МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ или $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(1): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -1$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |:2$

$\cos\alpha\,(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. $tg\alpha$ определен

$4\sin\alpha = \cos\alpha$

$4\,tg\alpha = -1$

$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{4}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ или $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$\boxed{tg\alpha = 0}$

$4 + tg\alpha = 0$

$\boxed{tg\alpha = -4}$

Ответ: -4 ; 0 ; $-\frac{1}{4}$

2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4 & (2) \end{cases}$

(1): $9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$, где $\underline{3y-2x \geq 0}$

$4x^2 + (2-15y)x + 9y^2+3y-2 = 0$

$D = 4-60y+225y^2-144y^2-48y+32 = 81y^2-108y+36 = 9(9y^2-12y+4) = (3(3y-2))^2 = (9y-6)^2$ (т.к. $\pm$, то модуль не нужен)

$x = \frac{15y-2\pm|9y-6|}{8} = \left[\begin{array}{l} \frac{15y-2-9y+6}{8} \\ \frac{15y-2+9y-6}{8} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \frac{6y+4}{8} \\ \frac{24y-8}{8} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \frac{3y+2}{4} \\ 3y-1 \end{array}\right.$

☒ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Если $x = \frac{3y+2}{4}$, то

(2): $3\cdot\frac{(3y+2)^2}{16} + 3y^2 - 4y - 4 - 6\cdot\frac{3y+2}{4} = 0$

~~$3\cdot\frac{(3y+2)^2}{16} + 3(3y+2)(y-2) + \frac{3}{2}\cdot(3y+2) = 0$~~

~~$(3y+2)\left(\frac{3y+2}{16} + y - 2 + \frac{1}{2}\right) = 0$~~

$y = 2$
$x = 2$

Проверка: $3\cdot 2 - 2\cdot 2 > 0$
$6 - 4 > 0$
$2 > 0$

$y = -\frac{2}{3}$

$x = 0$

~~$\frac{3y+2}{16} + y - 2 + \frac{1}{2} = 0 \quad |\cdot 16$~~

~~$3y + 2 + 16y - 32 + 8 = 0$~~

~~$19y = 22$~~

~~$y = \frac{22}{19}$; $x = \frac{3y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{2\cdot 19} + \frac{1}{2} = \frac{33+19}{2\cdot 19} = \frac{52}{2\cdot 19} = \frac{26}{19}$~~

~~Проверка: $3y - 2x \geq 0$~~

~~$\frac{66}{19} - \frac{52}{19} \geq 0$ ✓~~

~~$\Rightarrow \left(\frac{26}{19}; \frac{22}{19}\right)$ — реш.~~

Если $x \neq 0$, $y = -\frac{2}{3}$, то

(1): $-2 = \sqrt{\ldots}$

нет реш.

$\Rightarrow (0; -\frac{2}{3})$ не подходит

Если $x = 3y - 1$, то $3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1) - 4y - 4 = 0$

$3(9y^2 - 6y + 1) + 3y^2 - 18y - 4y + 2 = 0$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$

$6y^2 - 8y + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 - 6 = 10$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$

~~$30y^2 - 40y + 3 = 0$~~

~~$\frac{D}{4} = 400 - 120 = 280 = 4\cdot 70$~~

~~$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{70}}{24} = \frac{10 \pm \sqrt{70}}{12}$~~

~~Если $y = \frac{10 - \sqrt{70}}{12}$, то $x = \frac{10-\sqrt{70}}{4} - 1 = \frac{6-\sqrt{70}}{4}$~~

~~$3y - 2x \geq 0$~~

~~$\frac{10-\sqrt{70}}{4} - \frac{12 - 2\sqrt{70}}{4} = \frac{10 - \sqrt{70} - 12 + 2\sqrt{70}}{4} = \frac{\sqrt{70} - 2}{4} \geq 0$ ✓~~

~~$\Rightarrow \left(\frac{6-\sqrt{70}}{4}; \frac{10-\sqrt{70}}{12}\right)$ — решение~~

Если $y = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$, то

$x = \frac{4+\sqrt{10}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$3y - 2x = \frac{4+\sqrt{10}}{2} - \frac{4+2\sqrt{10}}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{2} < 0$

$\Rightarrow$ не подходит

~~Если $y = \frac{10+\sqrt{70}}{12}$, то $x = \frac{6+\sqrt{70}}{4}$~~

~~$3y - 2x < 0$~~

~~$\frac{10+\sqrt{70}}{4} - \frac{12+2\sqrt{70}}{4} < 0$~~

~~$\frac{-\sqrt{70} - 2}{4} < 0$ $\Rightarrow$ не подходит~~

Если $y = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$, то $x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

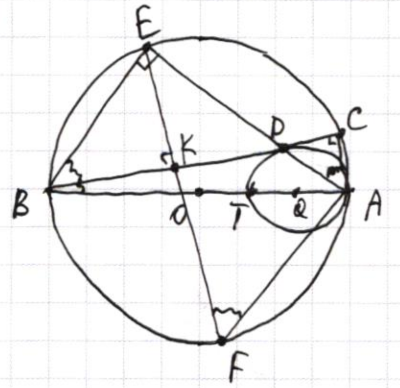
$3y - 2x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - \frac{4-2\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0 \Rightarrow$ подходит

Ответ: $(2;2)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

~~Ответ: $\left(\frac{26}{19}; \frac{22}{19}\right)$; $\left(\frac{6-\sqrt{70}}{4}; \frac{10-\sqrt{70}}{12}\right)$; $(2;2)$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)

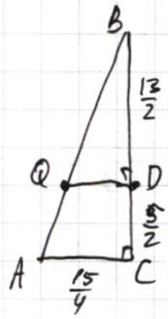


① Т.к. BA – диаметр, то $\angle BCA = 90^\circ$

Пусть O – центр Ω; Q – центр ω; R – радиус Ω; r – радиус ω; $BA \cap \omega = T$

Т.к. BC – касательная, то $QD = 90^\circ$

②



Рассмотрим $\triangle BQD$ и $\triangle BAC$;

$\angle B$ – общий; $\angle QDB = \angle C = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle BAC$ (по 2 углам)

$\Rightarrow \dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{13}{5}$; $\dfrac{2R-r}{r} = \dfrac{13}{5}$

$10R - 5r = 13r$

$18r = 10R$

$\boxed{r = \frac{5}{9}R}$

По т. о касательной и секущей:

$BD^2 = BT \cdot BA$

$\dfrac{13^2}{2^2} = 2(R-r)\cdot 2R$

$\dfrac{13^2}{2^2} = \cancel{4}\cdot\dfrac{4}{9}R^2$

$R^2 = \dfrac{13^2\cdot 3^2}{8^2} = \left(\dfrac{39}{8}\right)^2$

$\Rightarrow R = \dfrac{39}{8}$; $r = \dfrac{195}{72}$

③ В $\triangle ABC$ по т. Пифагора:

$AC = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - 9^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{39}{4}-9\right)\left(\frac{39}{4}+9\right)} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{75}{4}} = \frac{3\cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

В $\triangle ADC$ по т. Пифагора:

$AD = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

Т.к. $BC \cap EA = D$, то

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$ED \cdot \frac{\cancel{5}\sqrt{13}}{\cancel{4}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{\cancel{5}}{2}$

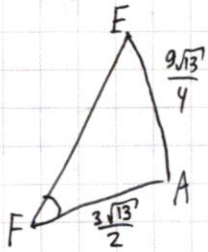
$ED = \sqrt{13}$

$\Rightarrow EA = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$\triangle EBA$ – прямоугольный (т.к. BA – диаметр): $\sin\angle EBA = \dfrac{9\sqrt{13}}{4\cdot 39} = \dfrac{3\sqrt{13}}{39} = \dfrac{\sqrt{13}}{13} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

④ Т.к. $\angle EBA$ и $\angle EFA$ опираются на EA, то $\angle EFA = \angle EBA = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

⑤



Т.к. $\angle EDK = \angle CDA$ (верт.); $\angle EKD = \angle ACD = 90^\circ$, то $\triangle EDK \sim \triangle ADC$ (по 2 углам)

$\Rightarrow \angle DEK = \angle DAC$; $\sin\angle DAC = \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{\cancel{5}\cdot 4}{2\cdot\cancel{5}\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow \sin\angle DEK = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\angle DEK = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

В $\triangle EFA$ по т. синусов: $\dfrac{9\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{4\cdot 3} = \dfrac{FA\cdot\sqrt{13}}{2}$; $FA = \dfrac{2\cdot 9\sqrt{13}}{4\cdot 3} = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$

Заметим, что $\cos\angle AEF = \sin\angle AFE \Rightarrow \triangle AEF$ – прямоугольный.

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

$$\begin{array}{r} \times\ 27 \\ 13 \\ \hline 81 \\ +\ 27\ \ \\ \hline 351 \end{array}$$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{195}{72}$; $\angle AEF = \arcsin \frac{3}{\sqrt{17}}$;

$S = \frac{351}{16}$

(3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $t = x^2+6x > 0$, тогда $3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

Т.к. $t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$, то $3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\log_4 t}$

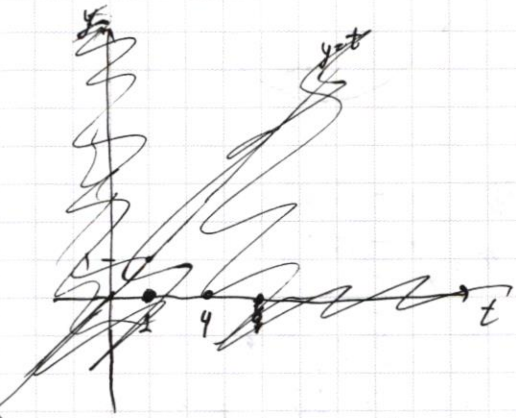
$5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} \leq t$

~~Пусть~~ $\cancel{f(x) = 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}}$

$\cancel{f'(x) = 5^{\log_4 t} \cdot \frac{\ln 5}{t \cdot \ln 4} - 3^{\log_4 t} \cdot \frac{\ln 3}{t \cdot \ln 4} =}$

$\cancel{= \frac{5^{\log_4 t}}{t} \cdot \log_4 5 - \frac{3^{\log_4 t}}{t} \cdot \log_4 3}$

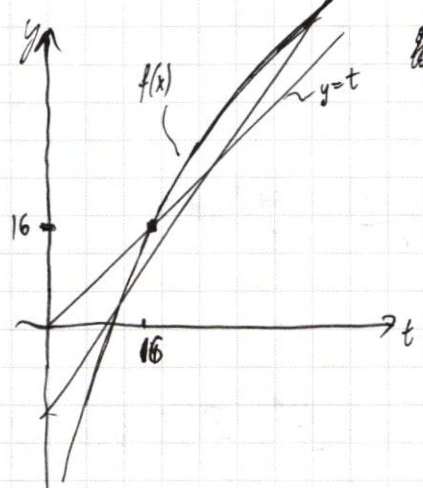
~~Если~~ $\cancel{t \leq 16}$, ~~то~~ $\cancel{f'(x)}$

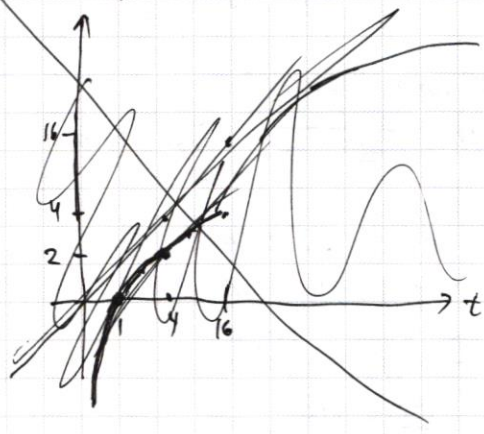


Пусть $f(x) = 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}$

$f'(x) = \frac{5^{\log_4 t}}{t} \cdot \log_4 5 - \frac{3^{\log_4 t}}{t} \cdot \log_4 3$

~~Если~~ ~~то~~





(5) $f(ab) = f(a) + f(b)$

Если $b = \frac{1}{a}$, то $f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$. Если $a=1, b=1$, то $f(1) = f(1) + f(1)$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$ $f(1) = 0$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

~~Заметим, что~~ $\cancel{f(x) = \left\{ \left[\frac{x}{4}\right] \right.}$ ~~, если x ...~~ ~~0, если ...~~

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
1	0	8	0	16	0	24	0
2	0	9	0	17	4	25	2
3	0	10	1	18	0	26	3
4	0	11	2	19	4	27	0
5	1	12	0	20	1		
6	0	13	3	21	1		
7	1	14	1	22	2		
		15	1	23	4		

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)=0$

Если $x \in \{3;4;6;8;9;12;16;18;24;27\}$, то $y \in \{5;7;10;11;13;14;15;17;19;20;21;22;23;25;26\}$

Всего пар $10 \cdot 15 = 150$

$f(x)=1$

Если $x \in \{5;7;10;14;15;20;21\}$, то $y \in \{11;13;17;19;22;23;25;26\}$

Всего пар $7 \cdot 8 = 56$

$f(x)=2$

Если $x \in \{11;22;25\}$, то $y \in \{13;17;19;23;26\}$

Всего пар $3 \cdot 5 = 15$

$f(x)=3$

Если $x \in \{13;26\}$, то $y \in \{17;23\}$

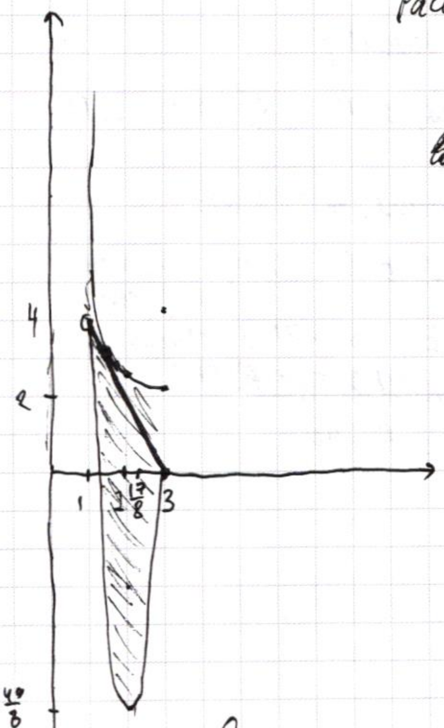
Всего пар $2 \cdot 2 = 4$

Если $f(x) \geq 4$, то нет подходящего y

Итого: $150+56+15+4 = 165+60 = 225$

Ответ: 225

(6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$



Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1;4)$ и $(3;2)$

$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ $2a=-4$ $a=-2$ $b=6$

$y=-2x+6$ — искомая прямая

Найдем точки пересечения этой прямой с гиперболой

$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6$

$(4x-3) = (2x-2)(-2x+6)$

$4x-3 = -4x^2+16x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=1,5$

$\Rightarrow$ эта прямая касается гиперболы. Такая прямая нам подходит

Если мы возьмем любые другие значения a и b, то прямая либо пересечет гиперболу, либо пересечет параболу и найдется такой x который не будет удовлетворять условию

Ответ: $a=-2$; $b=6$

③ $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $x^2+6x=t$, тогда $3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

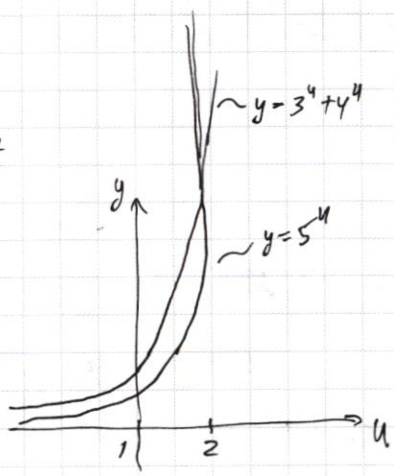
$t>0$

Т.к. $t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$, то $3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

Пусть $u = \log_4 t$, тогда $3^u + 4^u \geq 5^u$

Заметим, что при $u > 2$, то $3^u + 4^u < 5^u$

Но при $u \leq 2$ нер-во $3^u + 4^u \geq 5^u$ всегда выполн.



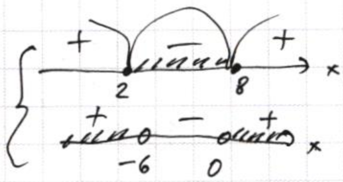
$\Rightarrow$ $u \leq 2$

$\log_4 t \leq 2$

$0 < t \leq 16$

$0 < x^2+6x \leq 16$

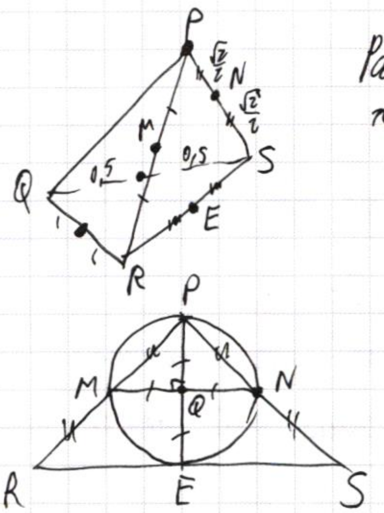
$\begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0 \\ x^2+6x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+8) \leq 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$



$\Rightarrow x \in [2; 8]$

Ответ: $[2; 8]$

⑦



Рассмотрим $\triangle PRS$. Т.к. $P; M; N; E$ лежат на одной сфере, то $PMNE$ – вписанный.

При этом RS – касательная к окружности, описанной около $PMNE$

$\Rightarrow PE \perp RS$; PE – диаметр

Т.к. MN – средняя линия, то $MN \parallel RS \Rightarrow MN \perp PE$

Пусть $MN \cap PE = Q$

Т.к. MN – средняя линия, то $PQ = QE$

Но т.к. PE – диаметр, то Q – центр описанной окружности

$\Rightarrow MQ = QP = QN = QE \Rightarrow MPNE$ – квадрат

$\Rightarrow PR = RS = \sqrt{2}$; $\angle P = 90°$

$\Rightarrow RS = 2$

Ответ: $RS = 2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

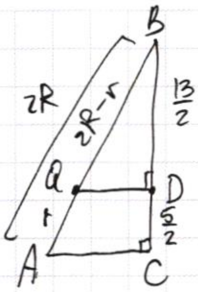
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{2\cdot 9}$

$\frac{2R-r}{r} = \frac{13}{5}$

$10R - 5r = 13r$

$18r = 10R$

$9r = 5R$

$r = \frac{5R}{9}$

$\Rightarrow \frac{169}{4} = 4\cdot\left(R - \frac{5}{9}R\right)\cdot R$

$\frac{169}{4} = 4\cdot\frac{4}{9}R^2$

$R^2 = \frac{13^2\cdot 3^2}{}$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{9+16}\,5 = \left[\begin{matrix}-8\\2\end{matrix}\right.$

$\cancel{x^a + x^b}$

$\cancel{a^x + b^x = ab^x}$

$\cancel{a^x - b^x(1-a^x)} = 0$

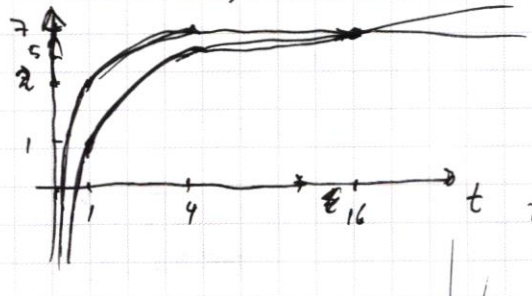
③ $3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$27 + 64 < 125$

$81 + 256 < 625$

~~Если $t \geq 16$, то~~ , т.к.



$f(x) = 3^{\log_4 t} + t$

$f'(x) = 3^{\log_4 t}\cdot \ln 3\cdot\frac{1}{t\cdot\ln 4} + 1$

$\frac{3^{\log_4 t}}{t}\cdot\log_4 3 + 1 \quad \frac{5^{\log_4 t}}{t}\cdot\log_4 5$

$\times\frac{625}{5}$ 3025

$3^{\log_4 t}\cdot\log_4 3 + t \quad 5^{\log_4 t}\cdot\log_4 5$

$\times 81\ 3$

$5^u - 3^u \leq 4^u$

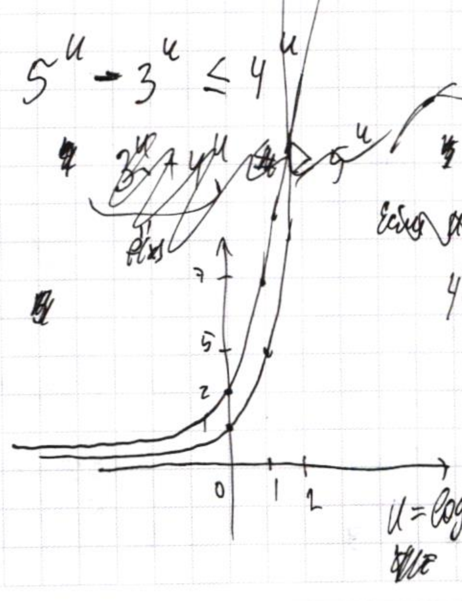
$243 + 1024 =$

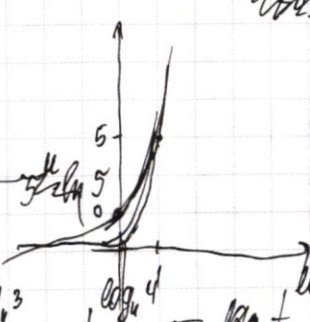
$3^u + 4^u > 5^u$

$4^u + 3^u \geq 5^u$

$4^u \ln 4 + 3^u \ln 3 \quad 5^u \ln 5$

$f(x) =$





$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} = t^{\log_4 5}$

$u = \log_4 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

⑤ $f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое

$x\in[3;27]$

$y\in[3;27]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(0)=0$ $f(3)=0$

$f(1)=0$ $f(5)=1$

$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$0=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

$f(0)=0$	$7\to1$
$f(1)=0$	$8\to0$
$f(2)=0$	$9\to0$
$f(3)=0$	$10-$
$f(4)=0$	
$f(5)=1$	
$f(6)=0$	

⑥ $\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$\frac{4x-4+1}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$

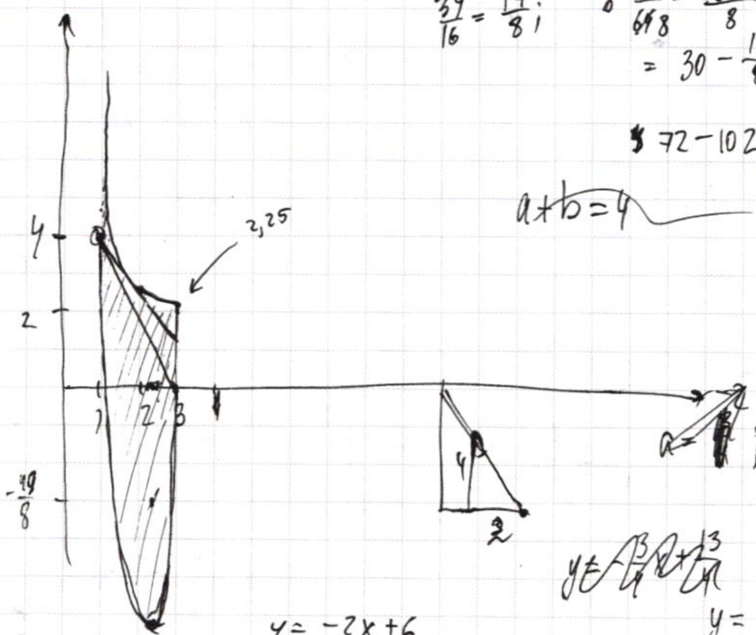
$17\cdot17=289$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$; $8\cdot\frac{17^2}{64}-\frac{2\cdot17^2}{8}+30=$

$=30-\frac{17^2}{8}=\frac{240-289}{8}=-\frac{49}{8}$

$72-102+30$

$a+b=4$ $2+\frac{1}{2x-2}=ax+b$



$a=-\frac{1}{2}$ $b=\frac{9}{2}$

$\begin{cases}a+b=4\\3a+b=0\end{cases}$

$2a=-4$ $b=6$

$a=-2$

$y=-2x+6$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$

$4x-3=(2x-2)(-2x+6)$

$4x-3=-4x^2+16x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$\frac{D}{4}=36-36=0$

$x=\frac{3}{2}$

$(2x-3)^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{4}=9-9y^2+12y+12=$

$=-9y^2+12y+21=$

$=-3(3y^2-4y-7)=$

$=-3(y+1)(y-\frac{7}{3})$

$y\in[-1;\frac{7}{3}]$

$(15^2-12^2)=3\cdot 27=81$

$3y-2x=\sqrt{x(3y-2)-(3y-2)}$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$\frac{D}{4}=3^2$

$x=\frac{-1\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}-1\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0$

$4x^2+(2-15y)x+9y^2+3y-2=0$

$D=4-60y+225y^2-16\cdot 9y^2-16\cdot 3y+32=$

$=81y^2-108y+36=$

$=9(9y^2-12y+4)=$ $(3y-2)$

$=9(3y-2)^2$

$x=\frac{15y-2\pm 3(3y-2)}{8}$ $x=15y-2-$

③ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Пусть $t=x^2+6x$, тогда $3^{\log_4 t}+t\geq|t|^{\log_4 5}$

$\underline{t>0}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

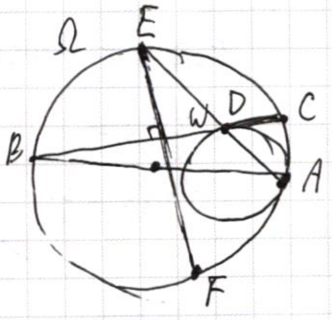
$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}$

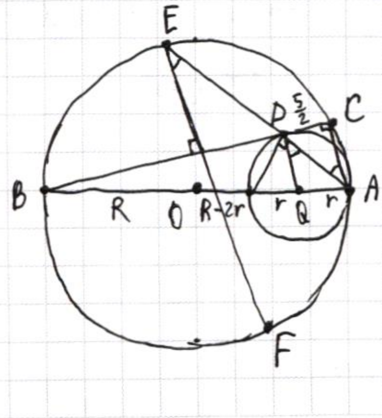
$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}-5^{\log_4 t}\geq 0$

$t\geq 4,$

④



$BD=\frac{13}{2}$



$ED\cdot DA=BD\cdot DC$

$ED\cdot DA=\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}$ св-во кас и сек

$\frac{169}{4}=4(R-r)\cdot R$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} 8\sin^2(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$8\sin^2(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$8\sin^2(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$\cancel{8\sin(2\alpha+2\beta)(8\sin(2\alpha+2\beta)-\cos 2\beta}$

$x+y=\alpha$
$x-y=\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta =$
$=\sin(x+y)+\sin(x-y) =$
$= 2\sin x\cdot\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{8\cdot\sqrt{17}}{17\cdot 2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \longrightarrow \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha = 0$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha\,(8\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$

$4\,\mathrm{tg}\,\alpha = -1$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{4}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$
$\downarrow$
$\mathrm{tg}\,\alpha = 0$

$8\cos\alpha + \sin\alpha = 0$
$4 + \mathrm{tg}\,\alpha = 0$
$\mathrm{tg}\,\alpha = -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

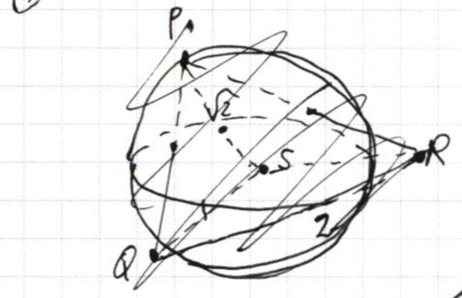
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

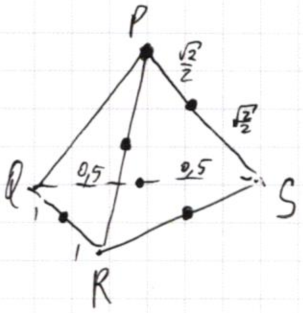
ШИФР

(заполняется секретарём)

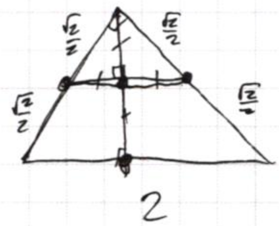
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

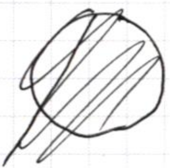
7

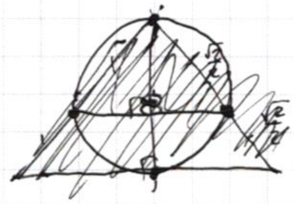




QP







$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$

$x+y=\alpha$ $\quad \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \frac{\alpha-\beta}{2}$

$x-y=\beta$

$3\left(\frac{9y^2+12y+4}{16} + 3y^2-4y-4 - \frac{3}{2}(3y+2) = 0 \right| \cdot 16 \qquad -24(3y+2)$

-36

$27y^2+36y+12+48y^2-64y-64-72y-48=0$

$75y^2-100y-100=0$

$3y^2-4y-4=0$

$y=2 \qquad y=-\frac{2}{3}$

$3\cdot\frac{64}{16} - 6\cdot\frac{8}{4} = 12-12$

$30y^2-40y+5=0$

$\frac{D}{4} = 400-150=350=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)