МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos^2 2\beta \cdot \cos 2\alpha (tg 2\alpha + tg 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + (\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta \mp 4\sin 2\beta - \sqrt{17}\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}$

№2) $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \ (**) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} y-6x\geq 0. \\ y^2-12yx+36x^2=xy-6x-y+6 \ (*) \\ \dfrac{(x-1)^2}{10}+\dfrac{(y-6)^2}{90}=1 \end{cases}$ ~~$y-6x\geq 0.$~~

$(*)\ y^2-13yx+y+36x^2+6x-6=0.$

$y^2+y(1-13x)+(36x^2+6x-6)=0$

$D=(1-13x)^2-4(36x^2+6x-6)=$

$=1-26x+169x^2-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{13x-1+5(x-1)}{2}=9x-3 \\ y=\dfrac{13x-1-5(x-1)}{2}=4x+2 \end{array}\right. \rightarrow (y-6x\geq 0) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-3-6x\geq 0 \\ 4x+2-6x\geq 0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq 1 \end{array}\right.$

т.е. $\left[\begin{array}{ll} y=9x-3 \ ; x\geq 1 & (1) \\ y=4x+2 \ ; x\leq 1 & (2) \end{array}\right.$

$(**)$ и (1): $9(x-1)^2+(9x-3-6)^2=90.$

$9(x-1)^2+81(x-1)^2=90.$

$(x-1)^2=1$

$x=2\ ;\ x=0$

но! $x\geq 1 \rightarrow \underline{x=2}$

$\underline{y=9\cdot 2-3=15}$

$(**)$ и (2): $9(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90.$

$25(x-1)^2=90.$

$(x-1)^2=\frac{18}{5}=3{,}6.$

$x=\frac{18}{5}+1 \qquad x=1-\frac{18}{5}$

$x=\frac{23}{5}=4{,}6 \qquad x=\frac{-13}{5}=-2{,}6$

но! $x\leq 1 \rightarrow \underline{x=-2{,}6}$

$y=4x+2=4(-2{,}6)+2=$

$=\underline{-8{,}4}$

Ответ: ~~(x,y)~~ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2{,}6 \\ y=-8{,}4 \end{cases} \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Заметим, что из условия ~~log~~ существования $\log_5(26x-x^2)$,

$26x-x^2>0$, тогда $(26-x)(x)>0$ $\quad (x-26)x<0$ $\quad x\in(0;26)$

так как ветви вниз, max в вершине

Замена: $26x-x^2=t$; $t>0$. $\quad x_B=\frac{-26}{-2}=13$; $t_B=26\cdot13-13^2=13^2=169$

Итого $t\in(0;169]$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}\geq 13^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

Заметим, что $12^2+5^2=13^2$ (Пифагорова тройка).

$12^1+5^1>13^1$; $12^3+5^3<13^3 \Leftrightarrow \underset{125}{5^3}<\underset{169}{13^2}+13\cdot12+12^2$

Тогда, неравенство верно при $\log_5 t\leq 2 \rightarrow t\leq 25 \rightarrow t\in(0;25]$

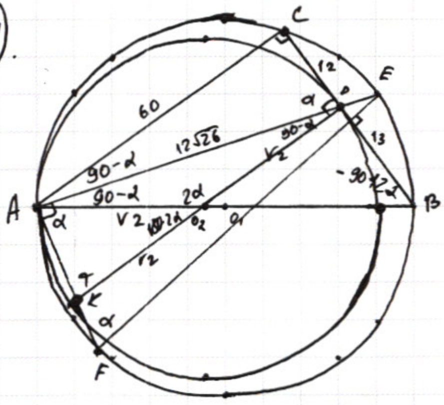
Обр. замена: $\begin{cases}26x-x^2>0\\ 26x-x^2\leq 25\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\in(0;26)\\ x^2-26x+25\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\in(0;26)\\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)\end{cases} \rightarrow$

$\left(\frac{D}{4}=13^2-25=12^2;\ x=\frac{13+12}{1}=25;\ x=\frac{13-12}{1}=1\right)$

$\rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

№4).



1 Пусть радиус Ω – r_1; ω – r_2. Доп. построение – AC. Заметим, что $\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на диаметр AB.
Д.п – O_2D, $O_2D \perp BC$.

2. По теореме Фалеса, $\frac{CD}{BD} = \frac{AO_2}{O_2B} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{12}{13} = \frac{r_2}{(r_1-r_2)+r_1} \rightarrow 24r_1 - 12r_2 = 13r_2$

$r_1 = \frac{25}{24}r_2$

3. Из $\triangle O_2DB$, $O_2B = \sqrt{13^2+r_2^2}$. ~~С другой стороны,~~ ~~$O_2B = 2r_2 - r_1$~~ Тогда $AB = r_2 + \sqrt{13^2+r_2^2}$

Но $AB = 2r_1$, тогда

$r_2 + \sqrt{13^2+r_2^2} = 2r_1$

$\sqrt{13^2+r_2^2} = \frac{25}{12}r_2 - r_2$

$13^2 + r_2^2 = \frac{13^2}{12^2}r_2^2 \rightarrow 13^2 = \frac{5^2}{12^2}r_2^2 \rightarrow$ $= 31,2$

$\rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{13^2\cdot 12^2}{5^2}} = \frac{13\cdot 12}{5} = \frac{156}{5}$

Тогда $r_1 = \frac{25}{24}\cdot\frac{156}{5} = 5\cdot\frac{26}{4} = \frac{65}{2} = 32,5$

4. $2\angle AFE = \smile AC + \smile CE = 2\angle ABC + 2\angle CAE$.

$\angle AFE = \angle ABC + \angle CAE$

$AC = \sqrt{(2r_1)^2 - 25^2} = \sqrt{4\cdot 32,5\cdot 32,5 - 25^2} = \sqrt{65^2-25^2} = \sqrt{40\cdot 90} = 60$.

Тогда $\sin\angle ABC = \frac{AC}{2r_1} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \rightarrow \cos\angle ABC = \frac{5}{13}$

$\angle ABC = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

~~$\sin\angle CAE = \frac{CD}{AD} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \rightarrow \angle CAE = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$~~

~~$CAE = \arcsin\frac{12}{13} + \arcsin\frac{1}{5}$~~ $AD = \sqrt{AC^2+CD^2} = \sqrt{60^2+12^2} = 12\sqrt{5^2+1} = 12\sqrt{26}$.

Тогда $\sin\angle CAE = \frac{12}{12\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow \angle CAE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow \cos\angle CAE = \frac{5}{\sqrt{26}}$

Тогда $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$\sin\angle AFE = \frac{12}{13}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{5}{13}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{65}{13\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \rightarrow \boxed{\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}$

Заметим, что $\sin(\angle AFE) = \cos\angle CAE$

Значит, $\angle AFE = 90° - \angle CAE = \alpha = \angle CDA$,

Тогда $\angle ADO_2 = 90 - \alpha = \angle DAO_2$, а значит $\angle AO_2D = 2\alpha$, $\angle CBA = -90 + 2\alpha$

5. $O_2D \perp BC$; $EF \perp BC \rightarrow O_2D \parallel EF$. Продлим $O_2D \cap AF = K$. Т.к. $DK \parallel AF$, то $\angle EFA = \angle AKD = \alpha$. Расс. $\triangle AKO_2 \Rightarrow$ В нем $\angle AO_2K = 180 - 2\alpha$; $\angle AKO_2 = \alpha \rightarrow \angle KAO_2 = \alpha$.
Тогда $O_2K = O_2A$ (т.к. $\angle O_2AK = \angle O_2KA$), а значит K лежит на ω.
Заметим, что $\angle DAK = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Заметим далее, что $\angle FAE = 90°$, а значит, FE – диаметр и $O_1 \in FE$.

$S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2}\cdot\sin(90-\alpha)\cdot AD\cdot DK = \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot 12\sqrt{26}\cdot 2r_2 = 31,2\cdot 12\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = 12\cdot 31,2 = 374,4$.

Заметим, что $\triangle AKD \sim \triangle AFE$ с $k = \frac{2r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow S_{\triangle AFE} = 374,4\cdot\frac{r_1}{r_2} = 374,4\cdot\frac{25}{24} =$
$= \frac{31,2\cdot 25}{2} = 156\cdot\frac{5}{2} = \underline{390}$

Ответ: 1. $r_\Omega = 32,5$; $r_\omega = 31,2$

2. $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

3. $S_{AFE} = 390$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6). $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ при всех $x \in (\frac{2}{3}; 2]$.

$y_1(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$; асимптоты: $y=-2$, $x=\frac{2}{3}$; $y_1(\frac{2}{3}) \notin \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}+0} y_1 \to +\infty$

ф-ция дробно-линейная
ф. гипербола

$y_1(2) = -1$ $y_1 = 0 \to x = \frac{4}{3}$

$y_2(x) = 18x^2-51x+28$ - парабола
ф. квадратичная
ветви вверх

$x_B = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

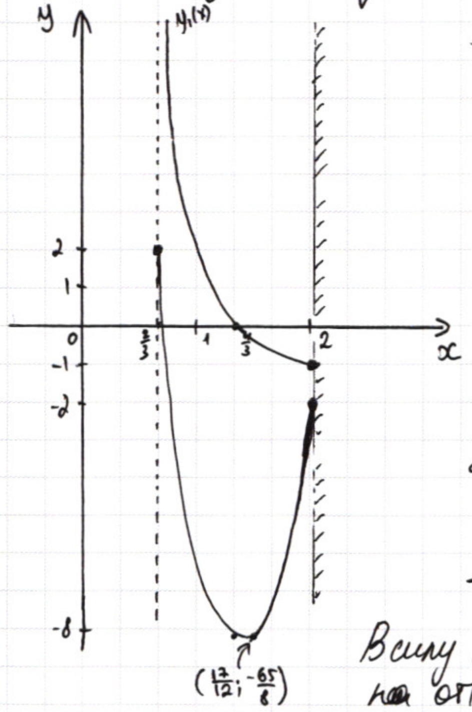
$y_B = 18\cdot\frac{17^2}{12^2} - 51\cdot\frac{17}{12} + 28 = \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = -\frac{17^2}{8} + 28 =$

$= \frac{28\cdot 8 - 17^2}{8} = \frac{160+64-289}{8} = \frac{-65}{8}$

$y_2(\frac{2}{3}) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$y_2(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 100 - 102 = -2$

Построим $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на $x \in (\frac{2}{3}; 2]$



Как видим, прямая $y = ax+b$ должна иметь в $x=\frac{2}{3}$ значение $y \in [2; +\infty)$; в $x=2$; $y \in [-2; -1]$

Но при этом ~~она~~ она может только касаться графика $y_1(x)$, не пересекая его.

~~Пусть $ax+b$ $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2;$~~

~~Очевидно, в силу выпуклости вниз графика $y_1(x)$~~

Заметим, что если $ax+b$ проходит через $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2; -2)$, то $\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a+b \end{cases} \to \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \to y_3(x) = -3x+4$, то

$-3x+4 = \frac{4}{3x-2} - 2 \to \frac{4}{3x-2} + 3x - 6 = 0 \to \frac{4+(3x-6)(3x-2)}{3x-2} = 0$

$\frac{9x^2-18x-6x+12+4}{3x-2} = 0.$

$\frac{9x^2-24x+16}{3x-2} = 0.$

$\frac{(3x-4)^2}{3x-2} = 0 \to x = \frac{4}{3}$

одна точка пересечения, т.е. $y_3 = -3x+4$ только касается y_1 и является решением.

В силу монотонного убывания $y_1(x)$ на отрезке $x \in (\frac{2}{3}; 2]$, $y_0 = ax+b$ может иметь не более одной общей точки с $y_1(x)$, ~~[illegible]~~ на отрезке $[\frac{2}{3}; 2]$.

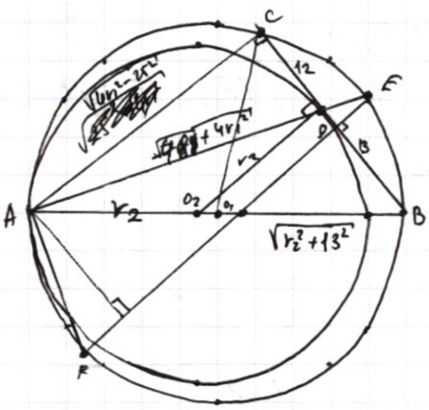
При этом, конечно, $y_3 = -3x+4$ - наиболее 'низко' расположенный график ф-ции $y_0(x)$, удовлетворяющий условию. При этом он всё равно касается $y_1(x)$. Значит любое 'поднятие' этой ф-ции вверх дает уже более ~~[illegible]~~ точки ~~[illegible]~~ касания, а значит уже не будет удовлетворять условию.

Ответ: $(a; b) = (-3; 4)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{180} = 180 - 2\alpha + 90 + \beta$

$r_1 - ?$
$r_2 - ?$
$\angle AEF - ?$
$S_{AEF} - ?$

$\beta = 90 - 2\alpha$

$\frac{r_2}{2r_1 - r_2} = \frac{12}{13}$

$2r_1 - r_2$

$13r_2 = 24r_1 - 12r_2$

$\frac{12}{13} = \frac{r_2}{2r_1 - r_2}$

$25r_2 = 24r_1$

$24r_1 - 12r_2 = 13r_2 \rightarrow \boxed{r_1 = \frac{25}{24} r_2}$

$13 \cdot 12 = 156$, $\frac{13}{156}$

$\frac{13}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2}$

$156^2 \mid 24$

$156 : 26 = 6$

$31{,}2$, $32{,}5$, $\frac{26}{4}$

$27 \cdot 27 = 729$

28^2

$4r_1^2 + 25^2 + 12^2 = AH^2$
$4r_1^2 + (12-25)(12+25) = AH^2$
$4r_1^2 - 13 \cdot 37 = AH^2$
$(40+3)(40-3)$
$400 + \cancel{1600} - 9$
481

$12^2 + 25^2 - 4r_1^2$

$144 + 625 = 769$

$625 - \frac{25}{24}$

$600 - 14$
576

$r_2^2 + r_2^2 - 2r_2^2 \cos 2\alpha = 769 - 4 \cdot \frac{625}{576} r_2^2$

$-2r_2^2 \cos 2\alpha = 769 - \frac{337}{144} r_2^2$

$\frac{625}{144} r_2^2$

$\frac{4}{24^2} = \frac{1}{6 \cdot 24}$

$S = \frac{abc}{4R}$

$r_2 + \sqrt{r_2^2 + 13^2} = \frac{25}{12} r_2$

$\sqrt{r_2^2 + 13^2} = \frac{13}{12} r_2$

$r_2^2 + 13^2 = \frac{13^2}{12^2} r_2^2$

$13^2 = \frac{13^2 - 12^2}{12^2} r_2^2$

$169 - 144 = 25^2$

$\frac{625 - 288}{144}$

$120 + 74$

$625 - 288 = 337$

$25 + 312$

sin

$31{,}2 \cdot 12 = 374{,}4$

$1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{25}$

$374{,}4 - 240 = 134{,}4$

$\cancel{12} - 31{,}2 \cdot \frac{25}{\cancel{24}} \cdot 2 = 31{,}2$

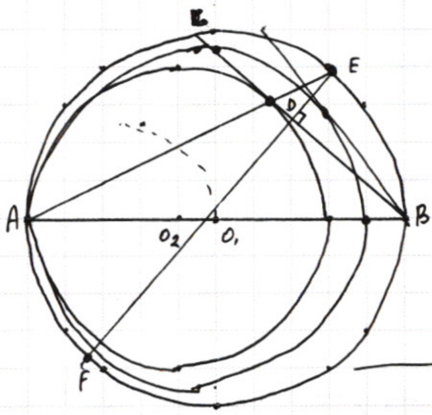
$31{,}2 \times 5$

$150 + 5 + 1$
156
$78 \cdot 5 =$
$350 + 40$

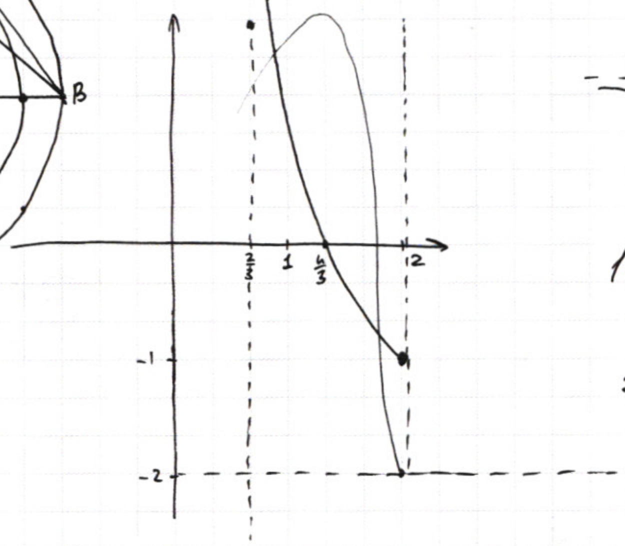
$78 \cdot 5$
350

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

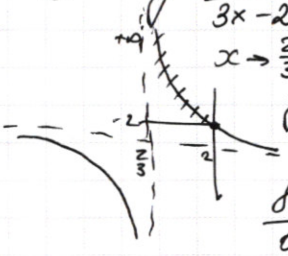
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$-\left(\frac{6x-8}{3x-2}\right) = -\left(2 - \frac{4}{3x-2}\right)$ $\frac{4}{3x-2} - 2$



$y = \frac{8-6x}{3x-2}$



$x \to \frac{2}{3}+0$

$y = \frac{8-4}{+0} = \frac{4}{+0}$

$\frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{2} = -2$

$18x^2 - 51x + 28 = 0.$

$x_B = \frac{51}{36} = \frac{17\cdot 3}{12\cdot 3} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

$x =$

$\frac{8-6x}{3x-2}$: $x \to +\infty$

$\frac{-6x}{3x} = -2$

$\frac{4}{6-2} - 2$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\\\hline 289\end{array}$

$-\begin{array}{r}289\\224\end{array}$

$\frac{89}{24} = 65$

$2\cancel{18}\cdot\frac{4}{\cancel{9}} - \cancel{17}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + 28$

$8 - 34 + 28$

$36 - 34 = 2$

$72\ \cancel{18} - 102 + 28$

$\cancel{4}\ -2$

$18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28$

$8 - 17\cdot 2 + 28 = 36 - 34$

$y_2(2) =$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28$

$40 + 32 + 28 - 102$

$18\frac{17^2}{12^2} - 51\cdot\frac{17}{12} + 28$

$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{\cancel{18}\cdot 17^2}{\cancel{144}\ 8} - \frac{3\cdot 17^2}{12} + 28$

$\frac{17^2}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 28$

$28 - \frac{17^2}{8}$

$\frac{28\cdot 8 - 17^2}{8} =$

$\frac{160+64-169}{8} = \frac{64-9}{8}$

$\frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$

$\cancel{\frac{8-6x}{3}}\left(\frac{4}{3x-2} - 2\right)'$

$\frac{3\cdot 4}{(3x-2)^2} = \frac{12}{(3x-2)^2}$

$ax + b = \frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{8-6x-(ax+b)(3x-2)}{3x-2} =$

$\frac{8-6x-3ax^2-3bx+2ax+2b}{3x-2} = 0$

$y = ax + b$

$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a + b. \end{cases}$

$4 = \frac{2}{3}a - \frac{6}{3}a$

$4 = -\frac{4}{3}a$

$\boxed{a = -3}$

$b = -2 - 2(-3) = 4$

$y = -3x + 4$

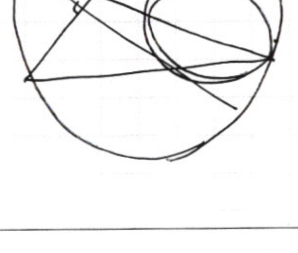
$3ax^2 + x(6 + 3b - 2a) - (8 + 2b) = 0.$

$D = 36 + 9b^2 + 4a^2 - 36b - 12ab - 24a + 12a(8+2b)$

$36 + 9b^2 + 4a^2 - 36b - 12ab - 24a + 96a + 24ab$

$9b^2 + 4a^2 - 36b + 36 + 12ab + 72a$

$\cancel{3}\ (3b)^2 + (2a)^2 + (6)^2 - 2\cdot 3b\cdot 6 + 2\cdot 3b\cdot 2a +$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

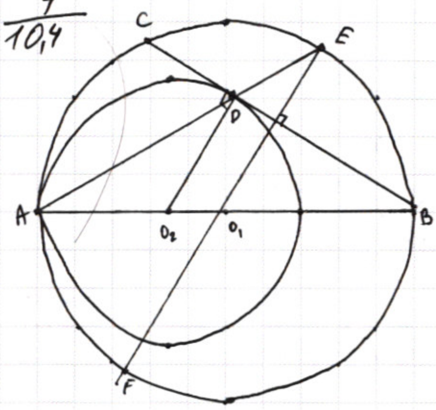
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\times\begin{array}{r}26\\4\end{array}$ $\overline{10{,}4}$

$-10{,}4+2=-8{,}4$



$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$72+18$

$15-2\cdot6=\sqrt{30-12-15+6}$

$3=\sqrt{18-9}$

$y^2-12yx+x^2 36=xy-6x-y+6$

$y-6x \qquad x-1 \qquad y-6.$

$\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(x^2-1)+(y^2-36)-18x-12y=0.$

$9(x-1)(x+1)+(y-6)(y+6)-18(x-1)-12(y-6)=90.$

$9(x-1)^2\cancel{(x+1-2)}+(y-6)^2\cancel{(y+6-12)}=90$

$4\le x\le 28$

$4\le y\le 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0.$

$f(1)=0.$ $\qquad f(ab)=f(a)+f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0?$

$f(2)=0.$ $\qquad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ – p-простое

$f\left(\frac{4}{x}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{x=2}$

$0=0+\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right)=0}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$

$f(3)=0.$

$f(4)=0.$

$f(5)=1$

$f(6)=0.$

$f(7)=1$

$f(8)=0.$

$f(11)=2$

$f(9)=0.$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(1)=0$ $\quad$; $\cancel{f(4)}=1$

$\cancel{f(2)}$ $f(8)=2$ ..

$f(12)=3$

$f(16)=4$

$\cancel{f(4)=f(1)+f(4)}$

$f(2)+\cancel{f(2)=f(4)}?$

$y^2-12y+(9x^2-18x-45)=0.$

$D=144-4(9x^2-18x-45)=$

$=36(4-x^2+2x+5)$

$144-36x^2+36\cdot2x+180=$

$=36(4-x^2+2x+5)=$

$=36(-x^2+2x+9)$

$f(10)=1$

$f(12)=0$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0.$

$f(18)=0.$

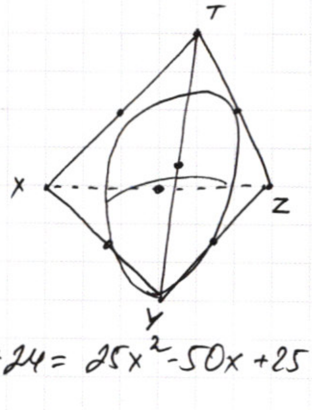
$y=\dfrac{12\pm6\sqrt{-x^2+2x+9}}{2}$

$y=6\pm3\sqrt{-x^2+2x+9}$

$y=6\pm3\sqrt{10-(x-1)^2}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)\left(\pm3\sqrt{10-(x-1)^2}\right)}$

$\begin{cases}(y-6x)^2=(x-1)(y-6)\\(x-1)(y-6)\ge0.\end{cases}$



$y^2-12yx+36x^2=xy-6x-y+6$

$\cancel{y^2-13yx}$ $y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0.$

$D=(1-13x)^2-4(36x^2+6x-6)=$

$=1-26x+\underbrace{169x^2-144x^2}-24x+24=25x^2-50x+25$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Черновик

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36$ $\quad (3x-3)^2=9x^2-18x+9$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y^2-13yx+36x^2+6x+y-6=0.$

1
2 ✓
3 ✓
4 ✓
5
6 ✓
7

$(x^2-26x)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена $x^2-26x=t$; $\quad \cancel{26}\, 2\cdot13\cdot13-13\cdot13=13\cdot13$

$x_B=\frac{26}{2}=13$

$t_B=$

$13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}\leq t$ $\quad \cancel{\log_5 t=y}$

$t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}\leq t$ $\quad t=5^y$

$t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}\leq$ $\quad 13^y-12^y\leq 5^y$

$t^{\log_5 5}$

$\times\begin{array}{r}28\\18\\ \hline 224\\28\\ \hline 504\end{array}\times 4=2016$

$12^3+5^3\geq 13^3$ $\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$5^3\geq 13^3-12^3$

$5^3\geq (13^2+13\cdot12\cdot12^2)$ $\quad t\leq 5^2$

125

$25^{\log_5 12}+26\geq 1+13^{\log_5 2}$

$x^2-26x+25\geq 0$

$\frac{D}{4}=13^2-25=12^2$ $\quad 12^2+25\geq 13^2$

$x=$

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$ $\quad x\in(\frac{2}{3};2]$

$D=51^2-4\cdot18\cdot28$

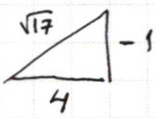
$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad (y-6x)^2=xy-6x-y+6$

$(51)^2=$
$(50+1)^2=$
$2500+100+1$
$=2601$

$\cos 2\beta+\underbrace{\cos(2\alpha+2\beta)}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

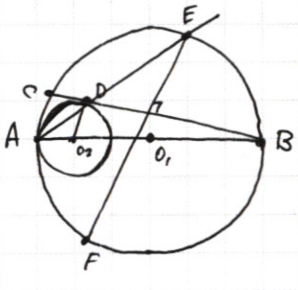
$\pm\cos(2\alpha+2\beta)=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad 2601-2016$

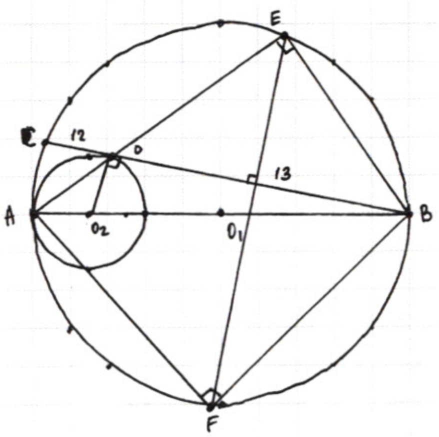
$601-16=600-15=$
$=585$



$585 \mid 5$
117

$117\cdot5$
$9\cdot13\cdot5$





☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)