МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

1: $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

2: $x^2-4x+9y^2-18y=12$

$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$. Тогда система имеет вид:

$(I)\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$9b^2-(-5ab+4b^2)=25$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$

$a=\frac{5-b^2}{b}$. Подставим в (I):

$\frac{25-10b^2+b^4}{b^2}+9b^2=25$

$25-10b^2+b^4+9b^4-25b^2=0$

$10b^4-35b^2+25=0$

$2b^4-7b^2+5=0$

$D=49-8\cdot5=3^2$; $b=\frac{7\pm3}{4}$ $\begin{matrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{matrix}$ $\left[\begin{array}{l} b=1,\ a=4 \\ b=\frac{5}{2},\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2. \end{cases}$ Подставим в изначальн~~ое ур~~ую систему:

$$\begin{cases} 6-4=\sqrt{4} \\ 36+9\cdot 4-4\cdot 6-18\cdot 2=12 \end{cases} \quad \begin{cases} 2=2 \\ 12=12 \end{cases} \quad ; \ (6;2) - решение.$$

2) Второй случай невозможен, т.к. $\sqrt{ab}$ неопределён ($a\cdot b<0$).

Ответ: $x=6$, $y=2$.

№3 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$$x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

По смыслу задачи: $x^2+18x>0$; $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Пусть $x^2+18x=a$, $a>0$. Тогда:

$$a \geq |a|^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}a}$$

$$a \geq a^{\log_{12}13}-a^{\log_{12}5}$$

$$a^{\log_{12}12}+a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}$$

$$12^{\log_{12}a}+5^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$$

Пусть $\log_{12}a=b$. Тогда:

$$12^b+5^b \geq 13^b \quad \Big|:13^b$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^b+\left(\frac{5}{13}\right)^b \geq 1$$

Слева - сумма двух убывающих функций - функция убывающая, а справа - константа. Значит равенство может достигаться в единственном случае. Найдем такое b:

$b=2$: $\frac{144}{169}+\frac{25}{169}=1$; $1=1$.

Значит $b\leq 2$. Обратная замена:

$\log_{12}a\leq 2$; $a\leq 144$. Обратная замена:

$x^2+18x\leq 144$; $x^2+18x-144\leq 0$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-18x-144\le 0$

$D=324+4\cdot 144=900=30^2$; $x=\frac{18\pm 30}{2}$ $\begin{matrix} 24 \\ -6 \end{matrix}$

$(x-24)(x+6)\le 0$

$+ \quad -6 \quad - \quad 24 \quad +$ $\to x$

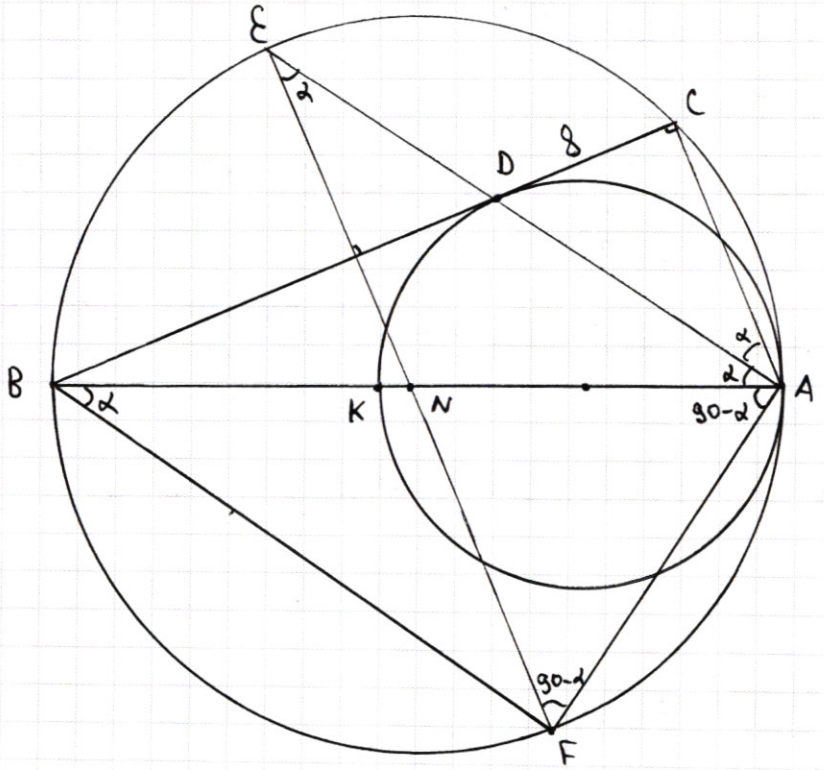
С учётом ограничений, $x\in(0;24]$

Ответ: $x\in(0;24]$

№4.

$DC=8$

$BD=17$



Решение:

1) Пусть $\angle CAD=\alpha$. По условию $EF\perp BC$, $AC\perp BC$ ($\angle ACB$ опирается на диаметр) $\Rightarrow EF\parallel AC$. Тогда $\angle AEF=\angle EAC=\alpha$ как накрест лежащие углы.

$\angle ABF = \angle AEF = \alpha$ (опираются на одну дугу)

$\angle BFA = 90^\circ$ (опирается на диаметр) $\Rightarrow \angle BFA = 90 - \alpha$

Пусть EF пересекает AB в точке N, AB пересекает окружность ω в точке K.

$\angle CDA = 90 - \alpha$ (из $\triangle ACD$), $\angle AKD = \angle CDA$ (угол между хордой и касательной) $= 90 - \alpha$; $\angle ADK = 90^\circ$ (опирается на диаметр AK) $\Rightarrow \angle DAK = \alpha$

Тогда $\angle EKF = 90^\circ \Rightarrow EF$ - диаметр, N - центр окружности Ω.

Заметим, что AD - бис-са угла CAB.

2) Пусть $AC = \cancel{8}\,8x$, $AB = 17x$ (по св-ву бис-сы). Тогда:

из $\triangle ABC$: $25^2 + (8x)^2 = (17x)^2$

$625 + 64x^2 = 289x^2$

$625 = 225x^2$

$25 = 9x^2$; $x^2 = \frac{25}{9}$; $x = \frac{5}{3}$; $AB = \frac{17 \cdot 5}{3} = \frac{85}{3}$

$AN = R_\Omega = \frac{85}{6}$; $AC = 8x = \frac{40}{3}$.

Из $\triangle ACD$: $AD^2 = 8^2 + \left(\frac{40}{3}\right)^2 = 64 + \frac{1600}{9} = \frac{576 + 1600}{9} = \frac{2176}{9} = \frac{64 \cdot 34}{9}$

$AD = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$AD \cdot ED = CD \cdot BD$ (произведение отрезков хорд)

$\frac{8}{3}\sqrt{34} \cdot ED = 8 \cdot 17$

$\sqrt{34}\, ED = 51$

$ED = \frac{51}{\sqrt{34}} = \cancel{\frac{3}{2}\sqrt{34}} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$.

$\triangle EAF \sim \triangle ADK$: $\frac{DA}{AE} = \frac{AK}{EF} = \frac{r}{R}$, где r - радиус ω, R - радиус Ω

$\frac{\frac{8}{3}\sqrt{34}}{\frac{8}{3}\sqrt{34} + \frac{3}{2}\sqrt{34}} = \frac{r}{R}$; $\frac{r}{R} = \frac{\frac{8}{3}\sqrt{34}}{\frac{25}{6}\sqrt{34}} = \frac{16}{25}$; $r = \frac{16}{25} R = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{136}{15}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\angle AFE = 90 - \alpha$

$\sin \angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{\frac{170}{6}} = \frac{25\sqrt{34}}{170} = \frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $\cos\angle AFE = \frac{3}{\sqrt{34}}$

4) $S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF$; $AF = EF \cdot \cos\angle AFE = \frac{170}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} \cdot \cancel{\sqrt{34}} \cdot \frac{85}{\cancel{\sqrt{34}}} = \frac{25 \cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $r_\Omega = \frac{85}{6}$; $r_\omega = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

№6 $\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+6 \leq -8x^2-30x-17$ - верно при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

Пусть $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = f(x)$

$-8x^2-30x-17 = g(x)$

$ax+6 = \varphi(x)$

Рассмотрим эти функции:

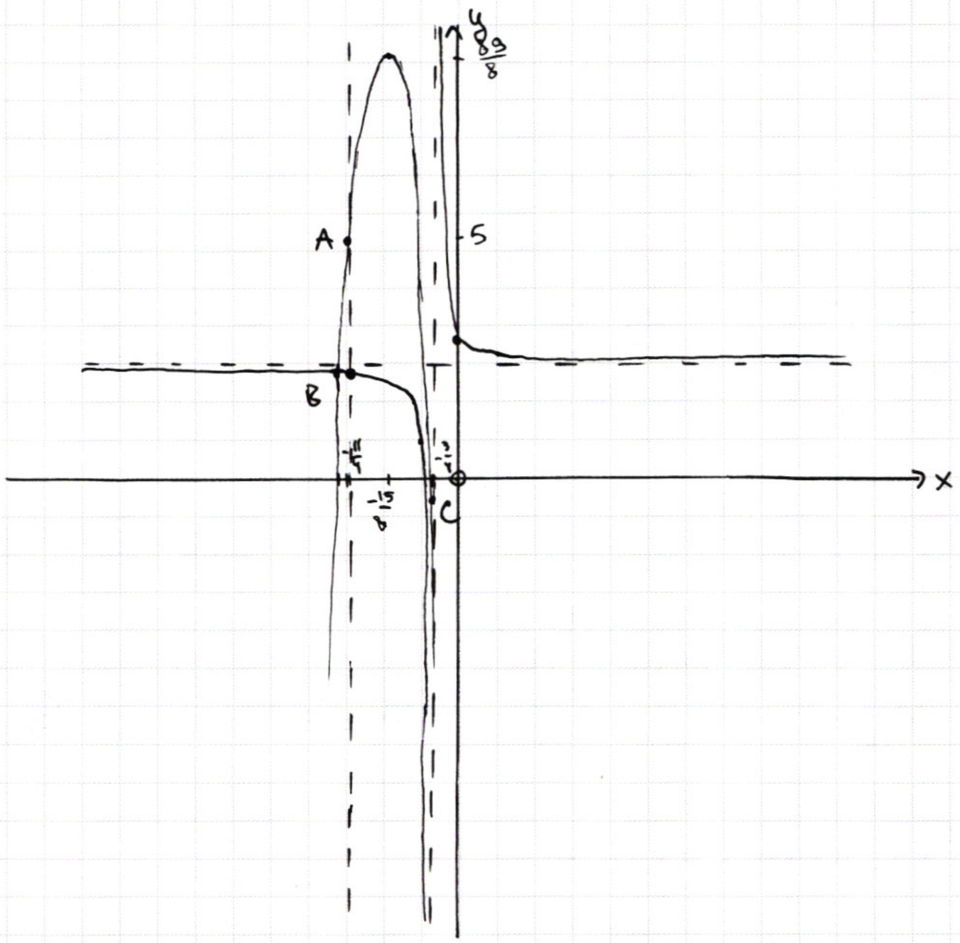
$g(x)$ - парабола, ветви вниз, $x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$; $g(-\frac{15}{8}) =$
$= -8 \cdot \frac{225}{64} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$g(x) = 0$: $8x^2+30x+17=0$; $D = 900 - 32 \cdot 17 = 900 - 544 = 356$; $x = \frac{-30 \pm \sqrt{356}}{16} =$
$= \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$

$f(x)$ - гипербола, $x = -\frac{3}{4}$ - вертикальная асимптота,
$y = 3$ - горизонт. асимптота

$\varphi(x)$ - прямая.

Изобразим на графике:



① Нам подходят такие a и b, при которых прямая $\varphi(x)$ на ~~от~~ промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ лежит выше графика $f(x)$ и ниже $g(x)$ (либо касается их).

Пусть $g(x)$ пересекает прямую $x=-\frac{11}{4}$ в точке A, $f(x)$ ~~в точке~~ пересекает $x=-\frac{11}{4}$ в точке B, $g(x)$ пересекает $x=-\frac{3}{4}$ в точке C.

① Нам подходят прямые, которые в точке $x=-\frac{11}{4}$ принимают значение $\in [B; A]$, а в точке $x=-\frac{3}{4}$ – значение $\in(-\infty; C)$., при этом выполняется условие ①. Найдем координаты точек A, B, C:

A: $-8x^2-30x-17$; $y_A=-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=$ ~~$-2\cdot121+\frac{15\cdot11}{2}-17=$~~

~~$=-253+\frac{15\cdot11}{2}=\frac{165-518}{2}=$~~ $=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=22-17=5$; $A(-\frac{11}{4}; 5)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

B: $x=-\frac{11}{4}$; $3+\frac{2}{-11+3}=3+\frac{2}{-8}=3-\frac{1}{4}=2{,}75$; $B\left(-\frac{11}{4};\frac{11}{4}\right)$

C: $x=-\frac{3}{4}$: $-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17=-\frac{9}{2}+\frac{15\cdot 3}{2}-17=18-17=1$; $C\left(-\frac{3}{4};1\right)$

Рассмотрим прямую, которая будет проходить через точки A и C:

$$\begin{cases}-\frac{11}{4}a+b=5\\ -\frac{3}{4}a+b=1\end{cases}\qquad \begin{cases}-11a+4b=20\\ -3a+4b=4\end{cases}\qquad 8a=-16;\ a=-2;\ b=-\frac{1}{2}.$$

$$\varphi(x)=-2x-\frac{1}{2}.$$

Найдём её точки пересечения с гиперболой:

$$-2x-\frac{1}{2}=3+\frac{2}{4x+3}$$

$$6+\frac{4}{4x+3}+4x+1=0$$

$$\frac{4+4x(4x+3)+7(4x+3)}{4x+3}=0;\quad 4+16x^2+12x+28x+21=0$$

$$16x^2+40x+25=0$$

$$D=1600-4\cdot16\cdot25=0.\quad x=-\frac{40}{32}=-\frac{5}{4}.$$

Отсюда следует, что прямые, удовлетворяющие ② условию, практически всегда имеют 2 точки пересечения с гиперболой, кроме случая $\varphi(x)=-2x-\frac{1}{2}$, а значит они не подходят.

Отсюда следует ответ:

$a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$.

№1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha$ - ?

Рассмотрим второе уравнение, запишем сумму синусов:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5},\quad \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

Распишем первое уравнение:

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{ll}2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1 & (1)\\ 2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1 & (2)\end{array}\right.$$

(1): $\cos 2\alpha=-1-2\sin 2\alpha$; $(-1-2\sin 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha=1$

$$5\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha+1=1$$

$$\sin 2\alpha\left(\sin 2\alpha+\frac{4}{5}\right)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=0,\ \cos 2\alpha=1\\ \sin 2\alpha=-\frac{4}{5},\ \cos 2\alpha=\frac{3}{5}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}2\alpha=0\\ \operatorname{tg}2\alpha=-\frac{4}{3}.\end{array}\right.$$

(2): $\cos 2\alpha=-1+2\sin 2\alpha$; $4\sin^2 2\alpha-4\sin 2\alpha+1+\sin^2 2\alpha=1$

$$\sin 2\alpha\left(\sin 2\alpha-\frac{4}{5}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=0,\ \cos 2\alpha=1\\ \sin 2\alpha=\frac{4}{5},\ \cos 2\alpha=\frac{3}{5}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}2\alpha=0\\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{3}.\end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

1) $0=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha=0.$

2) $\frac{4}{3}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $2-2\operatorname{tg}^2\alpha=3\operatorname{tg}\alpha$; $2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-2=0$

$D=9+4\cdot2\cdot2=9+16=25;$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-3\pm5}{4}\ ;\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-2\\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $-\frac{4}{3} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $-2(1-tg^2\alpha) = 3tg\alpha$; $2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$

$D = 9 + 4\cdot 2\cdot 2 = 25$; $tg\alpha = \frac{3\pm 5}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 2 \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Так, получаем ответ:

$tg\alpha = 0$; $tg\alpha = \pm 2$; $tg\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

N5. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$ $\forall p$ - простых

Сколько $(x;y)$, $1 \le x \le 24$, $1 \le y \le 24$, $f(\frac{x}{y}) < 0$

Рассмотрим $y = 1$:

$x=1$: $f(1) = [\frac{1}{4}] = 0$ - не удовл.

$x=2$: $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$ - не ОК.

$x=3$: $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$ - не ОК

$x=4$: $f(4) = f(2) + f(2) = 2\cdot f(2) = 2\cdot 0 = 0$ - не ОК.

....

~~Понятно, что с увеличением x мы не получим целую часть дроби $\frac{x}{y}$ меньше нуля,~~.

~~Чтобы $f(p) = [\frac{p}{4}]$ была <0~~

~~Рассмотрим случай $x > y$:~~

Рассмотрим $f(1)$. $f(1)$ можно записать в виде $f(K\cdot\frac{1}{K}) = f(K) + f(\frac{1}{K})$; $f(1) = 0$, значит $f(\frac{1}{K}) = -f(K)$.

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Необходимо найти

Все такие (x, y), при которых $f(x) - f(y) < 0$

~~Целая часть делённых~~ Целая часть всех простых, делённых на 4, чисел, меньше или равных 24, меньше или равна $\left[\frac{23}{4}\right] = 5$.

1) Рассмотрим случаи. $f(x) = 0$, тогда $f(y) > 0$.

$$\begin{cases} f(x) = 0: & x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24 \quad - 11 \text{ чисел} \\ f(y) > 0: & y = 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, \dots, 23. \quad - 13 \text{ чисел.} \end{cases}$$

$-\ 11 \cdot 13$ способов.

2) $$\begin{cases} f(x) = 1: & x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21 \quad - 7 \text{ чисел} \\ f(y) > 1: & y = 11, 13, 17, 19, 22, 23 \quad - 6 \text{ чисел} \end{cases}$$

$-\ 7 \cdot 6$ способов

3) $$\begin{cases} f(x) = 2: & x = 11, 22, \quad - 2 \text{ числа} \\ f(y) > 2: & y = 13, 17, 19, 23 \quad - 4 \text{ числа} \end{cases}$$

$-\ 2 \cdot 4$ спос.

4) $$\begin{cases} f(x) = 3: & x = 13, 17 \quad - 2 \text{ числа} \\ f(y) > 3: & y = 19, 23 \quad - 2 \text{ числа} \end{cases}$$

$-\ 2 \cdot 2$ спос.

5) $$\begin{cases} f(x) = 4: & x = 19, \quad - 1 \text{ число} \\ f(y) = 5: & y = 23 \quad - 1 \text{ число} \end{cases}$$

$-\ 1$ спос.

$$\Sigma' = 11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 + 1 = 143 + 42 + 8 + 5 =$$

$= 185 + 13 = 198$ способов.

Ответ: 198 способов

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{7}{4}) = f(7) + f(\frac{1}{4}) = f(7) + f(8) - f(4) = f(7) +$

$f(\frac{1}{5}) = -f(5)$. ; $f(\frac{1}{K}) = -f(K)$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. $f(\frac{7}{4}) = f(7) - f(4)$.

$x = 18$, $y = 2$. $f(9) + f(2) - f(2) = f(3) + f(3) = 2 f(3) = 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 6-4=\sqrt{4} \\ 36+9\cdot 4-4\cdot 6-18\cdot 2=12 \end{cases}$ $\begin{cases} 2=2 \\ 0=0 \end{cases}$; $(6;2)$ - решение.

2) $\begin{cases} x-2=-\frac{1}{2} \\ y-1=\frac{5}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$. Подставим (1):

$\frac{3}{2}-7=\sqrt{-\frac{5}{4}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

По ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Пусть $x^2+18x=a$, $a>0$:

$a \geq (a)^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}a}$

$a \geq a^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}a}$

$a \geq a^{\log_{12}13}-a^{\log_{12}5}$

$a-a^{\log_{12}13}+a^{\log_{12}5} \geq 0$

$a^{\log_{12}12}-a^{\log_{12}13}+a^{\log_{12}5} \geq 0$

$12^{\log_{12}a}-13^{\log_{12}a}+5^{\log_{12}a} \geq 0$; $\log_{12}a=b$

$12^b-13^b+5^b \geq 0$

$12^b+5^b \geq 13^b$; $|:13^b \neq 0$

$\left(\frac{12}{13}\right)^b+\left(\frac{5}{13}\right)^b \geq 1$

$144\cdot 2=$

$=288\cdot 2=$

576

Слева - сумма двух убыв. ф. => рав. в 1 случ.

- $b=2$ подходит. => $\boxed{b \leq 2}$

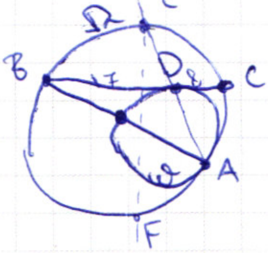
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4.



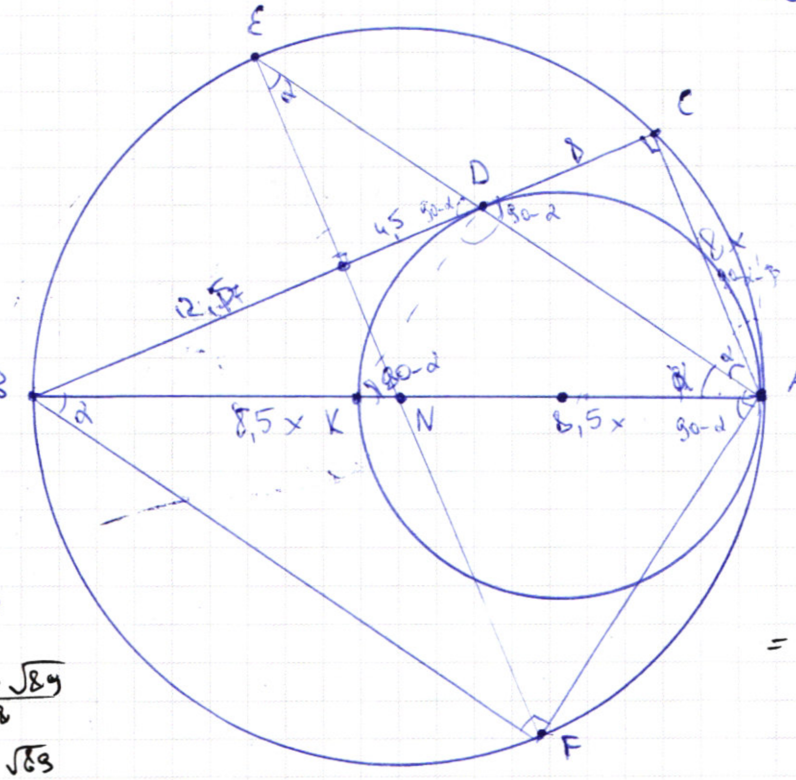
$r-?$; $R-?$; $\angle AFE-?$ $S_{AEF}-?$

$$\frac{DA}{AE}=\frac{AK}{EF}=\frac{r}{R}$$

$AC \parallel FE$

$\angle DKA = \angle ADC$

$\angle EAF = 90^\circ$



$170-34=$

$=140-4=136$

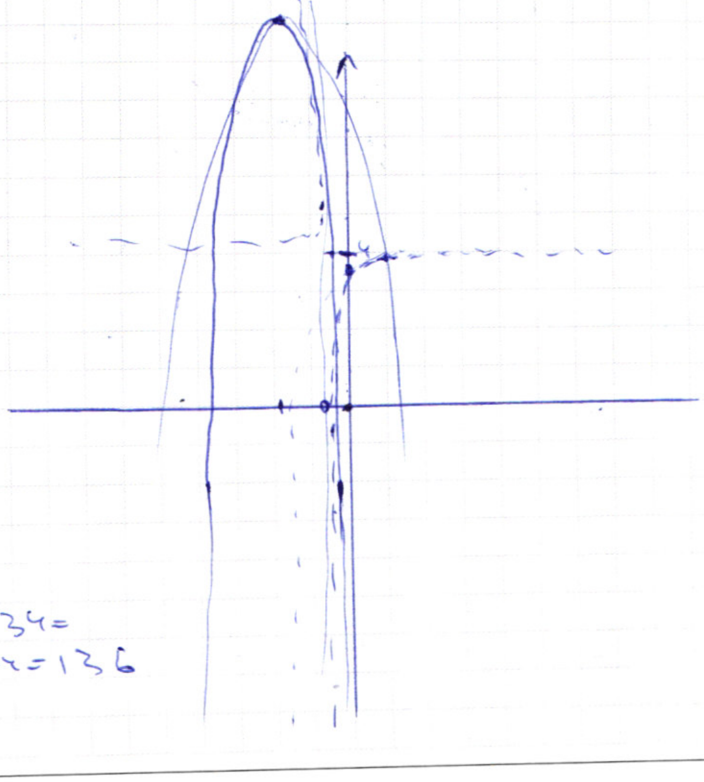
$-\frac{11}{4} \vee \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$

$-22 \vee -15-\sqrt{89}$

$\sqrt{89} \vee 7$

$>$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$ – верно для $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$



$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{4(4x+3)-1}{4x+3}=$

$=4-\frac{1}{4x+3}$

$g(x)=-8x^2-30x-17$

$x_в=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$g(-\frac{15}{8})=-8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=$

$=-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17=$

$=\frac{225}{8}-17=\frac{225-136}{8}=$

$=\frac{25+64}{8}=\frac{89}{8}\approx 11.$

$g(x)=0$: $8x^2+30x+17=0$

$D=900-4\cdot8\cdot17=900-32\cdot17=544$

$17\cdot8=170-34=$

$=140-4=136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$; $tg\alpha-?$

$\begin{cases}\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$25\cdot85=$ $\times\frac{85}{25}$ 425 170 2125

$\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta-\sin2\alpha\cdot\sin^2 2\beta+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2176=2\cdot1088=$
$=4\cdot544$
$=8\cdot272$
$=16\cdot136$
$=32\cdot68=$
$=64\cdot34$
$=17\cdot128$

$\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta=+\frac{2}{5}$

$\frac{5-\frac{25}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{10-\frac{25}{2}}{5}=\frac{\frac{20-25}{2}}{5}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$

$\sqrt5\cos2\beta=2$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$640-64=$

2. $\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$

$=600-24=$

$=576+1600=1500+676=2176$

$128\cdot17=64\cdot34=$

$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12$

$\begin{cases}(x-2)^2+9(y-1)^2=25\\ x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)^2+9(y-1)^2=25\\ x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}\end{cases}$

$=\times\frac{64}{34}$ 256 192 2176

$(x-2)=a$
$(y-1)=b$ $\Rightarrow\begin{cases}a^2+9b^2=25\\ a-2b=\sqrt{ab}\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+9b^2=25\\ a^2-4ab+4b^2=ab\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+9b^2=25\\ a^2-5ab+4b^2=0\end{cases}\Big|1-2:$ $5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$; $a=\frac{5-b^2}{b}$; $a,b\neq0$

$b(a+b)=5$

$\boxed{a=\frac{5-b^2}{b}}$ $\boxed{\frac{5}{b}=b}$

~~$a^2+\frac{9(5-b^2)}{b}=25$~~

$\frac{5-b^2}{b}+9b^2=25$

~~$125\cdot9=1250-125=1125$~~

~~$-25=1100-125=975$~~

$5-b^2+9b^3-25b=0$ $\frac{25+b^4-10b^2}{b^2}+9b^2=25$

$\begin{cases}9b^2+9ab=45\\ 9b^2+a^2=25\end{cases}$

$9b^3-b^2-25b+5=0$

$9ab-a^2=20$

$a^2-9ab+20=0$; $a^2=9ab-20$; $9ab-20-5ab+4b^2=0$

$4ab+4b^2=20$

$b^2+ab=5$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{array}{r} \times 32 \\ 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \end{array}$

$= 2\cdot 272 = 4\cdot 136 = 8\cdot 68 = 16\cdot 34$

$x = \frac{-30 \pm 4\sqrt{34}}{16} = \frac{-15 \pm 2\sqrt{34}}{16} \approx$ $-\frac{1}{5} \approx -0{,}2$; $-1{,}7$

$356 = 2\cdot 178 = 4\cdot 89.$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2\cdot[\tfrac{1}{2}] = 0.$

$f(\frac{7}{4}) = f(\frac{1}{4}) + f(7)$

$f(x) = 4 - \frac{1}{4x+3}$; $x \neq -\frac{3}{4}$; $x = -\frac{3}{4}$ - асимптота (верт.)

$f(\frac{7}{4}) = f(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{7}{2})$

$= f(7) + 2f(\frac{1}{2})$

$1 + 2f(\frac{1}{2}) = 1$

$x=1, y=1$ - не ок

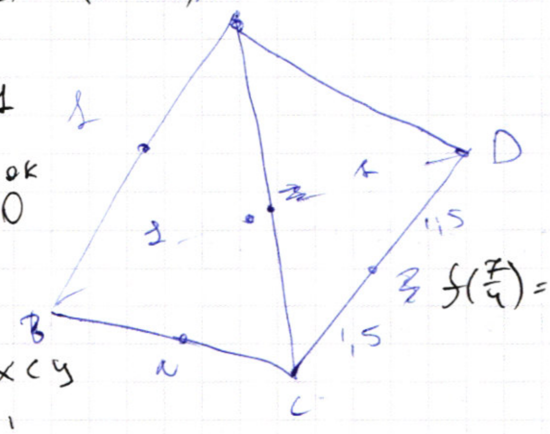
$x=1, y=2: f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{5}) = 0.$

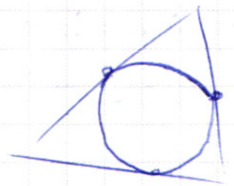
$f(\frac{10}{2}) = f(5)$



$\begin{cases} -\frac{3}{4}a + b = 1 \\ -\frac{11}{4}a + b = 5 \end{cases}$

$\triangle BCD$: $\begin{cases} -3a + 4b = 4 \\ -11a + 4b = 20. \end{cases}$

$f(\frac{7}{4}) =$



$8a = -16$

$a = -2.$

$4b = 4 + 3a$

$4b = -2; b = -\frac{1}{2}.$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$3 + \frac{4}{4x+3} + 4x + 1 = 0$

$6(4x+3) + 4x(4x+3) + 4x + 3 = 0$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$f(\frac{2}{4}) = f(\frac{1}{2}) =$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$f(\frac{4}{20}) = f(\frac{1}{5}) =$

$f(1) = f(\frac{1}{5}) + f(5)$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = \frac{2}{5}$; $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$f(\frac{1}{5}) = f(1) - f(5)$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$

$= \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$24x + 18 + 16x^2 + 12x + 4x + 3 = 0$

$16x^2 + 40x + 21 = 0$

$D =$

$6 + \frac{4}{4x+3} + 4x + 1 = 0.$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases}$

$\frac{4 + 4x(4x+3) + 7(4x+3)}{4x+3} = 0$

$4 + 16x^2 + 12x + 28x + 21 = 0$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$ $D = 40^2 - 4\cdot 16\cdot 25 = 1600 - 1600 = 0.$

$\sin^2 2\alpha + (-1 - 2\sin 2\alpha)^2 = 1$

$\sin^2 2\alpha + 1 + 4\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 1$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}. \end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)