

2) Если $a=b$, то из (2):

$10b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 2{,}5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2{,}5} \Rightarrow a = \pm\sqrt{2{,}5}$

Условиям (**) подходит пара $a=-\sqrt{2{,}5}$, $b=-\sqrt{2{,}5}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2=-\sqrt{2{,}5} \\ y-1=-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2-\sqrt{2{,}5} \\ y=1-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \text{ — 2е решение. Ответ.}}$

N 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

Пусть $x^2+18x=a$, причём $a>0$ по ОДЗ.

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$ (*)

$\log_{12}a = b$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $5^b + 12^b \geq 13^b$.

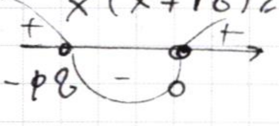
* $a^{\log_{12}13} = 13^{(\log_{13}a)\log_{12}13} = 13^{\log_{12}13\cdot\log_{13}a} = 13^{\log_{12}a}$.

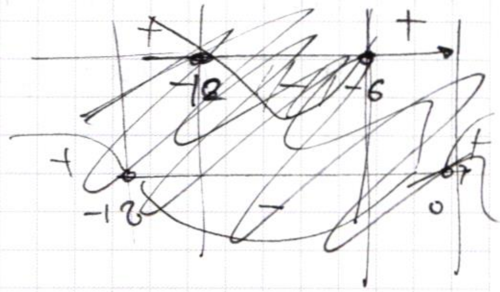
Заметим, что при $b=2$, неравенство превращается в равенство. Так как слагаемые левой и правой части представляют возрастающие показательные функции, то есть кривые, точек пересечения не более двух.

$b \leq 2 \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x) \leq 2$.

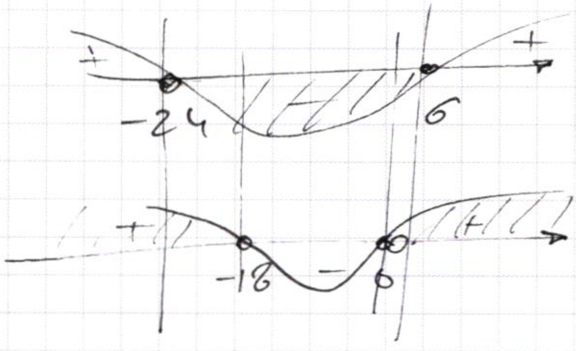
$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^2+18x+144 = (x+24)(x-6) \leq 0$

$x(x+18) \geq 0$





Ответ: ~~$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$~~.



$\Rightarrow$ Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; +6]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Воспользовавшись данной формулой ко второму уравнению, имеем:

$\cancel{2\sin}\ 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$

$$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ (по условию)}}\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \quad \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

По основному триг. тождеству:

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Из первого уравнения:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) Если $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, то

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1. \ \Big|\ \frac{1}{\cos^2\alpha};\ \cos\alpha\neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha + 4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ | вычтем единицу $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha + 3 = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \operatorname{tg}^2\alpha. \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0.$ (По теореме Виета $\to$)

$(\operatorname{tg}\alpha-3)(\operatorname{tg}\alpha+1) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 3$ ✓.

$\operatorname{tg}\alpha = 1$

~~Зада~~ № 1 (продолжение)

2) Если $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, то подставив в первое ур-ие:

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \cancel{2}\cos\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| \times \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = -1. \Big|^{\times \frac{1}{\cos^2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha - 4 = -\frac{3}{\cos^2\alpha} \Big| + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = -3\Big(\underbrace{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}_{\operatorname{tg}^2\alpha}\Big) = -3\operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$$ (решаем как кв. ур-ие. отн. $\operatorname{tg}\alpha$)

$$D = 4 - 4\cdot(-1)\cdot 3 = 16.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \pm 4}{6} = 1; -\frac{1}{3}.$$

Итого ответ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

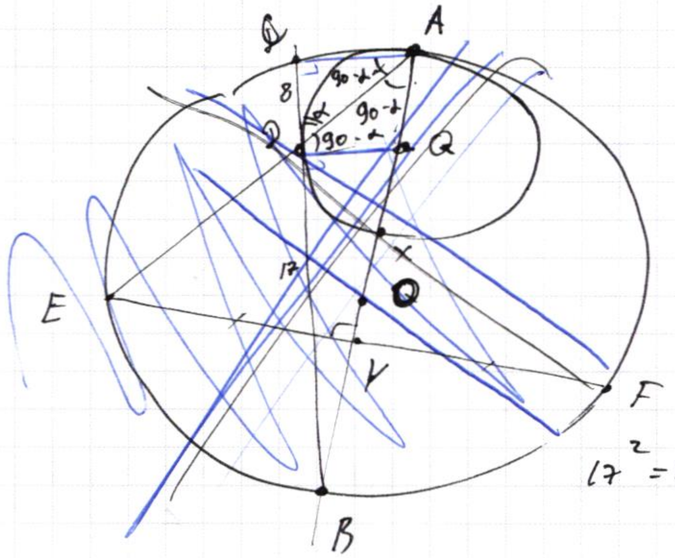
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



Обозн.

O – центр Ω, R – рад. Ω

Q – центр ω,

r – радиус ω.

X – точка пер. AB с ω.

По теор. о секущ. и касат.:

$17^2 = BD^2 = BX \cdot BA =$

$= (2R - 2r) \cdot 2R \Rightarrow$

1)

$\Rightarrow R(R-r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$. (1)

$\angle BDQ = 90°$, т.к. D – точка касания ~~BD~~ с ~~ω~~, QD – радиус.

$\angle BCA = 90°$, т.к. опирается на AB (диам.). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDQ \sim \triangle BCA$ (общий угол при B и прямые углы). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17}{BQ} = \frac{25}{BA} \Rightarrow \frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R} \Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}} \Rightarrow \underbrace{r = \frac{16}{25} R}$. Подставив в (1) значение

r, имеем $\boxed{\underbrace{R = \frac{85}{6}} \Rightarrow \underbrace{r = \frac{85}{6} \cdot \frac{16}{25} = \frac{136}{15}}}$ Ответ 1.

2) $\angle AFE = \angle AEF \overset{\alpha}{''}$, т.к. $\triangle AEF$ равнобедр. (хорда $EF \perp AB$ – диам, $\Rightarrow AB$ делит EF – пополам $\Rightarrow$ в $\triangle AEF$ и где AY – высота и медиана, где Y – точка пересеч. EF и AB).

$\triangle AEY$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle EAY = \underline{90° - \alpha}$. ~~Из четырёх-угольника ACDQ~~ $\angle ADQ = \angle EAY$ ($\triangle ADQ$ – равнобедр., AQ и QD – радиусы ω). Но $\angle CDQ = 90° \Rightarrow \angle CDA = \alpha$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4 (Продолжение)

2) $\angle AFE = \angle ABE \overset{\alpha}{=}$ т.к. они опираются на хорду AE.

$\angle AEB = 90°$, поэтому $\angle DAQ = 90 - \alpha$. $\angle QDA = \angle DAQ =$
$= 90 - \alpha$, т.к. $AQ = QD = r$., но $\angle QDC = 90°$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CDA = \alpha$. $\triangle CDA$ - прямоуг., $\angle C = 90°$, т.к.
опирается на AB. (диам.). Найдём AC из
прямоуг. $\triangle BCA$. $CA^2 = AB^2 - BC^2 = (2R)^2 - (17+8)^2 =$
$= \left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2 = \left(28 + \frac{1}{3} - 25\right)\left(28 + \frac{1}{3} + 25\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{160}{3} =$
$= \frac{1600}{9} \Rightarrow CA = \frac{40}{3}$. из $\triangle CDA$ $tg\alpha = \frac{AC}{CD} =$
$= \frac{\frac{40}{3}}{8} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ $\boxed{\alpha = arctg\,\frac{5}{3}}$ Ответ ко второму вопросу.

3) $DQ \parallel EF$, т.к. $DQ \perp BC \Rightarrow \triangle DAQ \sim \triangle EAM$,
~~DQ~~ где M - точка пересеч. AB и EF.

~~$\frac{DQ}{AD} = \frac{EM}{AE}$; но по свойству пересекающихся~~
~~хорд, $BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow AD = \frac{136}{DE}$.~~
~~$17 \cdot 8$~~
~~$\frac{DQ}{136} \cdot DE = \frac{EM}{AE}$~~

$AC \perp BC \Rightarrow AC \parallel DQ \parallel EF$., но $\angle DAC = 90 - \alpha$ ($\triangle DAC$ - прямоуг.)
т.е. AD - биссектриса $\angle CAB$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

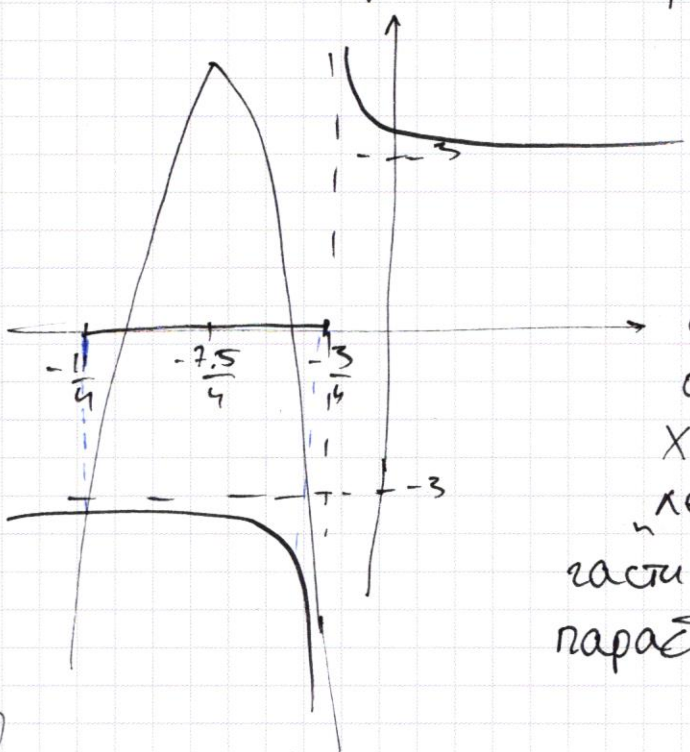
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ – график гипербола с гориз. асимптотой $x = 3$ и верт. асимпт. $x = -\frac{3}{4}$.

$-(8x^2+30x+17)$ – парабола с вершиной в точке с коорд. $x_0 = \frac{-30}{2 \cdot 8} = -\frac{7.5}{4}$ (середина $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$) и $y_0 = \frac{89}{8}$.

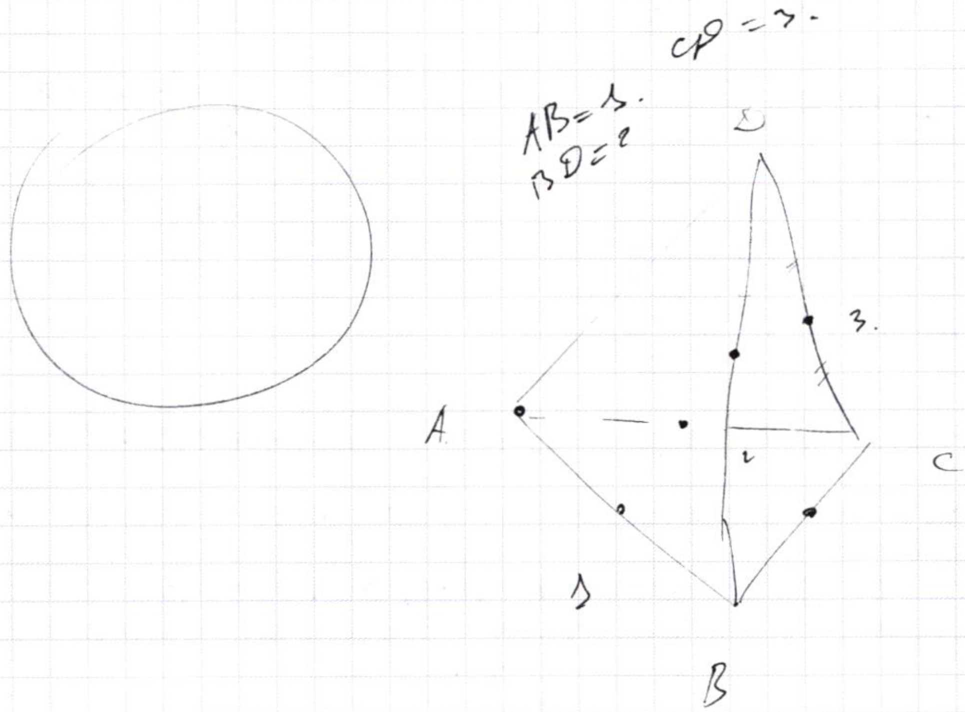
ветви вниз. На концах отрезка принимает отриц. значения. Чертёж: ~~без~~ (приблизительной)



Хотим, что был значение ~~прямая и~~ $y = ax+b$, при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ были больше $y_1 = \frac{12x+11}{4x+3}$ и меньше $y_2 = -(8x^2+30x+17)$. Т.е. отрезок прямой при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ должен „лежать" выше „нижней" части гиперболы, но „ниже" параболы. (*).

Ясно, что любой такой отрезок не короче длины полу отрезка $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, т.е. двух., но сам данный в условии отрезок целиком не помещается ~~между~~ внутри параболы, стало быть и искомый отрезок не удовлетворяет условию. (*). Тогда таких пар чисел a, и b не существует.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N 7.

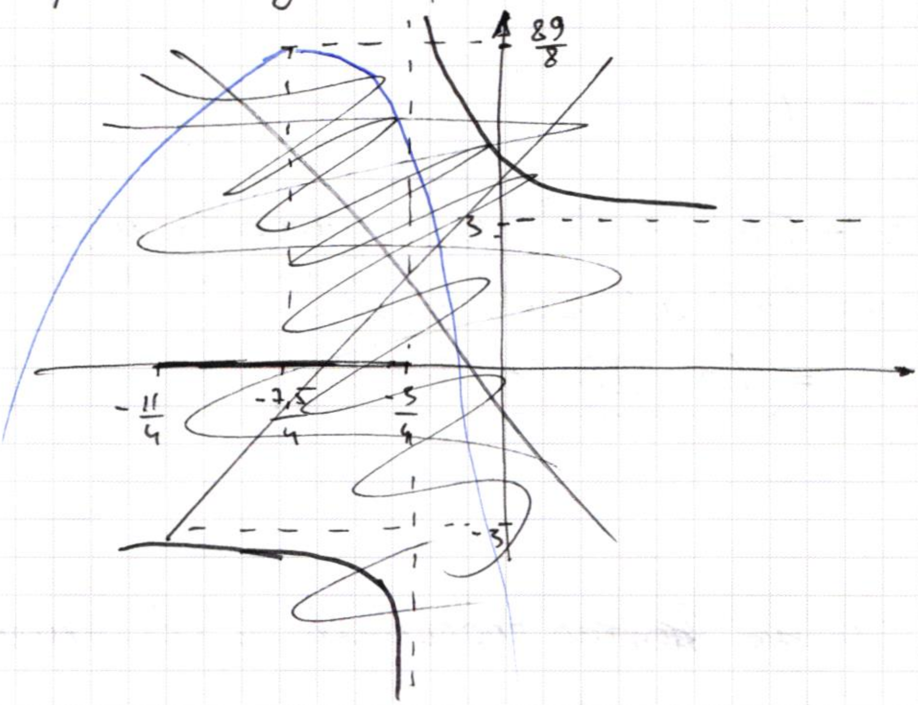
~~Данны~~ Указанные в условии задачи точки, лежат на одной сфере. Расстояния от центра сферы до каждой из них равна радиусу, т.е. центр равноудалена от них.

N6.

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ – график этой функции есть гипербола с гориз. асимпт. $x = 3$ и вертик. асимпт. $y = -\frac{3}{4}$.

$-8x^2-30x-17$ – парабола с ~~верш~~ абциссой вершины $x_0 = -\frac{7,5}{4}$, середина полу отрезка $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ и ординатой $y_0 = \frac{89}{8}$.

~~Чертеж~~ следующий.



№4 (продолжение)

CA найдём из прямоуг. ΔBCA: $BC = 17+8 = 25$

$AB = 2R = \frac{85}{3}$.

По теор. Пифагора: $CA^2 = AB^2 - BC^2 = \left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2 =$

$= \left(28 + \frac{1}{3} - 25\right)\left(28 + \frac{1}{3} + 25\right) = \left(3 + \frac{1}{3}\right)\left(53 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{160}{3} =$

$= \frac{1600}{9} \Rightarrow \underline{CA = \frac{40}{3}}$

из прямоуг. ΔCDA ($\cancel{\angle C = 90}$ $\angle DCA = 90°$):

$tg\,\alpha = \frac{CA}{DC} = \frac{\frac{40}{3}}{8} = \frac{5}{3}$.

$\boxed{\underline{\alpha = arctg\left(\frac{5}{3}\right)}\ - ~~Ответ~~}$ – и есть искомый угол $\underline{\angle AEF = AFE}$.

Ответ 2.

3) ~~Найдем EY из прямоуг. ΔEYA ($\angle Y = 90°$).~~

~~$\angle EAY = 90 - \alpha$ $\frac{40}{40}$ $tg(90-\alpha) = ctg\,\alpha$~~

$\angle AEF = \alpha$, тогда ~~$\frac{AY}{EY} = tg\,\alpha$. $AY =$~~

$tg\,\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{3}\cos\alpha. \Rightarrow$

(По осн. триг. тожд.) $\Rightarrow \frac{25}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\underline{\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}}$

По теореме синусов для ΔAFE ($AF = FE$)

$AF = AE = 2R\sin\alpha = \cancel{2}\frac{85}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{425}{3\sqrt{34}}$.

из прямоуг. ΔEYA ($\angle Y = 90°$)

~~$tg\,\alpha = \frac{AY}{EY}$~~ $EY = AE \cdot \cos\alpha = \frac{425}{\cancel{3}\sqrt{34}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{34}} = \frac{425}{34}$.

$AY = AE \cdot \sin\alpha = \frac{425}{3\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{2125}{3 \cdot 34} = \frac{2125}{102}$

Откуда $S_{AFE} = \frac{1}{2} AY \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot AY \cdot 2EY = AY \cdot EY =$

$= \frac{425}{34} \cdot \frac{2125}{102} = \frac{425^2 \cdot 5}{34^2 \cdot 3} = \boxed{\underline{\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{425}{34}\right)^2}}$ Ответ 3.

$$5^{\log_{12}(\cancel{18}^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x.$$

$$x^2+18x + 5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log\ldots} \geq 0.$$

$$D/_4 = 81 - 4\left(5^{\log_{12}(x^2+18x)} - \right.$$

$$x^2+18x+5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 0.$$

$$D/_4 = 81 - \left(5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log_{12}(x^2+18x)}\right) \leq 0.$$

$x^2+18x > 12.$

$$13^{\log_{12}(x^2+18x)} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \cancel{+}\, 81 \leq 0.$$

$x^2+18x > 12.$

$$144^2 + 18\cdot 144.$$

$f(4) = f(-2) + f(-2) = 2f(2) + f(-1)$

110

$f(1 \cdot 1) = f(-1) + f(1) = 2f(1)$

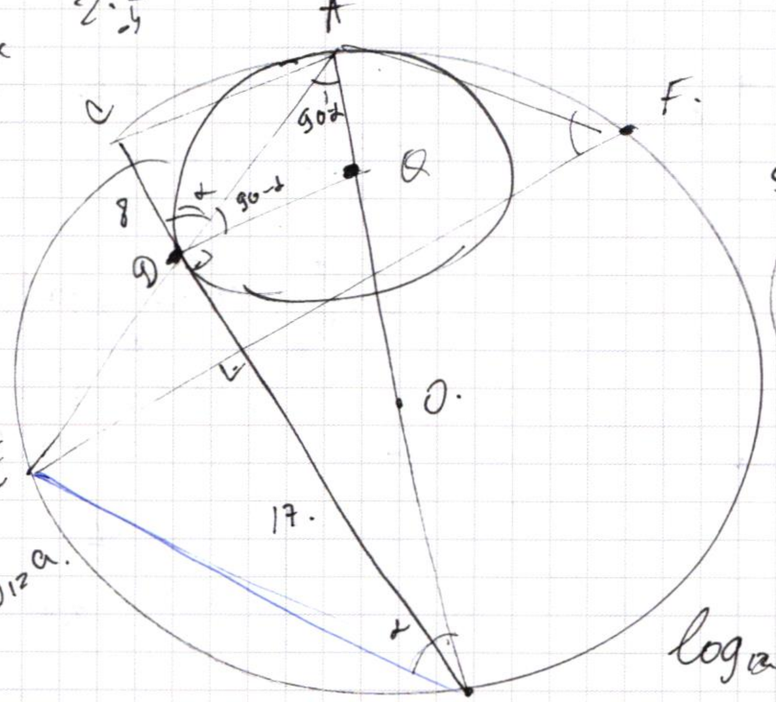
$f(1) = 0$

$f(1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1) = 0$

$\frac{40}{\frac{3}{85/13}}$ $2 \cdot \frac{2}{-1}$

$\angle AFE$

$5^x + 12^x \geq 13^x$



$5 = 12^{\log_{12} 5}$

$\left(12^{\log_{12} 5}\right)^{\log_{12} a} +$

$+ 12^{\log_{12} a} \geq$

$\geq 12^{\log}$

$12^{\log_{12} a}$

$5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} \geq 13^{\log_{12} a}$

$\log_{a}\left(a^{\log_{12} 13} - a^{\log_{12} 5}\right) \geq$

$\geq \log_{12} a$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13} = 13^{\log_{12} a}$

$\left(5^{\log_{12} a}\right)^2 + {}^{\log_{12} a}$

$+ 2 \cdot (5 \cdot 12) +$

$a^{\log_{12} 5} + a^{\log_{12} 12} \geq \cancel{\log_a a}\ {}^{\log_{12} 13}$

$a \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12} a}$

$+$

$13^{2x} \leq$

$a + a^{\log 12}$

$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} \frac{13}{12} + \log_{12} 12}$

$=$

$a^{\log_{12} 5} - lo \quad = a\left(a^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1\right)$

$\log_{12}\left(a^{\log_{12} a} - 13^{\log}\right.$

$(5^x + 12^x)^2 \geq 4 \cdot 60^x$

$5^x + 12^x \geq 13^x$

$\sqrt{\frac{5^{2x} + 12^{2x}}{2}} \geq \frac{5^x + 12^x}{2} \geq \sqrt{60^x}$

$4 \cdot 60^x \vee 169^x$

$4 \vee \left(\frac{169}{60}\right)^x$

$2 < \frac{169}{60}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$, где $a = \cancel{8}x^2+18x\cancel{+} > 0$ по ОДЗ.

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$; $-(8x^2+30x+17)=0.$

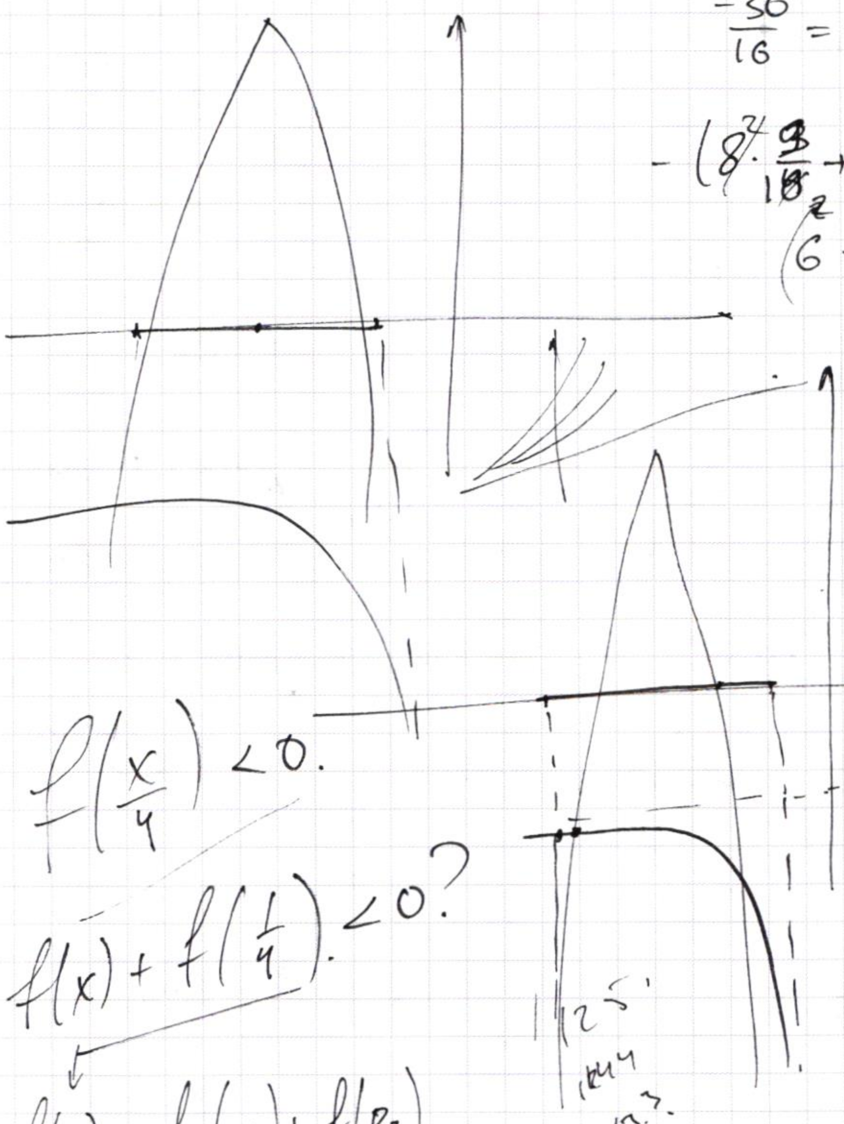
$\frac{-30}{16} = -\frac{7,5}{4}.$

$5^b < 6^b$

$12^b < 13^b.$

$-\left(8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}+17\right).$

$(6+22,5+17)=$
$=45,5.$



$-\frac{11}{4}$

$3+\frac{2}{-11+3}=$
$=3-\frac{2}{8}=2,75.$

$125;\ 144 \cdot 12 = 288,\ 144,\ 1728$

$169 \cdot 13$

$f\left(\frac{x}{4}\right)<0.$

$f(x)+f\left(\frac{1}{4}\right)<0?$

$f(x) = f(p_1)+f(p_2)$

$x = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}.$

$f(x) =$
$= f(p_1)+f(p_1^{\alpha_1-1}\ldots) =$
$= \alpha_1 f(p_1)+\ldots+$
$+ \alpha_s f(p_s).$

$5^x+12^x \geq 13^x$; $5^{2x}+2\cdot5^x\cdot12^x+12^{2x} \geq 13^{2x}.$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$

$\underbrace{x^2+18x}_{a}.$

$a>0.$

$a + 5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12}13}.$

$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b.$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17; \quad x\in[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}].$

$12x+11 = 3(4x+3)+2$

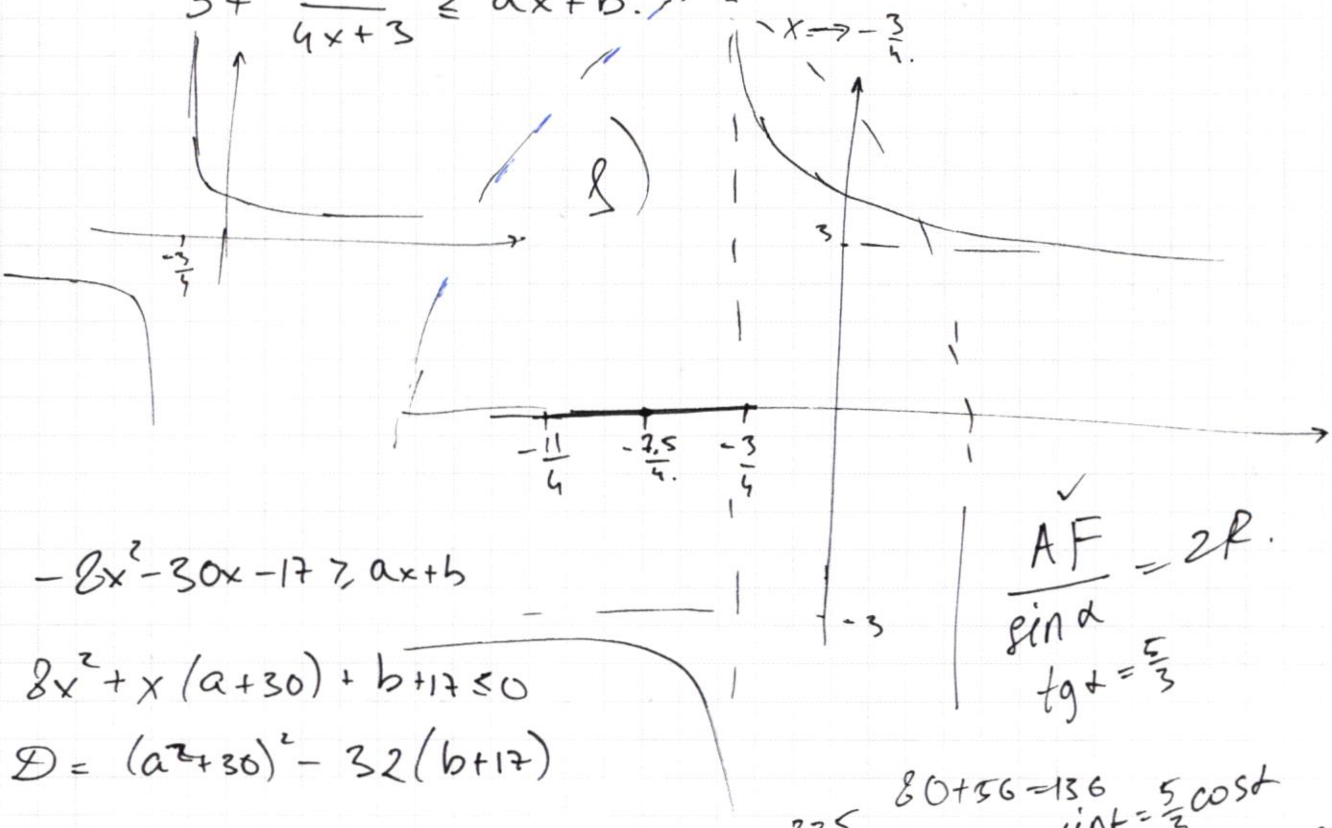
$-(8x^2+30x+17)$

$-(8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}+17)$

при

$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b.$

$x \to -\frac{3}{4}.$



$\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R.$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$

$-8x^2-30x-17 \geq ax+b$

$8x^2+x(a+30)+b+17 \leq 0$

$D = (a^2+30)^2 - 32(b+17)$

$80+56=136$

$\sin\alpha = \frac{5}{3}\cos\alpha$

$\frac{25}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$-\frac{225}{136}$ 89

$-8x^2-30x-17.$

$D/4 = 225 - 8\cdot 17 = 89.$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7,5}{4}$

$-8\cdot\frac{225}{64} + 30\cdot\frac{15}{8} = \frac{225}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}.$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$-8\cdot\frac{225}{64} + \frac{30\cdot 15}{8} = \frac{225}{8} - 17 = 8$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

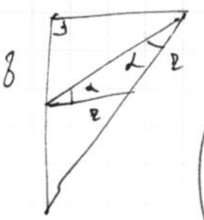
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

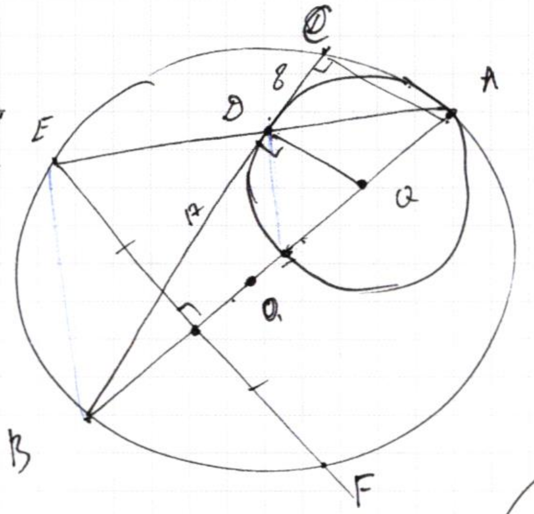
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$180 - 2\angle + \angle = 180$





R – ? $\angle AFE$ – ?

r – ? S_{AEF}

$CD = 8$

$BD = 17$.

1) $\angle AFE = \angle AEF$.

$\angle + \angle + 90 - \angle = 180$

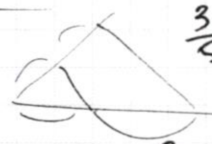
$\angle = 90$

$R\left(R - \frac{16}{25}R\right) =$

$= R \cdot \frac{9}{25} R =$

$= \frac{9}{25} R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{3}{5} R = \frac{17}{2}$

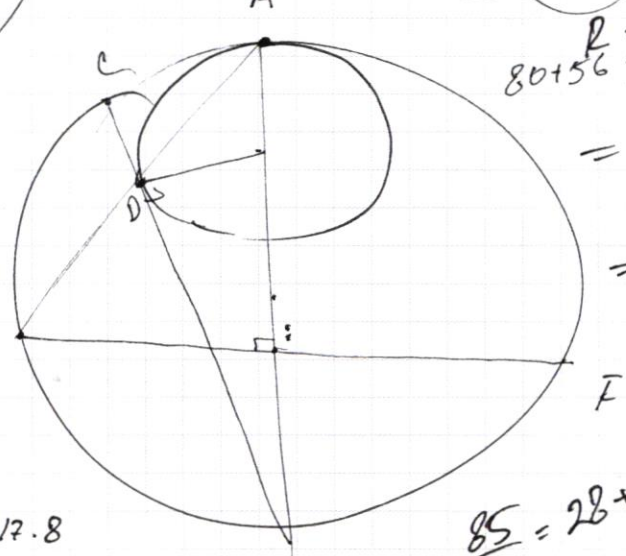


$R = \frac{85}{6} \cdot \frac{16}{25} =$ $17 \cdot 8$

$80 + 56$

$= \frac{17 \cdot 8}{15} =$

$= \frac{136}{15}$



$17^2 = (2R - 2r) \cdot 2R =$

$= 4(R - r)R$

$\frac{AD}{2r} = \frac{ED}{2R - 2r}$

$AD \cdot ED = 17 \cdot 8$

$\frac{AD}{ED} = \frac{2r}{2R - 2r}$

$\frac{85}{3} = 28 + \frac{1}{3}$

$\left(28 - 25 + \frac{1}{3}\right) \cdot$

$\left(28 + 25 + \frac{1}{3}\right) =$

$= \left(3 + \frac{1}{3}\right)\left(53 + \frac{1}{3}\right)$

$\frac{10}{3} \cdot$

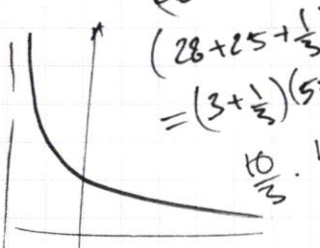
$\frac{17}{2R - 2} = \frac{25}{2R}$

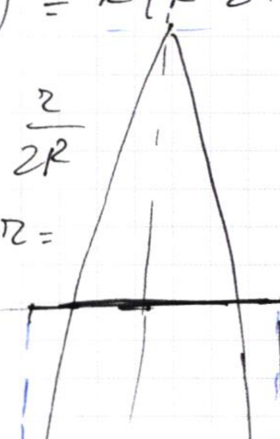
$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R(R - r)$

$\frac{17}{25} = \frac{2R - 2}{2R} = 1 - \frac{2}{2R}$

$\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$

$r =$





$\frac{227}{8} - 17 =$.

$23 - 17 + \frac{1}{8} =$

$= 6 + \frac{1}{8}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\overbrace{2\alpha+2\beta}^{a}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(\overbrace{2\alpha+4\beta}^{b}) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = ?$ $a = 2\alpha+2\beta$ $b-a=2\beta$

$b = 2\alpha+4\beta$. $2a-b=2\alpha$.

$\sin a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin b + \sin(2a-b) = -\frac{4}{5}$

$\sin 2a \cos b$

$\log_a a^{\log_{12}13-1}$

$a^{\log_{12}5}$

$x(y-1)-2(y-1) =$

$= (x-2)(y-1)$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$+4+9$

$(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=25$.

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$a^{\log_{12}5}+a^{?} \geq a^{\log_{12}13}$.

$\log_a(a^{\log_{12}5}+1) \geq \log_{12}13-1$.

$x-2=a$ $x-2y = a-2b$.

$y-1=b$.

$a-2b = \sqrt{ab}$; $a^2+9b^2=5^2$

5^2-9b^2

$ab\geq 0$

$a-2b\geq 0$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$.

$a^2+45-9ab=25$

a^2-9ab-

$25-9b^2+4b^2-5ab=0$.

$25-5b^2-5ab=0$ $b^2=5-ab$

$b^2+ab-5=0$.

$D = a^2+20$

$b = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+20}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x(y-1)-2(y-1)=\underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}$

$5^x+12^x \geq 13^x.$

$\frac{5^x+12^x}{2} \geq \sqrt{60^x}$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

$a^2+9b^2=25.$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a=\frac{5b\pm|3b|}{2}=$

$=4b;\ b$

$5^{2x}+2\cdot 60^x+12^{2x}\leq 13^{2x}.$

$x^2+18x>0$

$(a-4b)(a-b)=0.$

$a=4b$

$a=b.$

$a-2b\geq 0$

$\sqrt{ab}\geq 0.$

$a+5^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13}$

$a+a^{\log_{12}5}\geq a^{\log_{12}13}$

1) $16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

$b=\pm 1 \Rightarrow a=\pm 4.$

$a=4$
$b=1.$
$a=-4$
$b=-1$

5

$(a^x)'=$

2)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x.$

$=\ln a$

$x^2+18x=a$

$a^{\log_{12}13}$

$a=13^{\log_{12}a}$

$13^{\log_{12}a\cdot\log_{12}13}$

$(2^x)'=\ln 2.$

$\ln 5+\ln 12>$
$>\ln 13.$

$a^{\log_a b}=b^{\log_a x}$

5^x+13^x

$(x^2+18x)+5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$\cancel{a=5^{\log_5 a}}$

$x^2+18x=a$

$a+\cancel{\log}\ 5^{\log_{12}a}\geq a^{\log_{12}13}$

$a=13^{\log_{13}a}$

x^2+18x+

$a+5^{\log_{12}a}-13^{\log_{12}a}\geq 0.$

$13^{\log_{13}a\cdot\log_{12}13}=$

$=13^{\log_{12}a}$

$D/4=81-$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+18x=a>0$

$5^{\log_{12} a}+a \geq a^{\log_{12}13}$ 1) $a>1$?

$a^{\log_{12}5}$ $a\left(a^{\log_{12}5-1}+1\right) \geq a^{\log_{12}13}$

$\log_a\left(a(\ldots)\right) \geq \log_a\left(a^{\log_{12}13}\right)$

$1+\log_a\left(a^{\log_{12}5}+e\right) \geq \log_{12}13$

$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$. $f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

a $f.\ \mathbb{R}^+$ $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $1\leq x\leq 24$ $1\leq y\leq 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$. $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$.

$x^2+18x=a>0$.

$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$.

$a^{\log_{12}5}+a \geq a^{\log_{12}13}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \underbrace{\sin 2\alpha}_{b} = \frac{4}{5}$.

$tg^2 2\alpha + 2 = -\frac{1}{\cos^2 2\alpha}$.

~~$\sin a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(a+b) + \sin b$~~

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{2}$.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha)$.

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$. $x = 2\alpha + 2\beta = 2\alpha$

$y = 2\beta$.

~~$x = \frac{u+v}{2}$~~ ~~$\frac{u+v}{2}$~~ $= x$. ~~$x+y=$~~

~~$u - v$~~

$\sin x + \sin y$ | $\frac{AY}{YB} =$ $\sin(\underbrace{x+y}_{u}) + \sin(\underbrace{x-y}_{v}) =$

~~$x = \frac{u+v}{2}$~~ $u + v = x$ $x+y = u$ $\Rightarrow$ $x = \frac{u+v}{2}$

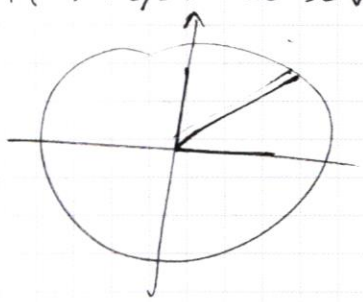
$y = \frac{u-v}{2}$. $u - v = y$ $x - y = v$ $y = \frac{u-v}{2}$.

$= 2\sin x\cos y =$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = \frac{4}{5}$

$\cancel{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cos 2\alpha$. $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.



$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta$.

$AY \cdot YB = EF^2$.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta$ | $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. | $\frac{AY}{EF}\cdot YB = EF$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. | tg $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$.

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm (4\cos^2\alpha - 2)$ | $2tg\alpha + 4 - \frac{2}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$

$2tg\alpha \pm \left(4 - \frac{2}{\cos^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. $2tg\alpha + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)