МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (формула синуса суммы) (1)

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = -\frac{1}{17} + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot$

$\cdot \sin 2\beta$ Но из условия: $\sin(2\alpha+4\beta) =$

$= -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha \Rightarrow$

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{17} - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta.$

Из условия ясно: $\left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$

Аналогично: $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ из (1).

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -1\\ \sin 2\alpha = \frac{15}{17}\end{array}\right.$ А значит $\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 0\\ \cos 2\alpha = \frac{8}{17}\\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}.\end{array}\right.$

Т.к. $|tg\,\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|tg\,\alpha| = 1\\ |tg\,\alpha| = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}\\ |tg\,\alpha| = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}\end{array}\right.$

Так как $tg\,\alpha$ - определен $\Rightarrow$ возможны только следующие значения $tg\,\alpha$: $\pm 1; \pm\frac{3}{5}; \pm\frac{5}{3}.$

~~Меньше трех корней (значений $\operatorname{tg}\alpha$) получается, если не возможен случай $\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$ ⇒ он точно имеет место быть. Осталось проверить, что и $\sin 2\alpha = -1$ – возможен. При $\sin 2\alpha = -1$ первое из нер-в системы выполнено очевидно. А значит и второе – обязательно выполнено.~~

~~(Можно также проверить, что и при $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{3}{5}; \pm\frac{5}{3}$ и $\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$ – все на первый взгляд получается)~~

! <u>На самом деле</u>, <u>не все</u> указанные $\operatorname{tg}\alpha$ <u>удовлетворяют системе</u>.

Однако, просто заметить, что

если $\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sin\alpha) = \operatorname{sgn}(\cos\alpha) \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow$ из $\pm\frac{3}{5}; \pm\frac{5}{3}$ подходит лишь $\frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

Аналогично, если $\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sin\alpha) = -\operatorname{sgn}(\cos\alpha)$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow$ из ± 1 подходит только (-1)

Значит, мы доказали, что если такие $\operatorname{tg}\alpha$ существуют, то это могут быть только $(-1); \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$. По условию этих значений не меньше 3, что возможно только тогда, когда все указанные значения подходят! То есть ответ – эти три значения $\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $(-1); \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Пусть $u=x-1$; $t=y-6$ Переформулируем условие

$$\begin{cases} t-6u=\sqrt{ut} \\ 9(x-1)^2-9+(y-6)^2-36=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-6u=\sqrt{ut} \\ 9u^2+t^2=90. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(!)\begin{cases} t-6u\geqslant 0 \\ t^2-12ut+36u^2=ut \ (*) \\ 9u^2+t^2=90 \end{cases}$$ Очевидно отталкиваться нужно от $(*)$.

$$t^2-12ut+36u^2=ut \Leftrightarrow t^2-13ut+36u^2=0.$$

Однородное уравнение

$$\left[\begin{array}{l} u=0 \\ \left(\frac{t}{u}\right)^2-13\frac{t}{u}+36=0; \ p=\frac{t}{u} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \ (1) \\ p^2-13p+36=0 \ (2) \\ \left(p=\frac{t}{u}\right). \end{array}\right.$$

Случай (1) рассмотрим позже.

(2): $p=\frac{13\pm5}{2}=9;4 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{t}{u}=9 \\ \frac{t}{u}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9u \\ t=4u \end{array}\right.$$

Продолжим рассмотрение, вернувшись к системе. (!)

(Не забудем про случай (1))

$$(!) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6u \\ \left[\begin{array}{ll} t = 9u & (а) \\ t = 4u & (б) \\ u = 0 & (в) \end{array}\right. \\ 9u^2 + t^2 = 90 \end{cases}$$

$$(а):\ (!) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6u \\ t = 9u \\ u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1;\ t = 9 \\ 9 \geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -1;\ t = -9 \\ -9 \geq -6 \Leftrightarrow \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ t = 9 \end{cases}$$

$$(б):\ (!) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6u \\ t = 4u \\ u^2 = \frac{90}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0 \\ t = 4u \\ u = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ t = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}.$$

$$(в)\ (!) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6 \cdot 0 \\ u = 0 \\ t^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ t = 3\sqrt{10}. \end{cases}$$ → очевидно, не подходит при подстановке в (!)

(а): $x = 2$; $y = 15$.

(б): $x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$ $y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$. Проведем отбор из двух оставшихся значений.

~~(в): $x = 1$; $y = 6 + 3\sqrt{10}$.~~

~~Ответ: $(2; 15)$; $\left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$; $(1; 6 + 3\sqrt{10})$.~~

~~Отбор~~:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Только оказывается, что они оба подходят!

(при подстановке в исходную систему).

То есть имеется ровно два корня.

Ответ: $(2; 15)$; $\left(\cancel{1-\frac{3\sqrt{10}}{5}}\right)$

$\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$.

3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \quad (1)$$

Введем $t=26x-x^2$

тогда $(1) \Rightarrow t>0$. Кроме того:

$$(1) \Leftrightarrow |-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}=t^{\log_5 13} \Leftrightarrow$$

$$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13} \quad (2)$$

При $0<t<1$: $t^{\log_5 12}>t^{\log_5 13}$ $\forall t$, т.к.

$\log_5 12<\log_5 13 \Rightarrow \forall\, t\in(0;1)$ - (2) верно.

$\left(\text{ведь } t^{\log_5 12}+t>t^{\log_5 13}, (t>0)\right)$.

При $t=1$ - (2) также выполнено.

Осталось рассмотреть $t>1$. При этом (2) удобнее переписать, как:

$$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \quad (3) \quad ((2)\Leftrightarrow(3))$$

Пусть $f=\log_5 t>0$ (смотрим $t>0$).

Значит, нужно решить нер-во:

$$12^f+5^f \geq 13^f \quad (f>0)$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Просто заметить, что $f=2$ - корень рав-ва:

(5) $12^f+5^f=13^f \Leftrightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^f+\left(\frac{5}{13}\right)^f=1$ (Больше корней нет!).

То есть фактически доказано, что:

$\forall x: \quad 0<26x-x^2\leq 1$ уд-ют нер-ву,

$26x-x^2=2$ уд-ет нер-ву.

А теперь, получив (5) поймем, что при

$0<f\leq 2$ (5) выполнено, а при

$f>2$ - нет. $\Rightarrow$

$0<\log_5 t\leq 2 \quad (t>0) \Leftrightarrow t\leq 25. \Leftrightarrow$

$26x-x^2\leq 25.$

Итак, (1) $\Leftrightarrow$ $0 \cancel{<26x-x^2\leq 25}$ $\left[\begin{array}{ll} 0<26x-x^2\leq 1 & (a) \\ 26x-x^2\leq 25. & (б) \\ (26x-x^2>0) & \end{array}\right.$

(a): $0<26x-x^2\leq 1 \Leftrightarrow$

$x^2-26x+1\geq 0$

$D=12\cdot 14 \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\infty;\frac{13-\sqrt{168}}{1}\right)\cup\left(\frac{13+\sqrt{168}}{1};+\infty\right)$

$26x-x^2>0 \Leftrightarrow x(x-26)>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty).$

(б): $x^2-26x+25\geq 0 \Leftrightarrow \qquad x=\frac{13\pm 12}{1}=25;1.$

$D=12^2$

$\Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty).$

А значит (1) $\Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty).$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(26;+\infty).$

и $R = \frac{25}{24} \cdot \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32{,}5$

(Очевидно: $\underset{\bullet}{\angle CEO} + \underset{\frown}{\angle ECO} = \underset{\pitchfork}{\angle EOB}$: на будущее)

$\angle OAC = 90^\circ - \angle COA = \angle OAO_1$ – AO – бис-са $\angle CAB$

$\angle AFE = \angle ABE = \bullet + \frown = \pitchfork \Rightarrow$ нужно найти

функцию угла $\pitchfork$

По осн. св-ву бис-сы:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{BO}{AB} \Rightarrow AC = \frac{OC \cdot \overset{2R}{\overset{\parallel}{AB}}}{BO} = \frac{12}{13} \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 13}{2} =$$

$$= 12 \cdot 5 \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \underset{\pitchfork}{\underset{\parallel}{\angle AFE}} = \operatorname{tg} \angle COA = \frac{AC}{OC} = \frac{60}{12} = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = \operatorname{arctg} 5.}$$

3*) $EF \cap BC = M \Rightarrow$ т.к. $\frown + \bullet = \pitchfork$, то EM – бис-са

и высота $\Rightarrow$ медиана $\Rightarrow EC = EB$.

Также нетрудно заметить, что $EAFB$ – прямоугольник

(все углы – прямые) $\angle AFE = \pitchfork$

$$CO \cdot BO = EO \cdot AO \Rightarrow EO = \frac{CO \cdot BO}{AO} = \frac{12 \cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

$$AO = \sqrt{12^2 + 12^2 \cdot 5^2} = 12\sqrt{26}$$

$\Rightarrow EA = \frac{13}{\sqrt{26}} + 12\sqrt{26}$ или проще:

$EA = \sin(\overset{\alpha}{\operatorname{arctg} 5}) \cdot 2R$; $AF = \cos(\operatorname{arctg} 5) \cdot 2R$

$\Rightarrow S_{EAF} = \cancel{8}\frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin\alpha \cos\alpha = R^2 2 \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow$

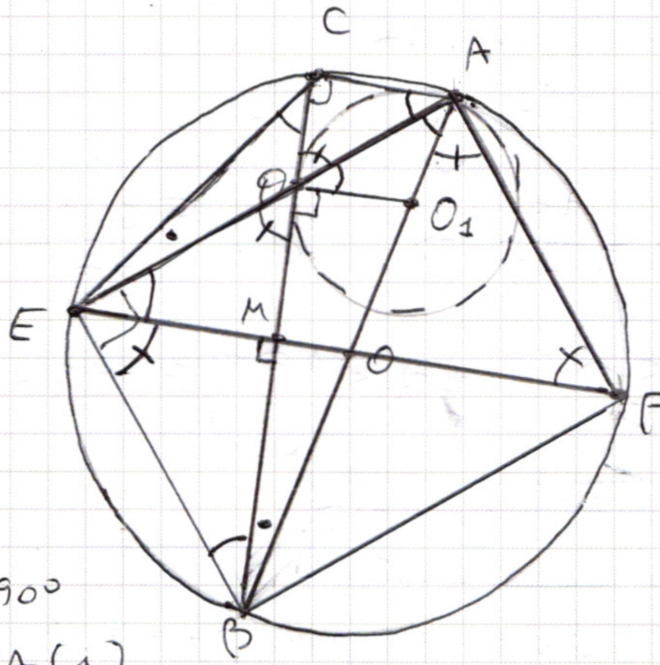
Ответ: $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$; $\operatorname{arctg} 5$; $(32{,}5)^2 \cdot 2 \cdot$

$\cdot \sin(\operatorname{arctg} 5) \cdot \cos(\operatorname{arctg} 5) = (32{,}5)^2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{26} = (32{,}5)^2 \cdot \frac{5}{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

1) O, O_1 – центры большей и меньшей окр-тей соответственно



$O_1\Theta \perp BC$ – радиус в точку касания

$O_1\Theta = O_1A \Rightarrow$

$\angle \Theta A O_1 = \angle O_1 \Theta A$

$\Rightarrow \angle ECB = \angle EAB$

Кроме того, $\angle AEB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BEF = 90^\circ - \angle FEA$ (1)

2) Докажем, что EF – диаметр. Действительно:

$\angle \Theta EF = 90^\circ - \angle C\Theta A = \angle A\Theta O_1 = \angle \Theta AB \Rightarrow$

т.к. $\angle BEF = 90^\circ - \angle FE\Theta \Rightarrow \angle EAO + \angle OAF =$

$= \angle EAO + \angle BEF = 90^\circ \Rightarrow EF$ – диаметр и $O \in EF$.

3) Теперь: из подобия $\triangle ACB$ и $\triangle BO_1\Theta$:

$$\frac{BO_1}{AB} = \frac{B\Theta}{B\Theta + C\Theta} = \frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25} \Rightarrow$$

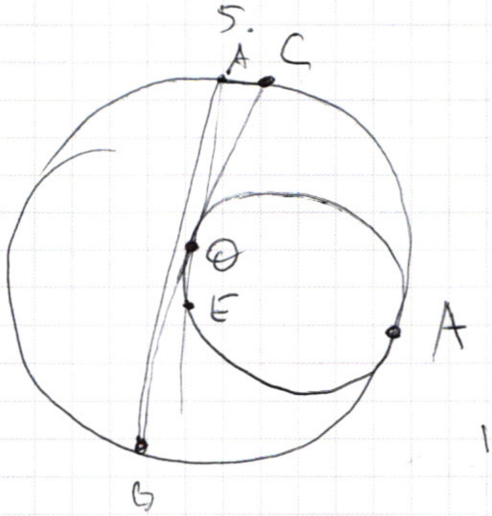
$$50R - 25r = 26R \Rightarrow 24R = 25r \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{25}{24}$$

Но из $\triangle B\Theta O_1$: $r^2 + 13^2 = (2R - r)^2 = \left(\frac{13}{12} r\right)^2 \Rightarrow$

$$r^2\left(\frac{13^2}{12^2} - 1\right) = 13^2 \Rightarrow r^2 = \frac{(13\cdot 12)^2}{(5)^2} \Rightarrow r = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5} \approx$$

$r = 31{,}2$

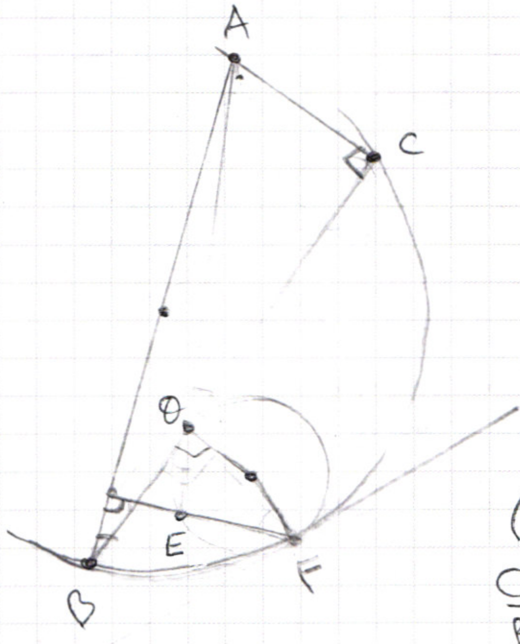
5.



12^{2+x}

$12^3+5^3 \geq 13^3$

$5^3 \vee 1\cdot 13^2+13\cdot 12+12^2$



$tg\alpha=5$ -

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin\alpha=5\cos\alpha$

$C\Theta=12 \quad 26\cos^2\alpha=1$

$B\Theta=13$

$r^2+(2R-r)^2=13^2$

Аполлониса

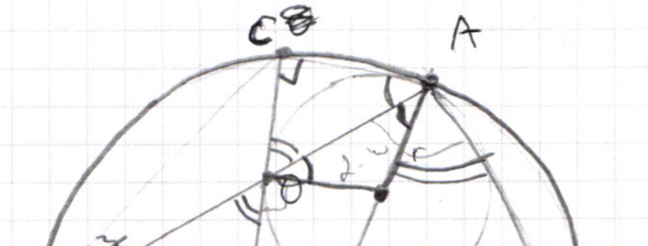
$\frac{C\Theta}{B\Theta}=\frac{AC}{AB}=$

$C\Theta=12;\ B\Theta=13$

$B\Theta=13$

$C\Theta=12;$

~~$A\Theta$~~



EF – диаметр

~~$\frac{r}{2R}=\frac{12}{25}$~~

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{25}$

$26R=50R-25r \Rightarrow$

$24R=25r \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{25}{24}$

$2-\omega=1$

$\Rightarrow 1+\omega=2$

$\Downarrow$

AEBF – прям-к

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$12^x + 5^x \geq 13^x$ для каких x.

$\frac{12^x+5^x}{2} \geq \sqrt{12^x \cdot 5^x} = 60^x$

$12^x + 5^x \geq 2 \cdot 60^x > 13^x$

Для $\forall x > 1$ для $x=1$ - тоже верно

для $x < 1$? все равно верно.

$a^p > a^e \Leftrightarrow \boxed{p > e}$ $a > 1$

$\geq \frac{12^x + 5^x}{2} \geq \sqrt{60^x} = (\sqrt{60})^x$

$2(\sqrt{60})^x > 13^x$?

$(e^x)' = (e^x)$

$(a^x)' = (e^{\ln a x})' = a^x \cdot \ln a$.

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cancel{\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} + \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cancel{\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.}$$

$$\cancel{\sin} \quad \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha = \frac{15}{17}.$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta\right) =$$

$$= -\frac{1}{17} - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta \rightarrow$$

$\sin 2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$-\frac{1}{17}-\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = \sin 2\alpha$$

$$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\ ;\ \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \left[\begin{array}{l} -1 \longrightarrow \cos 2\alpha = 0. \\ \frac{\sqrt{15}}{17}. \longrightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 225 \\ \hline 64 \end{array}$$

через $tg\,\alpha$

$$\sin 2\alpha = \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha = 2tg\,\alpha}\cos^2\alpha$$

$$\cancel{tg\,\alpha} = \|\qquad \cancel{6}$$

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1\ ;$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\cancel{tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{2}{\cos 2\alpha + 1}} - 1. \Rightarrow$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \frac{25}{34} \\ \cos^2\alpha = \frac{9}{34} \end{array}}$$

может быть только 3 значения $tg^2\alpha$

$$tg^2\alpha = \frac{34}{25} - 1 = \frac{9}{25} \qquad tg^2\alpha = 1. \rightarrow$$

$$tg^2\alpha = \frac{34}{9} - 1 = \frac{25}{9} \qquad tg\,\alpha = \pm\frac{3}{5}\ ;\ \pm\frac{5}{3}\ ;\ \pm 1.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9t^2+u^2=90 \\ u^2+36t^2-12tu=tu \end{cases}$$

$\varphi(t)=t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}$

$\varphi'(t)=1+\frac{t^{\log_5 12}}{\ln t}-\frac{t^{\log_5 13}}{\ln t}\neq 0$

$u>6t;$

$\cancel{tu>0}$

$u^2+36t^2-13tu=0 \quad |:u^2 \Rightarrow$

$u=0 \to t=..$

$\Leftrightarrow -t^{\log_5 12}+t^{\log_5 13}=1$

$36p^2-13p+1=0$

$D=25 \Rightarrow p=\frac{13\pm 5}{36\cdot 2}=\frac{8}{36\cdot 2}$ или $p=\frac{18}{36\cdot 2}$

$13^2-4\cdot 36=169-144=25$

$\sqrt{ut}=\frac{36\cdot 10}{25}=\frac{36\cdot 2}{5}=\cancel{6\sqrt{\frac{2}{5}}}\ \frac{6}{5}\sqrt{10}.$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5}+\frac{18\sqrt{10}}{5}=\frac{6\sqrt{10}}{5}!$

$9u^2+t^2\overset{?}{=}90.$

$9\cdot\frac{9\cdot 10}{25}+\frac{144\cdot 10}{25}=90!$

$810+1440\overset{?}{=}90\cdot 25$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ +\ 810 \\ \hline 2250 \end{array}$$

$9\cdot 25=$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 9 \\ \hline 225 \end{array}$$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$t>1$

$\log_t\left(t^{\log_5 12}+t\right)\geq$

$\geq\log_t(t)^{\log_5 13}=$

$=\log_5 13$

$\frac{t^{\log_5 12}+t}{2}\geq\sqrt{t^{2\log_5 12}}>$

$x^2-26x+1<0$

D_c

$26x-x^2>1 \Leftrightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$\cancel{t=-26x+x^2} \Rightarrow$ $t=26x-x^2 \Rightarrow$

$\cancel{|t|^{\log_5 12} \geq t+}$ $t^{\log_5 12}=12^{\log_5 t}$

$\boxed{\log_5 t = f}$

$|-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$\boxed{12^f+5^f \geq 13^f}$

$t>0 \Rightarrow -t<0 \Rightarrow |-t|=t$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}=t^{\log_5 13}$ $f=2$:

$144+25=169$

$\cancel{t^{\log_5 12+1} \geq 13^{\log_5 t}}$ логарифмируем:

$\cancel{t^{\log_5 60} \geq 13^{\log_5 t}}$ $f=1$ - верно

$f \leq 0$. $\cancel{f \geq 3}$ -

$\log_5 t = \dfrac{\log_{13} t}{\log_{13} 5} \Rightarrow 13^{\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^f+\left(\frac{5}{13}\right)^f \geq 1$

$t^{\frac{1}{\log_{13} 5}} =$

$13^{\log_5 t}=t^{\log_5 13}$

$\dfrac{1}{\log_{13} 5}=\log_5 13 \Rightarrow$ $\Rightarrow (13-1)^f+5^f \geq 13^f$

$12^f+5^f \geq 13^f$. логарифм по f

$\cancel{t^{\log_5 60} \geq t^{\log_5}}$ $\log_f(12^f+5^f) \geq 13$

t $t^{\log_5 60} \geq t^{\log_5 13}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\frac{1}{2^3} > \frac{1}{2^4}$!

$t>1 \rightarrow$ верно $t=1$ - неверно

$t=1 \rightarrow$ все хорошо $t>1$

$0<t<1 \rightarrow t^{\log_5 12} > t^{\log_5 13} \Leftrightarrow$

$0<t<1 \rightarrow$ $\log_5 12 < \log_5 13$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

- верно при $\forall\, 0<t<1$.

$\Rightarrow$ выполнено $\forall t \in (0;1)$.

$t=1$ - верно

$t>1$? $t>1$ - ? $\Rightarrow f>0$.

□ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

2.

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. & (2) \end{cases}$$

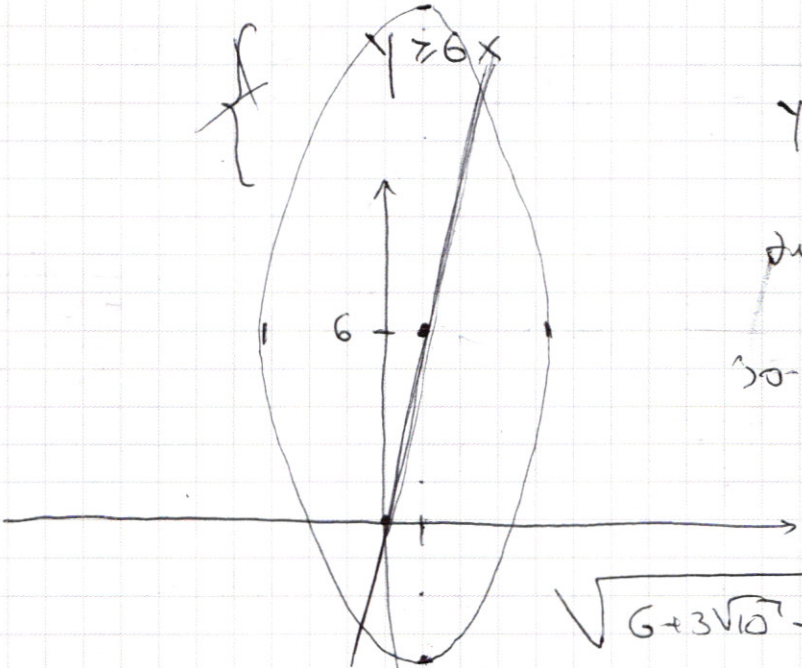
$3\sqrt{10} = \sqrt{\quad}$

(2): $(3x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 = 45 \Rightarrow$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90.$ $\qquad 3^2(x-1)^2 + 1^2(y-6)^2 = 90$

$\begin{cases} y \geq 6x \end{cases}$

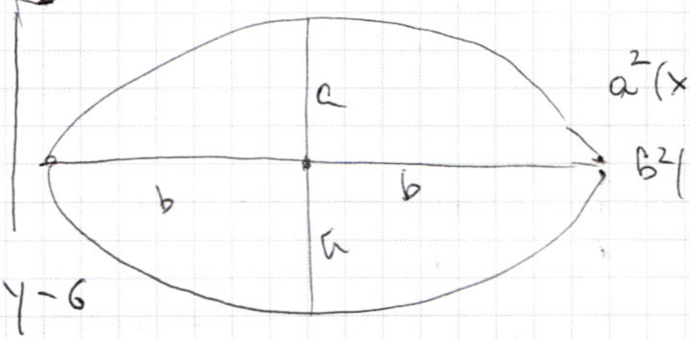
$y^2 -$



эллипс

$30 - 12 - 15 + 6 =$
$= 36 - 27 = 9 \Rightarrow$
3!

$\sqrt{6 + 3\sqrt{10} - 6 - 6 - 3\sqrt{10} + 6}$



$a^2(x-x_0)^2 +$
$b^2(y-y_0)^2 = P$

$t = x - 1;\ u = y - 6$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6.$

$x(y-6) - (y-6) = (x-1)(y-6)$

$$\begin{cases} 3^2t^2 + u^2 = 90 \\ -6t + u = \sqrt{tu} \end{cases} \to \begin{cases} \cancel{36t^2} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \left[\begin{array}{l} -1 \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = -1 \end{array}\right.$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{tg^2\alpha+1} = \cancel{\sin^2\alpha}\ \cos^2\alpha.$

$\sin\alpha$

$\cancel{\cos 2\alpha = 0; \pm\frac{8}{17}}$

$\cancel{tg\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = |\cos\alpha| \Rightarrow |tg\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$\sqrt{\frac{-\cos 2\alpha + 1}{2}} = |\sin\alpha|$

① $\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0. \Rightarrow |tg\alpha| = 1$

② $\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}. \quad |tg\alpha| = \sqrt{\ }$

$|\sin 2\alpha| = 2|\sin\alpha\cos\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos^2 2\alpha}{4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 2\alpha}{4}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-1 \quad \frac{15}{17} \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \quad ? \quad ? \quad = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

0

$\frac{15}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \pm\frac{8}{17} \cdot \left(\mp\frac{4}{\sqrt{17}}\right)!$

Оба варианта возможны.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)