МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

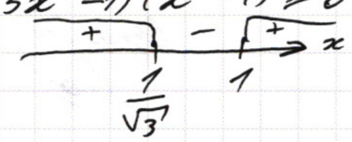
$\sqrt{9\log_{3x^2} x} \le -3\log_{9x^3} x$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -3\log_{9x^3} x$

$\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x$

Найдём ограничения на x:

$\begin{cases} x>0 \\ 3x^2 \ne 1 \\ 9x^3 \ne 1 \\ \log_{3x^2} x^9 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ ~~сист~~ последнее равносильно $(3x^2-1)(x^9-1) \ge 0$



$x \in (-\infty; \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1; +\infty)$.

Итого: $\begin{cases} x>0 \\ x \ne \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \ne \pm\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ x \in (-\infty; \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$ т.к. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \vee \frac{1}{\sqrt{3}}$

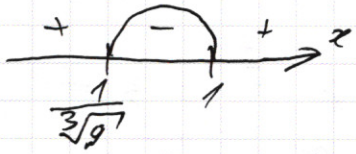
$\frac{1}{9} < \frac{1}{3\sqrt{3}}$, то $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x \in (0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty)$

Рассм-им случай $-\log_{9x^3} x = 0 \Rightarrow x = 1$:

$\sqrt{\log_3 1} \le -\log_9 1$, верно.

Далее, решения будут существовать только при $-\log_{9x^3} x > 0$, то есть $\log_{9x^3} x < 0$, что равносильно $(9x^3-1)(x-1) < 0$



$x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1)$.

Учитывая ограничения на x, решения (кроме $x=1$) будут возможны при $x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Т.к. мы рассматриваем $-\log_{9x^3} x > 0$, то можем возвести в квадрат.

$$\log_{3x^2} x \le \log^2_{9x^3} x;$$

Чтобы перейти к общему основанию, воспользуемся $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\frac{1}{\log_x 3x^2} \le \frac{1}{\log^2_{x} 9x^3}$$ [новое огр. $x \neq 1$, но оно учтено, т.к. мы расм-ем $x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

~~Равносильно~~ $\cancel{\log_x 3x^2 \geq \log^2_x 9x^3}$, ~~т.к.~~ $\cancel{\log_x 3x^2}$ ~~на расм-ом промежутке~~ $\cancel{>0}$, ~~то можем поделить на~~

$\cancel{\log_x 9x^3}$ $\cancel{\log_x 3x^2}$

$$\cancel{\frac{\log_x 3x^2}{\log_x 9x^3} \geq \log_x 9x^3}$$

~~Итого~~

Что равносильно $\log_x 3x^2 \geq \log^2_x 9x^3$;

$$\log_x 3 + 2 \geq (\log_x 9 + 3)^2;$$

$$\log_x 3 + 2 \geq \log^2_x 9 + 6\log_x 9 + 9;$$

$$4\log^2_x 3 \cancel{-\log_x 3} + 12\log_x 3 - \log_x 3 + 7 \le 0$$

Пусть $t = \log_x 3$, тогда $4t^2 + 11t + 7 \le 0$

$$(t+1)(4t+7) \le 0$$

$$\overset{+}{\longrightarrow} -\tfrac{7}{4} \overset{-}{\longrightarrow} -1 \overset{+}{\longrightarrow} t$$

$t \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right]$, вернёмся к замене $\begin{cases} \log_x 3 \geq -\frac{7}{4} \\ \log_x 3 \le -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^{-\frac{7}{4}} \le 3 \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{4}{7}}} \le 3 \Rightarrow \sqrt[7]{x^4} \le \frac{1}{3} \Rightarrow x^4 \le \left(\frac{1}{3}\right)^7 \Rightarrow x \in \left[-\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^7}; +\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^7}\right] \\ x \le \frac{1}{3} \end{cases}$

Итого $x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3}\right] \cup \{1\}$. (ранее получен)

$\boxed{\text{Ответ: } x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3}\right] \cup \{1\}.}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 Пусть наше число $= \overline{abcdefg}$

Число 12828 может быть получено, при последов. степ. двойки, несколькими способами:

1) $\overline{g}+\overline{fg}+\overline{efg}$
2) $\overline{fg}+\overline{efg}+\overline{defg}$
3) $\overline{efg}+\overline{defg}+\overline{cdefg}$
4) $\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}$
5) $\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}+\overline{abcdefg}$
6) $\overline{bcdefg}+2\cdot\overline{abcdefg}$
7) $3\cdot\overline{abcdefg}$

~~невозможны, т.к.~~ т.к. число семизн., то $a \neq 0$, а значит сумма $>$ пятизначн. числа, которым 12828 является.

• Начнём с 4 варианта:

$b=0$, т.к. иначе сумма шестизначная $>$ пятизначн. 12828.

Сумма $= 3g+30f+300e+3000d+20000c+\cancel{b} = 12828$

отсюда $c=0$, $d=1$ невозм., т.к. $300e+30f+3g < 9828$ т.к. b, c, d, e, f, g от 0 до 9. (a от 1 до 9)

Тогда аналогично $d \neq 2$,

$d=3 \Rightarrow 3g+30f+300e=3828$

$\left.\begin{array}{l} e=8: \ 3g+30f=1428, \text{ невозм.} \\ e=9: \ 3g+30f=928, \text{ невозм.} \end{array}\right\} \Rightarrow d \neq 3$

$d=4 \Rightarrow 300e+30f+3g=828$, $30f+3g \leq 297$, тогда

$e=2 \Rightarrow 30f+3g=228 \Rightarrow f=7, g=6$

$\overline{a004276}$, a может быть любым (но не ноль)

Итого 9 вариантов в этом случае

• Рассм-им 3 случай

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c = 12828$

C либо 0, либо 1

• $C = 0 \Rightarrow \underbrace{2000d + 300e + 30f + 3g}_{} = 12828$

$\le \cancel{3000}\ 2997$, тогда $d = 5$ либо $d = 6$

• $d = 5 \Rightarrow 300e + 30f + 3g = 2828$

$e = 9 \Rightarrow \cancel{f = 4 \Rightarrow g = 6}$

$30f + 3g = 128$

при $f = 3$, $g > 9$
при $f = 4$, $3g = 8$
} невозм. $\cancel{e \ne 0}$ $d \ne 5$

• $d = 6 \Rightarrow 300e + 30f + 3g = 828$

$e = 2 \Rightarrow f = 7 \Rightarrow g = 6$ √

$\overline{ab06276}$, ~~9·9 = 81 вариа~~ a от 1 до 9, b от 0 до 9

9·10 = 90 вариантов

• $C = 1 \Rightarrow 2000d + 300e + 30f + 3g = 2828$

Если $d = 0$, то $300e + 30f + 3g = 2828$, что невозм. (доказано выше)

Если $d = 1$, то $300e + 30f + 3g = 828$,

случай разобран выше, $\overline{ab1\cancel{3}1276}$, 90 вариантов

• Рассм-им 2 случай

$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = \underbrace{3g + 30f + 200e + 1000d}_{\le 9000 + 1800 + 270 + 27 = 1197} = 12828$

Случай невозможен.

• Аналогично со 2ым невозможен 1 случай

$3g + 20f + 100e < 12828$

• Итого чисел $90 + 90 + 9 = 189$

$\boxed{\text{Ответ: 189 чисел.}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$

~~Пусть~~ Вычтем из первого второе

$$13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} - y - \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 + 124$$

$$13x - y = 216$$

$$y = 13x - 216$$

Пусть $a = 13x$, тогда $y = a - 216$

Подставим y в первое

$$a + \sqrt[3]{a^2 - (a-216)^2} = 92$$

$$a + \sqrt[3]{2\cdot 216a - 216^2} = 92$$

$$a + \sqrt[3]{216(2a-216)} = 92$$

$$a + 6\sqrt[3]{2a-216} = 92$$

$$6\sqrt[3]{2a-216} = 92 - a \quad | \text{ возведём в третью степень}$$

$$216(2a-216) = (92-a)(92^2 - 184a + a^2)$$

$$2\cdot 216a - 216^2 = 92^3 - 2\cdot 92^2 a + 92a^2 - 92^2 a + 2\cdot 92 a^2 - a^3;$$

перенесём в левую часть

$$a^3 + (3\cdot 92^2 \cancel{a} + 2\cdot 216)a - 3\cdot 92a^2 - 216^2 - 92^3 = 0$$

$$a^3 + \cancel{825344a} - 3\cdot 92a^2 - 825344 = 0$$

$\cancel{78}$

$+ 25824a$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 8464 \\ 3 \\ \hline + 25392 \\ 432 \\ \hline 25824 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 92 \\ 92 \\ \hline 184 \\ + 828 \\ \hline 8464 \\ \times 92 \\ \hline + 16928 \\ 76176 \\ \hline 778688 \\ + 46656 \\ \hline 825344 \end{array}$$

$$a^3 - 3\cdot 92a^2 + 2\cdot 12912a - 825344 = 0$$

Разложим 825344 на множители.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$825344 = 2^5 \cdot 25792 = 2^6 \cdot \cancel{1289}\, 12896 = 2^7 \cdot 6448 = 2^8 \cdot 3224 =$

$= 2^9 \cdot 1612 = 2^{10} \cdot 806 = 2^{11} \cdot 403$

то же самое сделаем с $2 \cdot 12912 = 2^2 \cdot 6456 = 2^3 \cdot 3228 =$

$= 2^4 \cdot 1614 = 2^5 \cdot 807$

Итого наше выражение примет более удобный вид для определения корней

$$a^3 - \cancel{3 \cdot 46}\, 3 \cdot 2^2 \cdot 23 a^2 + 2^5 \cdot 807 a - 2^{11} \cdot 403 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) & (1) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases}$

▷ Рассм-им (2):

Заметим, что $\cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) =$

$= 2\left(\frac{1}{2}\cos(2x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y)\right) = 2\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)$

Тогда второе уравнение принимает вид

$$2\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

▷ Рассм-им правую часть (1):

$$7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) = 7\left(\cos y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right) =$$

$$= -7\left(\frac{1}{2}\cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда вся система принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) & (1) \\ \sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases}$$

~~Сложив уравнения~~

~~▷ Рассм-им левую часть первого:~~

~~$\sqrt{3}\cos(x-y) = \sqrt{3}(\cos x\cos y + \sin x\sin y)$~~

▷ Находимое нам $= \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y} =$

$= \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$.

В (1) $\cos(x-y) = \dfrac{-7\sin(y+\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}}$, тогда $\sin(x-y)$

принимает значение $\sqrt{1-\dfrac{49\sin^2(y+\frac{\pi}{6})}{3}}$

$\cos x \cos y$ же можно выразить также из $\cos(x-y)$,

$\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\Downarrow$

$\cos x \cos y = \cos(x-y) + \sin x \sin y$

$\cos x \cos y = \dfrac{-7\sin(y+\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}} + \sin x \sin y$

Тогда $tg x - tg y$ принимает вид $\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{49\sin^2(y+\frac{\pi}{6})}{3}}}{\dfrac{-7\sin(y+\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}} + \sin x \sin y}$

○ Рассм-им левую часть второго уравнения:

$\sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = \sin(2x)\cos(y+\frac{\pi}{6}) - \sin(y+\frac{\pi}{6})\cos 2x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5) $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

(1) $\sqrt{3}(\cos x\cos y + \sin x \sin y) = 7\left(\cos y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin y\right)$

(2) $\cos 2x\cos y + \sin 2x\sin y + \sqrt{3}\sin 2x\cos y - \sqrt{3}\sin y\cos 2x =$

$= 12\left(\sin y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos y\right)$

~~$\cos 2x\cos y$~~ $+\sin 2x \sin y$

(2) $2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos(2x-y) + \cos\frac{\pi}{6}\sin(2x-y)\right) =$

$= 2\left(\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ~~$= 24\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$~~

$2\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$;

$\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$;

№3) $\overline{abcdefg}$

три послед степени десять => наше число имеет такие варианты $\overline{g}+\overline{fg}+\overline{efg}$

$\overline{fg}+\overline{efg}+\overline{defg}$

$\overline{efg}+\overline{defg}+\overline{cdefg}$

~~$\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}$~~
~~$\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}+\overline{abcdefg}$~~ } невозм т.к. 12828 ~~тя~~ пятизн.

1) $3g+20f+100e=$ ~~48~~ 12828

2) $3g+30f+200e+1000d=12828$

3) $3g+30f+300e+2000d+10000c=12828$

c имеет ~~один~~ два вариант $=1$ либо 0

$tg x - tg y =$

$= \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y}$

$= \sin(x-y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2-y^2} = -124 \end{cases}$

$\cancel{13x=}$
$13x - 92 = y + 124$
$y = 13x - 216$

$\cancel{13x + \sqrt[3]{13^2x^2 - y^2} = 92}$

$\cancel{13x = a,\ y = b}$

$\cancel{a + \sqrt[3]{a^2-b^2} = 92}$
$\cancel{b + \sqrt[3]{a^2-b^2} = -124}$

$13x - y = 216$

$y = 13x - 216$

в (1) $13x + \sqrt[3]{\cancel{169x^2} - \cancel{169x^2} + 432x\cdot 13 - 216^2} = 92$

$13x + \sqrt[3]{216(26x-216)} = 92$

$13x + 6\sqrt[3]{26x - 216} = 92$

$13x - 92 = -6\sqrt[3]{26x-216}$

$(13^2x^2 - 2\cdot 92\cdot 13x + 92^2)(13x - 92) = 216(26x - 216)$

$\cancel{169x^2 - 26\cdot 92}$

$169\cdot 13x^3 - 2\cdot 92\cdot 13^2x^2 + 13\cdot 92^2x \cancel{+ 2\cdot 92\cdot 13x\cdot 92} - 13^2\cdot 92x^2 +$

$+ 2\cdot 92^2\cdot 13x - 92^3 = 216\cdot 26x - 216^2;$

$169\cdot 13x^3 - 3\cdot 92\cdot 13^2x^2 + 3\cdot 13\cdot 92^2x - 92^3 = 216\cdot 13\cdot 2x - 216^2$

$169x^2 - y^2 = (13x+y)(13x-y) = (13x + 13x - 216)\cdot 216 =$

$= 2\cdot 216(13x - 108)$

$\cancel{72}$

$\cancel{13^3x^3 - 2\cdot 92\cdot 13^2x^2 + 13\cdot 92^2x - 13^2\cdot 92x^2}$

$\cancel{13^3x^3 - 3\cdot 92\cdot 13^2x^2}$

$13^3x^3 - 3\cdot 92\cdot 13^2x^2 + 3\cdot 92^2\cdot 13x - 92^3 - 2\cdot 13\cdot 216x + 216^2 = 0;$

$(3\cdot 92^2 + 2\cdot 216)x$

$\cancel{(13x - 92)(13x}$

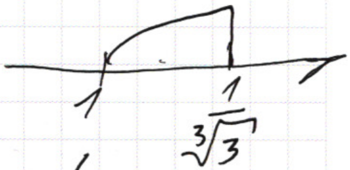
№2) $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$ $\quad x>0$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le \cancel{-\log_{\frac{(3x^2)^2}{x}} x^3}$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -3\log_{9x^3} x$

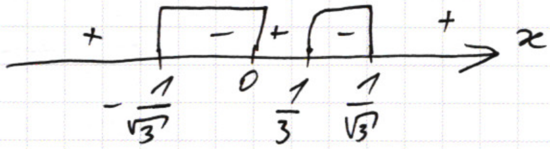
$\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x$

$(9x^3-1)(x-1) \le 0$



$(3x^2-1)(x-3x^2) \ge 0$

$x(3x^2-1)(3x-1) \le 0$

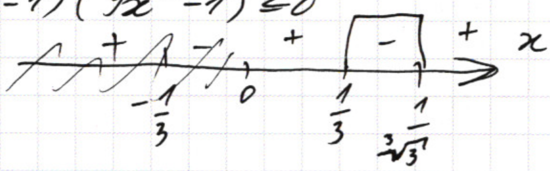


$\cancel{x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0]} \cup [\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

$\log_{9x^3} x \ge 1$

$(9x^3-1)(x-9x^3) \ge 1$

$x(9x^3-1)(9x^2-1) \le 0$



$825344 \,/\, 92$

$825344 = 2\cdot 412672 = 2\cdot 2\cdot 206336 = 2\cdot 2^2\cdot 103168 = 2\cdot 2\cdot 2^2 \cdot 51584 = 2^5 \cdot 25792 =$

$\log_{9x^3} x \ge 0$

при $x \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}]$

⇓

$-\log_{9x^3} x \le 0$

при $x \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}]$

⇓

$-\log_{9x^3} x \ge 0$

~~при $x \in [0;$~~

$x = \frac{1}{3}$: $\sqrt{\log_{3\cdot\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{3}\right)^9} \vee \log_{9\cdot\frac{1}{27}} 27$

$\sqrt{9} \vee -3$

$3 \ge -3$

при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) $\sqrt{\dfrac{1}{\log_{x^9} 3x^2}} \le \dfrac{1}{\log_{x^{-3}} 9x^3}$

$\sqrt{\dfrac{2}{\log_{x^3} 3x^2}} \le -\dfrac{1}{\log_{x^3} 9x^3}$

$-\dfrac{1}{\log_{x^3} 9+1}$

$\log_{x^3} 9x^3 \le 0$

$(9x^3 - x^3)(x^3-1) \le 0;$

$\cancel{x>0}$ $(8x^3-1)$

$\cancel{x>0,\ x<1}$

$+\ -\ +$, 0, $\frac{1}{2}$

$\dfrac{2}{\log_{x^3} 3x^2} \le \dfrac{1}{\log^2_{x^3} 9x^3}$

$\log_{x^3} 9 < -1$

$\dfrac{2\log^2_{x^3} 9x^3 - \log_{x^3} 3x^2}{\log_{x^3} 3x^2 \log^2_{x^3} 9x^3} \le 0;$

$x>0 \quad x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$2\log_{x^3}$

$276 = 2\cdot 138 =$

$= \cancel{4\cdot 42}\ 2\cdot 2\cdot 69 =$

$= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 23$

$a = 13x,$

$\begin{cases} a + \sqrt[3]{a^2-y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{a^2-y^2} = -124 \end{cases}$,

$92 - a = -124 - y;$

$y = a - 216$

$787584 =$

$= 2\cdot 393792 =$

$= 2^2\cdot 196$

$a + \sqrt[3]{a^2 - a^2 + 432a - 216^2} = 92$

$432a - 216^2 = (92-a)^3 = (92^2 - 184a + a^2)(92-a)$

$2(92-a)$

$432a - 216^2 = 92^3 - 92\cdot 184a + 92a^2 - 92^2 a + 184a^2 - a^3$

$432a - 46656 = 8464\cdot 92 - \cancel{92^3 a} + 276a^2 - a^3;$

$(92^3 + 92^2)a$

$\cancel{184}$

$a^3 - 276a^2 + (92^3 + 92^2 + 432)a - 825344 = 0$

$a^3 - 276a^2 + 787584a - 825344 = 0$

92×92: 184, 828, 8464

$8464 \times 92 = 16928 + 76176 = 778688$

$778688 + 46656 = 825344$

216×216: 1296, 216, 432, 46656

$778688 + 8464 = 787152$

$-216 \,|\, 13$: 13, 86, 1

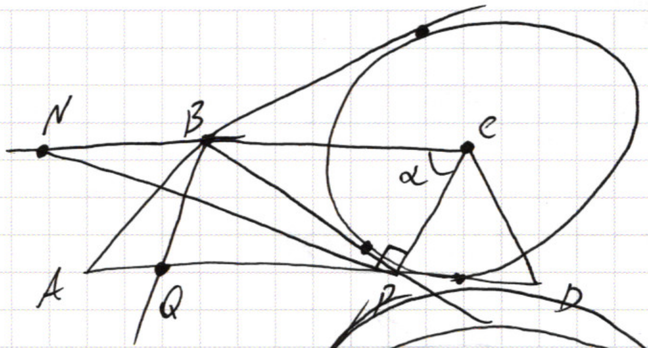
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

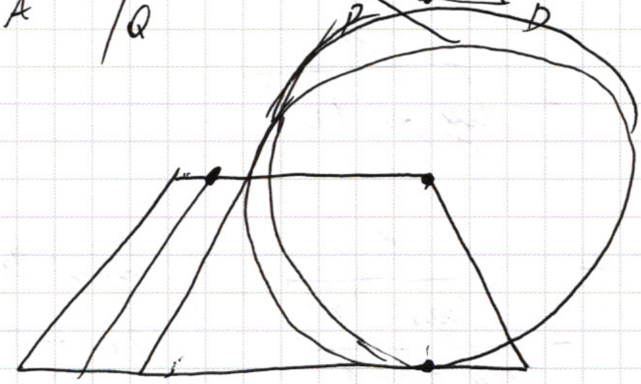
№4)

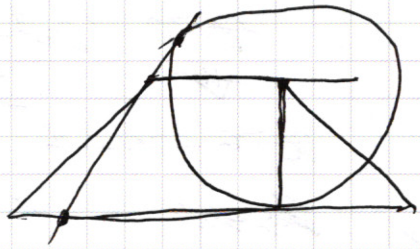


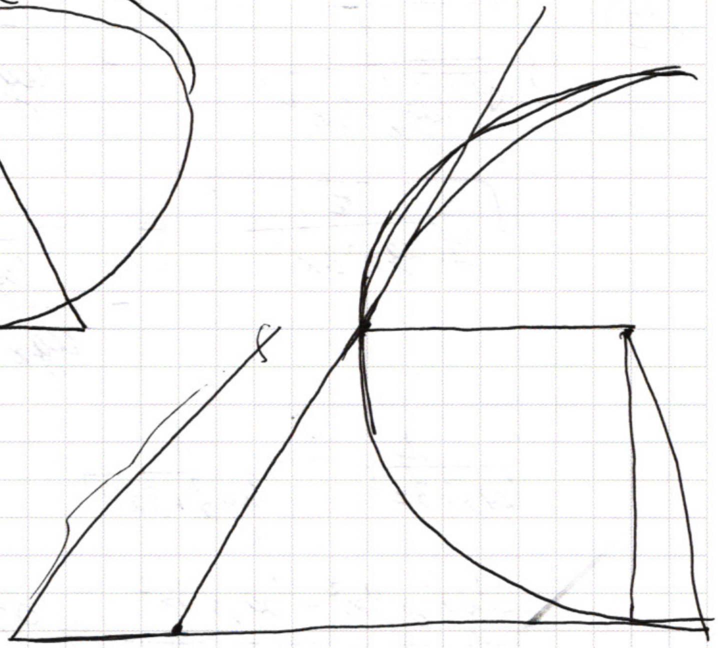
$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{15}{8}$

$AP = 17$

$NC = 34$







~~92 = 3~~3

$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)$

$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\left(-\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right)$