МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{8}{17}$ (1)

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ (2)

Распишем (2) по формуле синуса суммы.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

Аналогично распишем (1)

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$.

Раскроем $\cos 4\beta$ и $\sin 4\beta$ как двойные углы.

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+$ ~~2sin2α~~ $2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha+$

$+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$.

Вынесем $\cos 2\beta$ за скобки, $\sin 2\alpha$ и $-\sin 2\alpha$ сократим.

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{8}{17}$

Но в скобках стоит в точности раскрытое (2)!

Сократим на 2 и получаем.

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{4}{17}\quad\left(\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{\sqrt{17}}}-\sqrt{17}\right)$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда мы знаем, что

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Подставим $\cos 2\beta$ и $\sin 2\beta$ в (2), рассмотр. два случая:

1) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Раскроем сразу все двойные углы.

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}+\frac{2\sin^2\alpha}{\sqrt{17}}=-\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}$

Поделим обе части на $\cos^2\alpha$, кт не равен нулю, т.к. $tg\alpha$ по усл. определён. Также поделим на два

$\frac{4}{\sqrt{17}}tg\alpha+\frac{tg^2\alpha}{\sqrt{17}}=0$

$\frac{1}{\sqrt{17}}tg\alpha\,(tg\alpha+4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha=0 \\ tg\alpha=-4. \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{2\cos^2\alpha}{\sqrt{17}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}=-\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}$

Аналогично делим на $2\cos^2\alpha$.

$tg\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$

$tg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}=-\frac{1}{4}$

И так, мы нашли все возможные значения $tg\alpha$, они все подходят, т.к по усл. их не меньше трёх.

Ответ: $0; -4; -\frac{1}{4}$.

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

Сейчас возведем (1) в квадрат. и.г, чтобы рав-во достигалось, должны быть неотриц., что я проверю перед тем, как писать ответ. (*)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^2-12yx+9y^2-3xy+2x+3y-2=0$

$4x^2-15yx+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2-x(15y-2)+9y^2+3y-2=0$

$D=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36=9(9y^2-12y+4)$

$x=\dfrac{15y-2\pm 3(3y-2)}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3y+2}{4} \\ x=3y-1 \end{array}\right.$

Рассмотрим два случая.

1) $x=3y-1$ подставим в (2)

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0$

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0$

$27y^2-18y+3+3y^2-22y+2=0$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$\frac{D}{4}=16-6=10$

$y=\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{6} \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$, но (*) удовл.

только $y=\dfrac{4-\sqrt{10}}{6}$, $x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$.

2) $x=\dfrac{3y+2}{4}$.

Аналогично.

$3\left(\dfrac{9y^2+12y+4}{16}\right)+3y^2-\dfrac{6(3y+2)}{4}-4y-4=0 \;|\cdot 16.$

$27y^2+36y+12+48y^2-72y-48-64y-64=0.$

$75y^2-100y-100=0 \;|\cdot\frac{1}{25}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

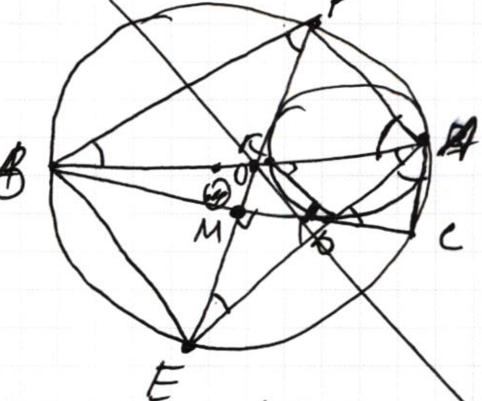
$3y^2-4y-4=0.$

$\frac{D}{4}=4+12=16.$

$y=\frac{2\pm4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2,\ x=2 \\ y=-\frac{2}{3},\ x=0 \leftarrow \text{из-за } (*) \text{ нет реш.}\end{array}\right.$

Ответ: $(2;2)$; $\left(\cancel{4\pi}\ \frac{4-\sqrt{10}}{6};\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

№5.



$CD=\frac{5}{2}$; $BD=\frac{13}{2}$.

1) пусть радиус $\Omega=R$, $\omega=r$, тогда по теореме о кас. и сек. для ω:

$BD^2=BK\cdot AB$, где K — точка пересеч. AB и ω, AK — диаметр ω, тогда:

$BD^2=(2R-2r)\cdot 2R=\left(\frac{13}{2}\right)^2$ (*)

2) $AC=CD=\frac{5}{2}$ как кас. к окр-ти $\omega \Rightarrow AD=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$.

3) $\angle C=90^\circ$, т.к. опир. на AB.

4) $\angle ADC=\angle AKD$ как угол м/у кас. и сек.

5) $\angle KDB=\angle BAD$ по тем же причинам, но также он равен и $\angle ADC$, т.к. $\triangle ADC$ прямоуг, $2\cdot\angle ADC=90$ (т.к. $\triangle ADC$ р/б) $\Rightarrow \angle ADC=45^\circ$; $\angle KDB+\angle ADC+90^\circ=180 \Rightarrow \angle KDB=\cancel{90}\ 45 \Rightarrow \angle BAD=45. \Rightarrow KD=AD$, $\angle ADK=90^\circ$; т.к. опир. на диаметр $\Rightarrow AK=5=2r \Rightarrow r=\frac{5}{2}$

6) Подставим $2r=5$ в *, тогда

$4R^2-2R\cdot5-\frac{169}{4}=0 \Rightarrow R=$

~~7) Т.к. BFAE вписан, то ∠FAE = FBA, ∠BFE = ∠BAE = 45,~~

Ещё $\angle AEF=45$, т.к. ~~∠AD~~ $\triangle EMD \sim \triangle ACD$ по 2-м углам

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\Rightarrow \angle FAE = \angle FBA = 45$. Углы по 45° опирающиеся~~

~~одной дуге, но тогда~~

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$.

$x^2+6x>0$ из-за ОДЗ $\log_4(x^2+6x) \Rightarrow$ модуль можно снять.

Воспользуемся тем, что справедливо равенство ~~в~~ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, пусть $x^2+6x=t$, $t>0$, тогда

$t^{\log_4 3} + t \geqslant t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geqslant 0$

При $0<t<1$ t^a – убывающая ф-ция, при $t\geqslant 1$ неубывающая, при ~~чтобы понять, какого знака~~ $a \geqslant 1$, при $a<1$ наоборот. Чтобы понять, какого знака выр-е из л.ч давайте сравним t и 1, показатели с 1, тогда

$(t-1)(\log_4 3 - \log_4 5) \geqslant 0$.

$\log_4 3 - \log_4 5 < 0 \Rightarrow (t-1) \leqslant 0$, $0<t\leqslant 1$

1) $t>0 \Rightarrow x^2+6x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

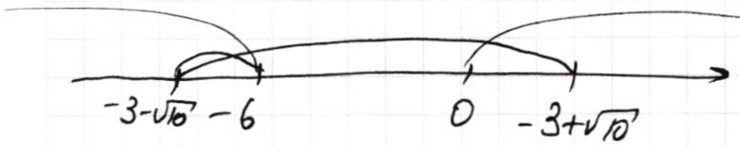
$t\le 1$:

$x^2+6x-1\le 0$

~~$\frac{D}{4}=10$~~. Найдём нули. $x^2+6x-1=0$.

$\frac{D}{4}=10$

$x=-3\pm\sqrt{10}$, тогда, учитывая оба случая получаем, что



$\Rightarrow x\in[-3-\sqrt{10};-6)\cup$

$\cup(0;-3+\sqrt{10}]$

Ответ: $[-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10}]$.

№ 6.

$$\overset{g(x)}{\overset{\parallel}{\frac{4x-3}{2x-2}}}\ge ax+b\ge \overset{f(x)}{\overset{\parallel}{8x^2-34x+30}}.$$

$\frac{4x-3}{2x-2}$ — гипербола с горизонтальной асимптотой $y=2$, на $(1;3]$ монотонно убывает, вертикальная асимптота ~~$g(x)$~~ $x=1$.

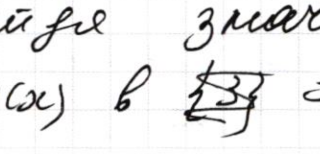
Схематично изобразим рисунок, предварительно найдя значения $f(x)$ в точках ~~$\{1;3\}$~~ $x=1$ и $x=3$ и $g(x)$ в ~~$\{3\}$~~ $x=3$.

$f(1)=4$; $f(3)=0$

$g(3)=\frac{9}{4}$.

Ещё давайте посмотрим, как ведёт себя $f(x)$ на этом промежутке.

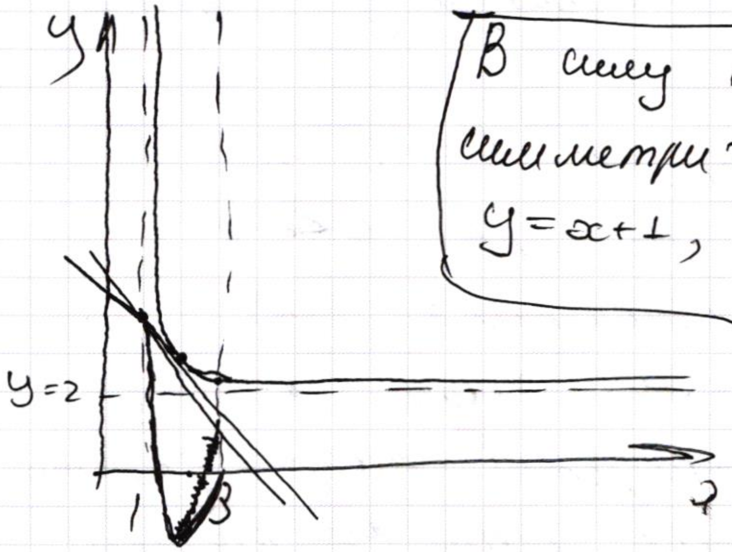
$f'(x)=16x-34=0$



$x=\frac{17}{8}$ — вершина параболы.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

На самом деле, нам не принципиально, ~~в ка~~ ~~при каком~~ у какой у у координата вершины параболы, просто понятно, что он <0.



В силу того, что график $g(x)$ симметричен отн-но прямой $y=x+1$, ~~по~~ ~~такие~~ прямые, для кт выполнено нер-во

Самая неприятное для нас — выпуклость $f(x)$, понятно, что ~~#~~ прямые из пучка прямых, проходящих через точку $(1;4)$ становятся не интересными для нас, либо если она пересекла параболу $f(x)$ на $[1;3]$ ~~&~~ не в $[1;3]$ или уже не касается $f(x)$ давайте ~~посмот~~ построим ур-е прямой, проход. через $(1;4)$ и $(3;0)$.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-4} \Rightarrow \underline{y=-2x+6}.$$

Давайте поймём что-то про их

~~Давайте поиграемся с ней~~

взаимное расположение с $f(x)$.

$-2x+6 = \dfrac{4x-3}{2x-2}$

$(2x-2)(6-2x) = 4x-3$

$12x - 4x^2 - 12 + \cancel{4x} = 4x - 3$

$-4x^2 + 12x - 9 = 0$

$\cancel{x = \frac{3}{2}}$ $(2x-3)^2 = 0$.

Т.е. эта прямая касается $f(x)$ ~~в т.т~~ при $x = \frac{3}{2}$

Давайте зафиксируем $b = 6$ и начнём менять a, при $a < -2$ прямая начнёт пересекать $f(x)$ ещё в одной точке, но тогда на промежутке $[1;3]$ найдется такое x_0, что $f(x_0) > a \cdot x_0 + 6$, что нам не нужно.

Если $a > -2$, то прямая ещё раз пересечёт (или не пересечёт вовсе при $a \geq 0$) ~~(или не пересечёт~~ $f(x)$, ~~что~~ но тогда найдется такое x_0, что $ax_0 + 6 > f(x_0)$, что нам не нужно.

Хорошо, давайте попробуем увеличить b, тогда ~~$ax+b$~~, чтобы скомпенсировать это увеличение придётся уменьшать a, но тогда понятно, что ~~$ax+b$~~ найдётся такое x_0, что $ax_0 + b < f(x_0)$, т.е. прямая ещё раз пересечёт параболу.

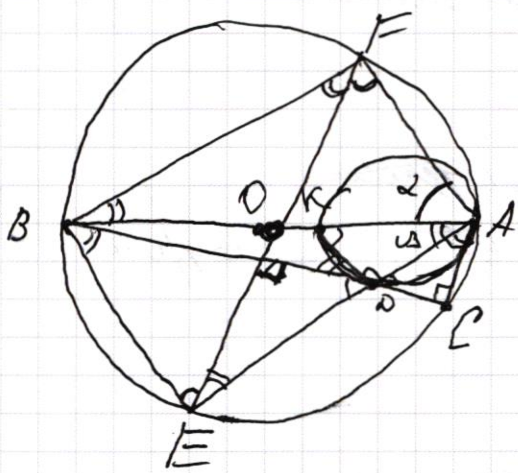
Следовательно, других значений a и b нет.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(-2; 6)$.

№4



1) Пусть K – точка пересеч. AB и ω, AK – диаметр, тогда $\angle ADK = 90°$.

2) $\angle CDA = \angle DKA$ по теореме об углах м/у кас. и секущей.

Аналогично $\angle$ ~~…~~ $KDB = \angle KAD$.

3) $\angle ACD = 90°$ т.к. опир. на диаметр.

4) Пусть радиус $\Omega = R$, радиус $\omega = r$, тогда по Th о кас и сек. $BD^2 = BK \cdot AB = (2R - 2r) \cdot 2R$.

5) BFAE вписан $\Rightarrow \angle BFE = \angle BAE = \angle FBA = \angle FEA = \angle EAC$.

6) Т.к. $\angle BFE = \angle FEA \Rightarrow BF \parallel AE$, $FA = BE$, т.к. равные дуги стягиваются равными хордами.

7) ~~$\angle AFE = \angle EAC$, т.к. опир на одну дугу $\cup EC$.~~

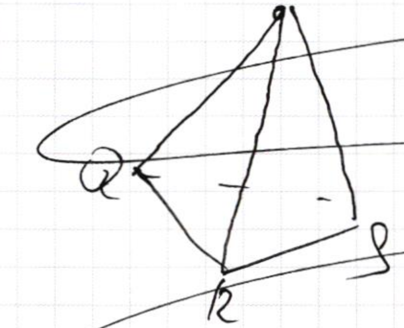
$\angle BFA = 90$, т.к. опир на $AB \Rightarrow$ ~~…~~ $\angle EFA = \angle ADC$

8) Итак, BFAE впис, вкт ~~…~~ противополож стороны AF и BE равны, причем $\angle BEA = \angle BFA = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ BFAE – прямоуг.

9) $\angle FAB = \angle BEF$ т.к. опир на $\cup BF$, $\angle FAE = 90$, т.к.

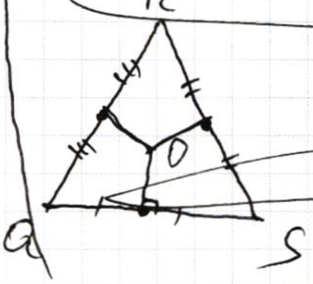
$\angle FAE + \angle BAE = 90^\circ \Rightarrow FE$ - диаметр, $O \in FE$,

~~№7~~



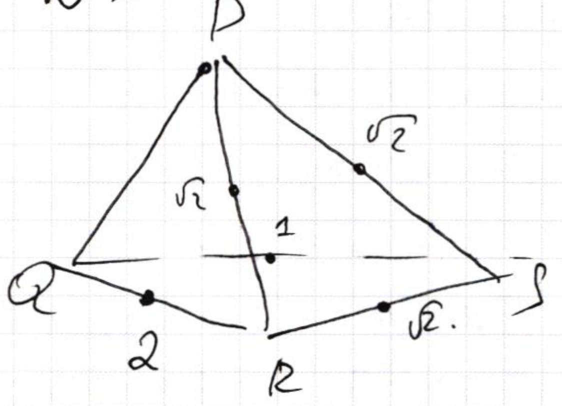
~~1) Такое возможно т.и.т.к. $\triangle QRS$ - правильный~~

~~Несложно это понять, если перейти ненадолго в планиметрию~~



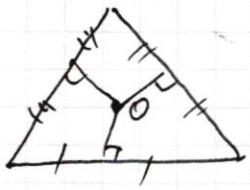
~~O - точке пересечения сер. перпов, что яв-ся центром опис. окр-ти~~

№7.



1) Сфера коснулась всех сторон $\triangle PRS \Rightarrow$ он р/с.

Это не трудно понять из планиметрии



O - точка пересеч. сер. перпов, она совпадает с ~~точкой~~ инцентром $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ треуг. р/с $\Rightarrow PR = RS = PS = \sqrt{2}$

Ответ: $RS = \sqrt{2}$.

№2 $\begin{cases} 9y^2-12yx+4x^2=3xy-2x-3y+2 \quad | \cdot 2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$-\begin{cases} 18y^2-24yx+8x^2-6xy+4x+6y=4 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$15y^2-30xy$

$18y^2-30yx+8x^2+\cancel{8x}\ 4x+6y=4.$

$3y^2+3x^2-6x-4y=4.$

$15y^2-30yx+5x^2+10x+10y=0.$

$3y^2-6yx+x^2+2x+2y=0.$

$3y^2-(6x-2)y+x^2+2x=0.$

$3y^2-2(3x-1)y+x^2+2x=0$

$\frac{D}{4}=(3x-1)^2-3x^2-6x=$

$=9x^2-6x+1-3x^2-6x=$

$=6x^2-12x+1$

$6x^2-12x+1$

$9y^2-12yx+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$4x^2-\cancel{12x}-15yx+9y^2+2x+3y=2. \quad | \cdot 2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\begin{cases} 8x^2-30yx+18y^2+4x+6y=4 \\ -3x^2-3y^2+6x+4y=-4 \end{cases}$

$5x^2-30yx+15y^2+10x+10y=0.$

$x^2-6yx+2x+3y^2+2y=0.$

$x^2-2(3y-1)x+3y^2+2y=0.$

$\frac{D}{4}=\cancel{3}\,9y^2-6y+1-3y^2-2y=0.$

$\underline{5y^2-8y+1=0}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$tg\alpha - ?$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\underline{\sin 2\alpha \cos} 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$.

$\cancel{2}\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cancel{2}\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{4}{17}$.

~~Sin 2α cos 2β (cos~~

$\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{17}$.

$\cos 2\beta \cdot (+\frac{1}{\sqrt{17}}) = +\frac{4}{17}$.

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \sin^2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{17}}) + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$.

1) $\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

~~$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} - \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + (1-2\sin^2\alpha)(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\sin^2\alpha + \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

$\frac{2}{\sqrt{17}} tg^2\alpha + \frac{8}{\sqrt{17}} tg\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$

$tg\alpha = -\frac{8}{\cancel{\sqrt{17}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{17}}}{2} = -4$.

2) $\sin\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + (2\cos^2\alpha - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} =$

$\frac{8}{\sqrt{17}} tg\alpha + \frac{2}{\sqrt{17}} \cos^2\alpha = 0$.

$\frac{8}{\sqrt{}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+6 \geq 8x^2-34x+30$

$8x^2-x(34+a)+30-6 \leq 0$

$(2x-2)(6-2x)=4x-3$

$8-34+30=4$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

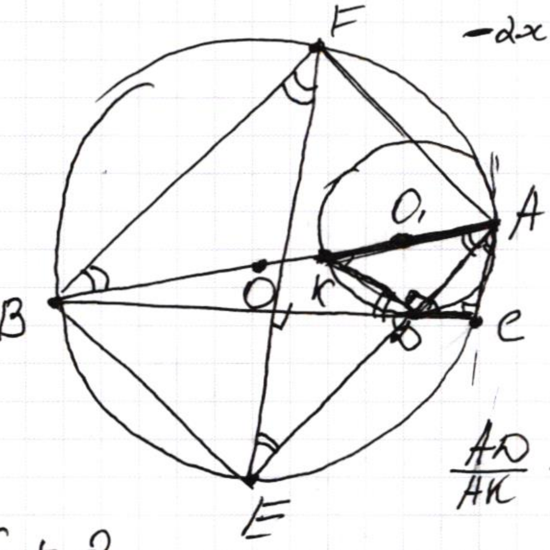
$12x-4x^2-12+4x=4x$

$\frac{\cup BF+\cup EC}{2}=\frac{\pi}{2}$

$-4x^2+12x-9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$



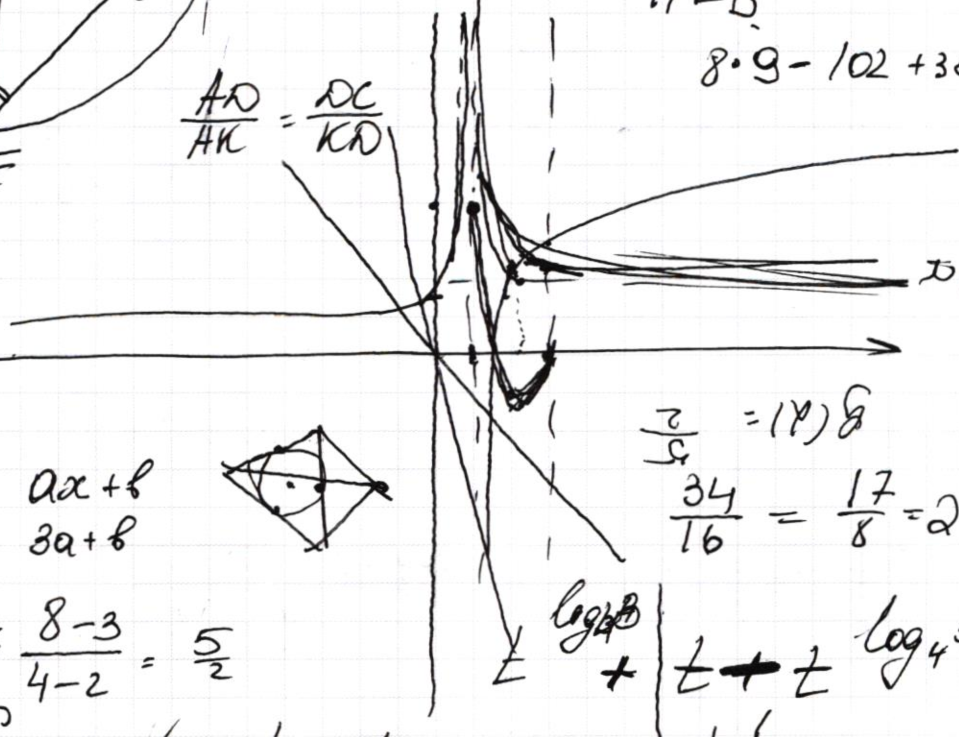
$BD^2=(D-d)\cdot D=D^2-Dd$

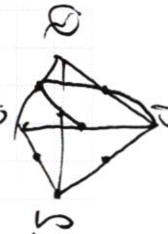
$FA \parallel EB$

$8\cdot 9-102+30=0$

$\frac{AD}{AK}=\frac{DC}{KD}$

$\frac{6+2}{4}$





$\boxed{y=-2x+6}$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$-\frac{3}{-2}$

$ax+b$

$3a+b$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$\frac{x-1}{2}=y-7$

$\frac{x-1}{2}=y-4$

$-2x+2=y-4$

$\frac{8-3}{4-2}=\frac{5}{2}$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 5} \geq 0$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$t+x=6$

$4(2x-2)-2(4x-3)=8x-4-8x+6=2$

$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4}{2}$

$y=x^2$

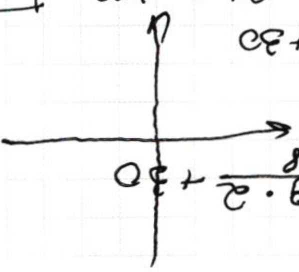
$y=7x$

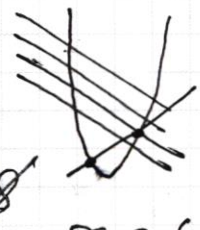
$(t-1)(\log_4 3-\log_4 5)$

$7x>x^2$

$x^2-7x<0$

$x(x-7)$





$x\in(0;7)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{D}{4} = 9 - 3(3y^2 - 4y - 4) \cancel{= 0}$ $\quad |x^2+6x|^{\log_4 3} + 6x$

$= 9 - 9y^2 + 12y + 12 =$ $\quad t^{\boxed{\log_4 3}} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$= -9y^2 + 12y + 21 = 0$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$D = 36 - 12(3y^2 - 4y - 4) =$

$= 36 - 36y^2 + 48y + 48.$ $\quad 6 - 4 = 2.$

$-36y^2 + 48y$ $\quad 3 \cdot 2 \cdot 2 - 4 - 6 + 2$

$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 3xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$4x^2 - 15xy + 9y^2 + 2x + 3y - 2 = 0$ $\quad 12 - 10 + 2.$

$-x(15y - 2) +$ $\quad \frac{3y+2}{4}$

$D = 225y^2 - 60y + 4 - 144y^2 - 48y + 32 =$

$= 81y^2 - 108y + 36 = 0$ $\quad (9y-6)^2$ $\quad -2 + 2$

$\frac{15y - 2 \pm (9y - 6)}{8}$ $\quad \frac{3y+2}{4} - 2$

$\frac{15y - 2 + 9y - 6}{8} = \frac{24y - 8}{8} = \boxed{3y - 1}$ $\quad \frac{3 \cdot 2 + 2}{4} = 2$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$\frac{15y - 2 - 9y + 6}{8} = \frac{6y + 4}{8} = \boxed{\frac{3y+2}{4}.}$ $\quad t^{\log_4 3}(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1)$

$3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1) - 4y - 4 = 0.$ $\quad \frac{4 \pm \sqrt{10}}{\cancel{6}\,2} \cdot \cancel{3} - 1.$

$27y^2 - 18y + 3 + 3y^2 - 18y + 6 - 4y - 4 = 0$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$ $\quad \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2} - 2 =$

$6y^2 - 8y + 1 = 0.$ $\quad \boxed{\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}.}$

$\frac{D}{4} = 16 - 6 = 10 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6.} \Rightarrow x =$ 4

$\frac{4+\sqrt{10}}{\cancel{6}\,2} \cdot \cancel{3} - 2 - \sqrt{10}$

$\frac{4 - \sqrt{10}}{2} - 4 + 2\sqrt{10}$ $\quad 4 + \sqrt{10} - 4 - 2\sqrt{10} = \underline{(-\sqrt{10})}$

$= \underline{\sqrt{10}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}-4\mp\sqrt{10}$

$4+\sqrt{10}-8-2\sqrt{10}=$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}-4+\sqrt{10}$

$\begin{array}{r} 72 \\ +64 \\ \hline 136 \end{array}$ $\begin{array}{r} 64 \\ +48 \\ \hline 112 \end{array}$

$3\left(\frac{9y^2+12y+4}{16}\right)+3y^2-\frac{6(3y+2)}{4}-4y=4$

$27y^2+36y+12+48y^2-72y-48-64y-64=$

$=75y^2-100y+100=0 \quad |:25$

$3y^2-4y+4=0$

$D=16-$

$\frac{4-\sqrt{10}}{6} \qquad \frac{4-\sqrt{10}}{2}$

$\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right)^2-4+\sqrt{10}-\frac{4-\sqrt{10}}{2}+2$

$\frac{16-8\sqrt{10}+10}{4}-4+\sqrt{10}-\frac{4-\sqrt{10}}{2}+2$

$\frac{26-8\sqrt{10}}{4}=\frac{13-4\sqrt{10}}{2}-4+\sqrt{10}-\frac{4-\sqrt{10}}{2}+2$

$13-4\sqrt{10}-8+2\sqrt{10}\cancel{-4}+\sqrt{10}\cancel{+4}$

$2\sqrt{\boxed{5-\sqrt{10}}}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}-4+\sqrt{10}$

$4(5-\sqrt{10})=20-4\sqrt{10}$

$4-\sqrt{10}-8+2\sqrt{10}=$

$=\sqrt{10}-4. \quad =10-8\sqrt{10}+16.$

$26-8\sqrt{10}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

$\frac{8\pm\sqrt{40}}{12}$

$\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}$

ШИФР

(заполняется секретарём)

1) $4+\sqrt{10}-8$

$\frac{3(4\pm\sqrt{10})}{6}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}-4\pm\sqrt{10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2$ $\quad (x^2+6x)^{\log_4 3}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $\quad \frac{24}{3}$

$3y^2-4y+4=0$

$\frac{D}{4}=$ $\quad 64-36=28$

1) $3\left(\frac{9y^2+12y+4}{16}\right)+3y^2-6\cdot\frac{3y+2}{4}-$

$-4y=4.$

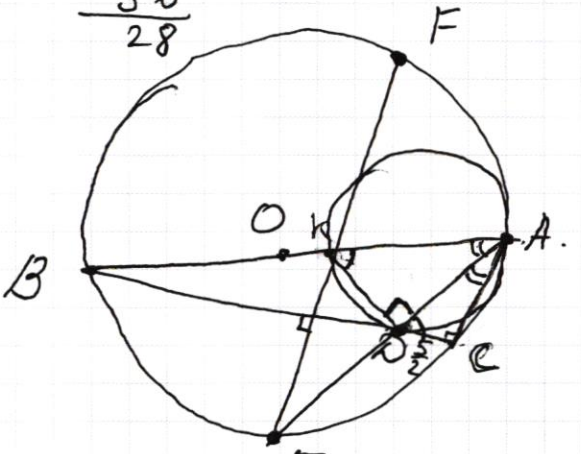
$27y^2+36y+12+48y^2-72y-48$

$-64y-64=0.$

$72+64=136$

$r_{12}-?$ $\quad \angle AFE-?$

$S_{AEF}-?$ $\quad 75y^2-100y+100=0$



$CD=\frac{5}{2}$ $\quad BD=\frac{13}{2}$ $\quad 3y^2-4y+4=0$

$64+48=112$

$BD^2=BK\cdot AB=(2R-2r)(2R)$

$\boxed{3\cdot4-8-4}$ $\quad BD^2=4R^2-4Rr.$

$BC=9.$ $\quad AB^2=BC^2+AC^2.$

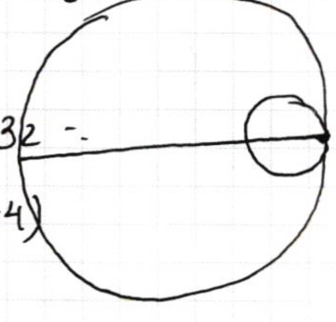
$D=164.$

$4\cdot3\cdot c$

$9y^2-12yx+4x^2=3xy-2x-3y+2.$ $\quad y=\frac{4+8}{6}=2$ $\quad \frac{15}{4}$ $\quad 4\cdot5$ $\quad 16$

$4x^2-15yx+9y^2+3y+2x-2=0.$ $\quad y=\frac{4-8}{6}=-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$ $\quad \frac{9}{4}$

$4x^2-x(15y-2)+9y^2+3y-2=0$ $\quad -\frac{108}{3}\Big|\frac{9}{12}$



$D=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32$

$4-2$ $\quad =81y^2-108y+36=9(9y^2-12y+4)$

$6-2=4.$ $\quad =9(3y-2)$

$\frac{24}{3}$ $\quad x=\frac{15y-2\pm3(3y-2)}{8}$ $\quad \frac{3\cdot2+2}{4}$ $\quad 225-144=81$

$6-2-6+4)x=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}=\frac{3y+2}{4}.$

2) $\frac{15y-2+9y-6}{8}=\frac{24y-8}{8}=3y-1$ $\quad 3x^2-4x+4=0.$

$\frac{D}{4}=4-12=-8.$

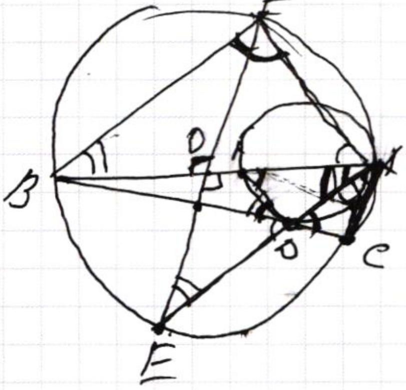
$\frac{3y+2}{4}=\frac{3\cdot2+2}{4}=1$

$3+12-6-8$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

x^2+6x



$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$.

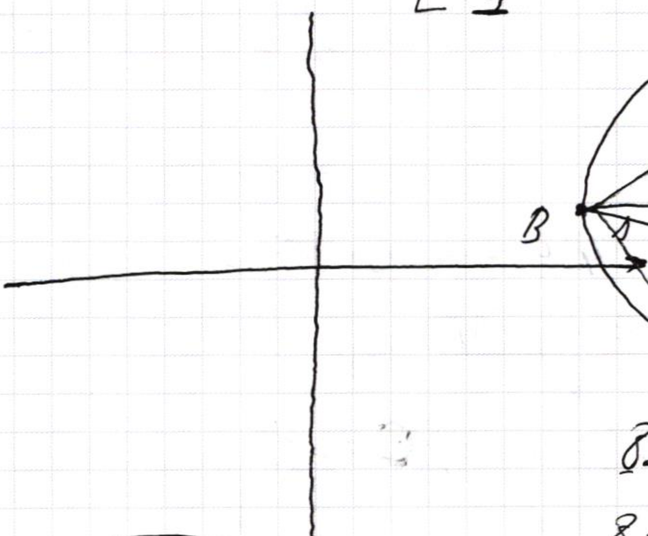
$f(\frac{x}{y})<0$.

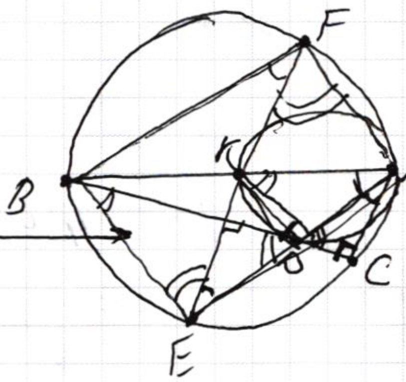
$t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geqslant 0$ $\qquad t^{\log_4 3}+t\geqslant t^{\log_4 5}$

$\boxed{t>0.}$

$t-1$

$\underbrace{t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}}_{0}$ $t\geqslant 0$



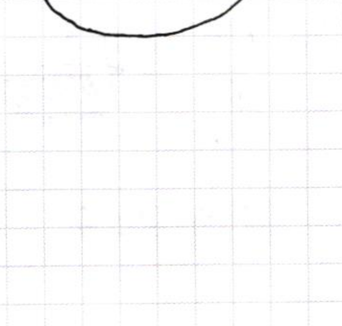


$\frac{8-34+30}{4}$

$8x^2-34x+30$

$8\cdot 9-102+30$

$\neq 0.$



$\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$

$3a+b\geqslant 0.$

$a+b\geqslant$

$3a+b=\frac{9}{4}\Rightarrow$

$0\leq 3a+b\leq\frac{9}{4}.$ $\Rightarrow\boxed{b=\frac{9}{4}-3a}$

$a+b\geqslant$

$-3a\leq b\leq\frac{9}{4}-3a$

$b\geqslant 0$

$3b\geqslant 12.$

$a+b\geqslant 4$

$\boxed{b\geqslant 6.}$

$3a+b\geqslant 0.$

$a+b\geqslant 4.1\cdot 3.$

$b\geqslant -3a$ $\qquad a\geqslant -2.$

$a+b\geqslant 4.$ $\qquad \boxed{a\leq -2}$

$a\geqslant 4+3a\Rightarrow -2a\geqslant a$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{t \geq 0}$

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0 \quad | \cdot \frac{1}{t}$

t^{-1}

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} \geq -1$

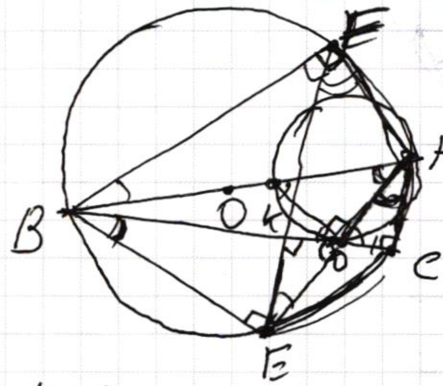
$\frac{1}{t} - t$

$16 \cdot 169$

$169 \cdot 16 = 2704$

$\frac{1-6^2}{2}$

$EA \parallel BE \Rightarrow \cup BE = \cup EA$



$\frac{\cup BE + \cup AE}{2} = 90$

$\cup BE + \cup AE = 180$

$BK \cdot AB = BD^2$

$16R^2 - 40R - 169 = 0$

$(2R - 2r)\, 2R = BD^2$

$58 \cdot 58 = 464 + 290$

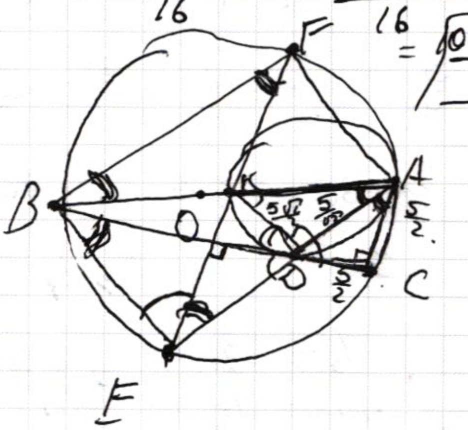
$\frac{D}{4} = 400 + \boxed{3084}$

$4R^2 - 4Rr = \frac{169}{4}$

$\frac{20 + \sqrt{3084}}{16} = \frac{20 + 2\sqrt{771}}{16} = \boxed{\frac{10 + \sqrt{771}}{8}}$

$r = \frac{4R^2 - \frac{169}{4}}{4R} = R - \frac{169}{16R}$

$3084 \mid 4$, $771 \mid 3$, $\boxed{257}$



$\frac{\cup BF + \cup EC}{2} = 90$

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$4 \cdot 3 \cdot 257$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА