МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Решение

1) $\sin 2\alpha\cdot(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$, где $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$; $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$|\sin 2\beta| = \frac{1}{\sqrt5}$; $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

2) 1. $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \text{ не определён}\\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \text{ - первое значение}\end{array}\right.$

2. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2 = 0$; $4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0\\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2\end{array}\right.$

Ответ: $\{-2; -\frac{1}{2}; 0\}$

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$, $x \geq 2y$ – ОДЗ

Решение

1) На ОДЗ верно, что:

$\begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y+1 \quad (1) \\ x=4y-2 \quad (2) \end{array} \right. \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

(1): $(y-1)^2+9(y-1)^2=25 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \; ; x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \; ; x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array} \right.$

(2): $16(y-1)^2+9(y-1)^2=25 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=2 \; ; x=6 \\ y=0 \; ; x=-2 \end{array} \right.$

По ОДЗ $x \geq 2y \Rightarrow$

1. $2+\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2\sqrt{\frac{5}{2}}+2$ – неверн.
2. $2-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2-2\sqrt{\frac{5}{2}}$ – верно
3. ~~12~~ $6 \geq 4$ – верно
4. $-2 \geq 0$ – неверно.

2) Подходят корни $(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$ и $(6;2)$

Проверка: $\begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 10(1-\sqrt{\frac{5}{2}}-1)^2=25 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$ верно.

$\begin{cases} 2=\sqrt{12-6-4+2} \; ; 2=2 \\ 25(2-1)^2=25 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$ верно

Ответ: $(2-$ ~~$\sqrt{\frac{5}{2}}$~~ $\sqrt{2,5}\; ; 1-\sqrt{2,5})$; $(6;2)$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$; $x^2+18x>0$

Решение

1) Пусть $x^2+18x=t$, причём по ОДЗ $t>0 \Rightarrow$

$f_1(t)=5^{\log_{12}t}+t$; $f_2(t)=t^{\log_{12}13}$, причём

$f_1(t)$ – возраст. на ОДЗ (т.к. $5^{\log_{12}t}\uparrow$ и $t\uparrow$)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f_2(t)$ – возрастающая на ОДЗ ф-ия (на $t \in (0, +\infty)$) значит, если сначала $f_1(t) > f_2(t)$, то после пересеч. ф-ий, т.к. обе монотонно возрастающие (на $t \in (0; +\infty)$), то знак поменяется на $f_1(t) < f_2(t)$

2) Нам надо найти t, при которых

$$f_1(t) \geq f_2(t), \text{ т.е. } 5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

3) Заметим, что равенство достигается при $t = 144$:

$$5^2 + 144 = 144^{\log_{12} 13}, \text{ т.к. } 169 = 169$$

Заметим ещё, что при $t = 12$ $f_1(t) > f_2(t)$:

$$5 + 12 > 12^{\log_{12} 13} = 13, \text{ откуда следует, что}$$

$f_1(t) \geq f_2(t)$ для $t \leq 144$ и $t > 0$ (по ОДЗ)

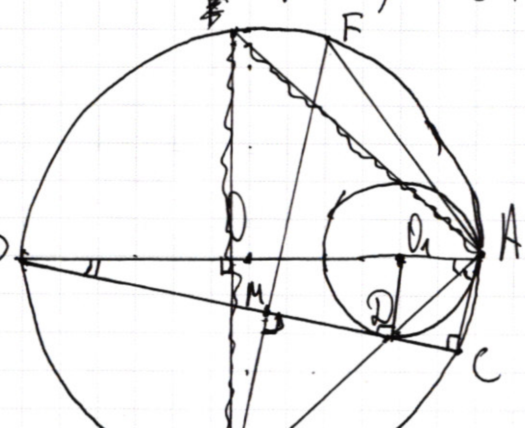
4) Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x < 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$ – подходят

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

4.



1) Пусть O – центр Ω; O_1 – центр ω

2) По лемме Архимеда E – центр дуги $\smile BC$, т.е. AD – бисс. $\triangle ABC$; тогда по св-ву бисс-сы:

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{17}{8}$; $BC = 17 + 8 = 25$, тогда по усл. $AB = \frac{17}{8} AC$ и по т. Пифагора в $\triangle ABC$:

$AB^2 = AC^2+BC^2$; $\frac{17^2}{8^2}AC^2 = AC^2+BC^2$

$\frac{15^2}{8^2}AC^2 = 25^2$; $AC = \sqrt{\frac{25^2\cdot 8^2}{15^2}} = \frac{25\cdot 8}{15} = \frac{40}{3}$, откуда

$AB = \frac{17}{8}\cdot\frac{40}{3} = \frac{85}{3}$, где AB - диаметр $\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{85}{6}$ - рад. Ω

3) Если провести O_1D, то т.к. BC - касательная, то $O_1D \perp BC$, тогда $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90°$ и $\angle CBA$ - общий $\Rightarrow \triangle DO_1B \sim \triangle CAB$ по I признаку подобия $\triangle$-ов $\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC}$, где $O_1D = r \Rightarrow$

$\frac{r}{\frac{40}{3}} = \frac{17}{25}$; $r = \frac{17\cdot \cancel{40}8}{\cancel{25}5\cdot 3} = \frac{136}{15}$ - радиус ω.

4) Пусть $\angle CBA = \beta$; $\angle EAC = \angle BAE = \alpha$, тогда $\angle EBA = \angle EBFA = \alpha+\beta$, причём из $\triangle ABC$ $2\alpha+\beta = 90 \Rightarrow$

$\alpha+\beta = 90-\alpha = \angle EFA \Rightarrow \sin\angle EFA = \cos\alpha$, где

$\cos 2\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{85}{3}} = \frac{8\cdot 5}{17\cdot 5} = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17}$; $\cos^2\alpha = \frac{25}{34}$, причём $\alpha < 90$ (из $\triangle$-а) $\Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \sin\angle EFA \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

5) $FE \cap BC = M$ т.к. $\angle EMC = 90° = \frac{\smile EC + \smile BF}{2}$, где $\smile EC = 2\alpha \Rightarrow$

$90 = \frac{2\alpha + \smile BF}{2}$; $\smile BF = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle BEF = \frac{\smile BF}{2} = 90 - \alpha =$

$= \alpha + \beta = \angle EFA \Rightarrow$ как накрест лежащие, то есть

$FA \parallel BE \Rightarrow \angle EBA = \angle BAF = \alpha+\beta$ и тогда $\angle EAF =$

$= \angle EAB + \angle BAF = \alpha+\beta+\alpha = 2\alpha+\beta = 90° \Rightarrow EF$ - диаметр (проходит через O) $\Rightarrow \triangle EAF$ - прямоуг. и $EF = AB$,

причём $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ и $\angle FEA = 90° - \angle BEF = 90° - \alpha - \beta = \alpha \Rightarrow$

$\cos\angle FEA = \frac{AE}{EF} = \frac{5}{\sqrt{34}}$; $AE = \frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{85}{3} = \frac{25\cdot 17}{\sqrt{34}\cdot 3} = \frac{25\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$;

$\sin\angle FEA = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow AF = EF\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{5\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF = \frac{1}{2}\cdot\frac{25\sqrt{17}\cdot 5\cdot\sqrt{17}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{125\cdot 17}{6} = \frac{2125}{6}$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{136}{15}$; $\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $\frac{2125}{6}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где p-простое
$1 \leq x \leq 24$; $1 \leq y \leq 24$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

Решение

1) Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{x}{y}\right)$, т.е. $f(1) = 0$
(где $\frac{x}{y}$ - рац. пол.) $\left(f(t) = f(1) + f(t), \text{ где } t \text{ - рац. } t>0 \right)$

2) Тогда $f(1) = 0$; $f(1) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$
если $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$, то $f\left(\frac{y}{x}\right) < 0$
$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$, т.е.
$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0, \text{ т.е.}$$
$f(x) < f(y)$ - найти все такие $(x; y)$

3) Для всех натуральных чисел на промеж. $t = [1; 24]$, $t \in \mathbb{N}$
Запишем $f(t)$: $t=1$; $f(t) = 0$; $t = 2$; $f(t) = 0 \ldots$
Таблица соответствия: (для простых $f(t) = \left[\frac{t}{4}\right]$)

$1 \to 0$
$2 — 0$ (прост.)
$3 — 0$ (прост.)
$4 — f(2) + f(2) = 0$
$5 — 1$
$6 — f(2) + f(3) = 0$
$7 — 1$
$8 — 3f(2) = 0$
$9 — 2f(3) = 0$
$10 — f(2) + f(5) = 1$
$11 — 2$
$12 — 2f(2) + f(3) = 0$
$13 — 3$
$14 — f(2) + f(7) = 1$
$15 — f(3) + f(5) = 1$
$16 — 4f(2) = 0$
$17 — 4$
$18 — 2f(3) + f(2) = 0$
$19 — 4$
$20 — f(5) + f(4) = 1$
$21 — f(3) + f(7) = 1$
$22 — f(2) + f(11) = 2$
$23 — 5$
$24 — f(6) + f(4) = 0$

4) Теперь, если $f(x) = 0$, то $f(y) > 0$, т.е.
вариантов $f(x) \to 11$; $f(y) \to 13 \Rightarrow 11 \cdot 13$
пар; $f(x) = 1$, то $f(y) \geq 2$; т.е. $f(x) \to 7$, $f(y) \to 6 \Rightarrow$
$7 \cdot 6 = 42$ пары

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Если $f(x)=2$, то $f(y)\geq 3$, т.е. $f(x)\to 2$ $f(y)\to 4 \Rightarrow 2\cdot 4=8$ пар

Если $f(x)=3$, то $f(y)\geq 4$, т.е. $f(x)\to 1$; $f(y)\to 3 \Rightarrow 1\cdot 3=3$ пары

Если $f(x)=4$, то $f(y)\geq 5$, т.е. $f(x)\to 2$; $f(y)\to 1 \Rightarrow 1\cdot 2=2$ пары

$f(x)<5$, т.к. иначе нет для x в пару $y \Rightarrow$

Всего вариантов: $143+42+8+3+2=193+3+2=198$ пар

Ответ: 198

6. $\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-14$

Решение

1) Найдем, при каких x верно, что

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leq -8x^2-30x-14$$

$$3+\frac{2}{4x+3}\leq -8x^2-30x-14;\quad \frac{1}{4x+3}\leq -4x^2-15x-10,$$

т.к. $x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$, то $4x+3<0$ на этом промежут. $\Rightarrow$

$1\geq(4x+3)(-4x^2-15x-10)$; ~~$16x^3+72x^2+85x+29\geq 0$~~

$16x^3+60x^2+40x+12x^2+45x+30\geq -1$

$16x^3+60x^2+40x+12x^2+45x+31\geq 0$

1) $f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}$ – убывает на промежутке $x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$,

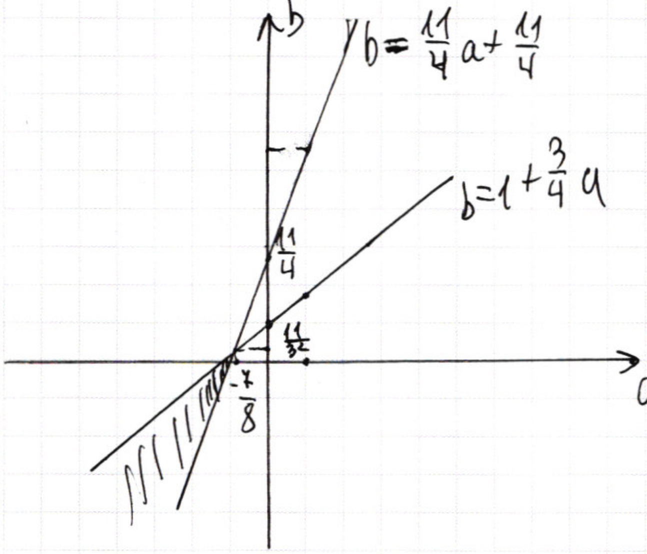
т.е. чтобы $ax+b$ было больше $f(x)$ при люб. x на промеж. $ax+b\geq f\left(-\frac{11}{4}\right)$, т.к. это наиб. знач. $f(x) \Rightarrow ax+b\geq \frac{-33+11}{-11+3}=\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}$

2) $g(x)=-8x^2-30x-14$, где $x_b=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$, т.е. принадл. нашему промеж. $\Rightarrow -\frac{3}{4}$ – дальше от x_b, т.е. $g\left(-\frac{3}{4}\right)$ – наим. знач. ф-ии на промеж. $\Rightarrow$

$ax+b\leq f\left(-\frac{3}{4}\right)=1$ – достаточно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Получается, что $\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \geq \frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4}a+b \leq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} b \geq \frac{11}{4}(a+1) \\ b \leq 1+\frac{3}{4}a \end{cases}$



$\frac{11}{4}a+\frac{11}{4}=1+\frac{3}{4}a$

$2a=-\frac{7}{4}$

$a=-\frac{7}{8}$; $b=1-\frac{21}{32}$;

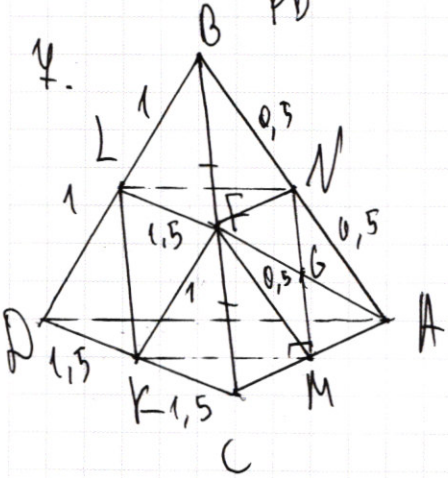
$b=\frac{11}{32}$

Закрашенная область - все подходящие пары $(a;b)$

$\begin{cases} b \leq \frac{11}{32} \\ a \leq -\frac{7}{8} \end{cases}$

Ответ: ~~$\begin{cases} a \leq -\frac{7}{8} \\ b \leq \frac{11}{32} \end{cases}$~~ на рисунке область

7.



1) Т.к. FMAN и KLNM лежат на одной сфере и в одной плоскости (по 4 точки), то и FM ∥ NA; FN ∥ AM; LN ∥ KM; KL ∥ MN, то это вписс. параллелогр. (по св-ву средн. лин.) ⇒ это прямоугольники и центр сферы лежит на перпендик. к (AMN) через G и на перп. к (LNM) через середину KLNM

2) Тогда $NA \perp AM$; $KM \perp MN$

3) ~~Откуда~~ $\cancel{BC}^{CF} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{10}$

4) В силу симметрии D лежит на данной сфере $\Rightarrow$ $\angle FDK$ - тоже прямоуг. $\Rightarrow CF = \sqrt{1+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{13}$

Ответ: $\sqrt{13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

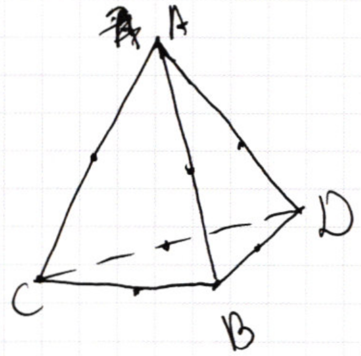
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

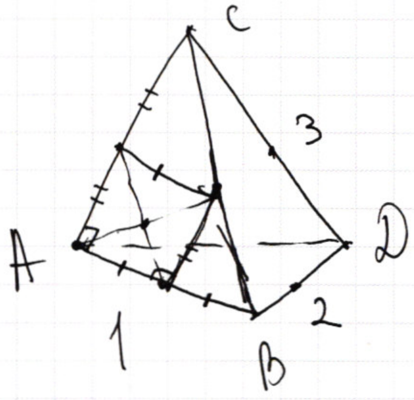
ШИФР

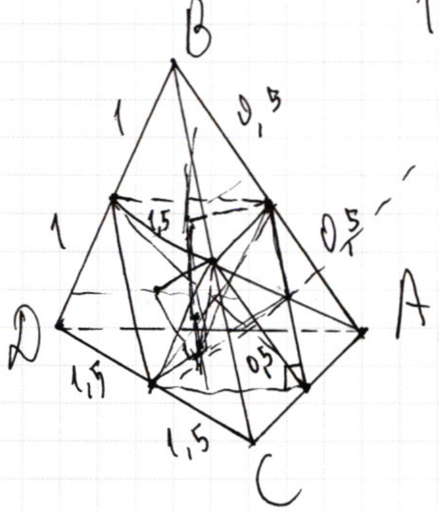
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.







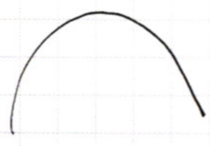
$\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow BC=\sqrt{10}$

$3+\frac{2}{-11+3}$

$3-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}\le 1$

$3+\frac{2}{4x+3}$

$-\frac{11}{4}$



$-\frac{3}{4}$

$-\frac{8\cdot 9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17$

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-\frac{34}{2}=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$, $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

	16	72	85	31
-2	16	40	5	21
-3	16	24	13	2
-4	16	8	53	

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$\frac{2}{4x+3} \le ax+b-3 \le -8x^2-30x-20$, $\frac{1}{4x+3} \le \frac{ax+b-3}{2} \le -4x^2-15x-10$

$-\frac{8\cdot 11^2}{4^2} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - \frac{34}{2}$ $\quad \frac{1}{4x+3} \le -4x^2-15x-10$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17$

$1 \ge (4x+3)(-4x^2-15x-10)$

$-1 \le (4x+3)(4x^2+15x+10)$;

$16x^3+60x^2+40x+12x^2+45x+30 \ge 1$

$16x^3+72x^2+85x+29 \ge 0$

	16	72	85	29
-1	16	56	29	0

$(x+1)(16x^2+56x+29) \ge 0$

$D = 56^2 - 4\cdot 16\cdot 29$

$56\cdot 56 = 3136$, $3136 - 1856 = 1280$, $29\cdot 64 = 1856$, $1280 = 2\cdot 640$, $2^8\cdot 5$

$x_1 = \frac{-56+2^4\sqrt5}{32} = \frac{-7+2\sqrt5}{4}$

$x_2 = \frac{-56-2^4\cdot\sqrt5}{32} = \frac{-7-2\sqrt5}{4}$

$-\frac{4\cdot 11^2}{4^2} + \frac{15\cdot 11}{4} - 10$

$-\frac{121}{4} + \frac{165}{4} - \frac{40}{4}$ $\quad 1$

$x \in [-\frac{7-2\sqrt5}{4}; -1] \cup [\frac{-7+2\sqrt5}{4}; +\infty)$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

$x \in [-\frac{11}{4}; -1]$

$\frac{-7+2\sqrt5}{4} \vee -1$ $\quad -\frac{3}{4} \vee \frac{-7+2\sqrt5}{4}$

$2\sqrt5 \vee 3$ $\quad -3 \vee -7+2\sqrt5$

$2\sqrt5 > 3$ $\quad 4 \vee 2\sqrt5$

$4 < 2\sqrt5$

$\frac{-7-2\sqrt5}{4} \vee -\frac{11}{4}$

$-2\sqrt5 \vee -4$

$-2\sqrt5 < -4$

$\frac{1}{-11+3} \le$

$\begin{cases} ax+b \ge 1 \\ \frac{ax+b-3}{2} \le 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} ax+b \ge 1 \\ ax+b \le 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b \ge 1+a \\ b \le 5+\frac{11}{4}a \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b-a \ge 1 \\ -\frac{11}{4}a+b \le 5 \end{cases}$

$b \ge -\frac{9}{7}$ $\quad a \ge -\frac{16}{7}$ $\quad -4 \le \frac{7}{4}a$ $\quad 1+a \le 5+\frac{11}{4}a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x \in [-\frac{11}{4}; -1]$ $\frac{13}{5}$

$\underbrace{3+\frac{2}{4x+3}}$

$3+\frac{2}{-11+3} \le ax+b$

$\underbrace{ax+b \geq \frac{13}{5}}$

$x_B = -\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$-8\cdot\frac{11^2}{4^2}+\frac{30\cdot 11}{4}-17$

$-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2}$ $= 5$

$-\frac{8\cdot 15^2}{8^2}+\frac{30\cdot 15}{8}-17$

$-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-\frac{136}{8}=\frac{89}{8}$

$-8+30-17=5$;

$\begin{cases} ax+b\le 5 \\ ax+b \geq \frac{13}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} b-a\le 5 \\ -\frac{11}{4}a+b\le 5 \\ -\frac{11}{4}a+b\geq\frac{13}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} b-a\le 5 \\ -\frac{11}{4}a+b\le 5 \end{cases}$

$b-a=-\frac{11}{4}a+b$

$a=0$

$b\le 5$

$b-1\le 5$; $b\le 6$

$b-\frac{11}{4}\le 5$; $b\le\frac{31}{4}$

$b\geq\frac{13}{5}$

$b\geq\frac{13}{5}+\frac{11}{4}$

$b\geq\frac{52+55}{20}=\frac{108}{20}$

$b-a\le -\frac{11}{4}a+b\le 5$

$\frac{7}{4}a\le 0$

$a\le 0$

$b=5+a$

$b=\frac{13}{5}+\frac{11}{4}a$ $b\le 6$; $b\geq\frac{108}{20}$

$5+a=\frac{13}{5}+\frac{11}{4}a$

$\frac{12}{5}=\frac{7}{4}a$; $48=35a$

$a=\frac{48}{35}$; $b=5+\frac{48}{35}=\frac{165+48}{35}=\frac{213}{35}$

$\begin{cases} b-a\le 5 \\ -\frac{11}{4}a+b\le 5 \\ -\frac{11}{4}a+b\geq\frac{13}{5} \end{cases}$

$-\frac{11}{4}a+b\le b-a\le 5$

$-\frac{7}{4}a\le 0$

$a\geq 0$

$b\le 5+a$

$b\le 5+\frac{11}{4}a$

$b\geq\frac{13}{5}+\frac{11}{4}a$

$\frac{13}{5}-\frac{11}{4}=\frac{52-55}{20}=-\frac{3}{20}$

$20-11$

$165+48 = 213$

450 − 225 = 225; 225 − 136 = 89

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\begin{cases}\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1)+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5}$

$-\cos2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow|\sin2\beta|=\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{ll}\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5} & (1)\\ \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} & (2)\end{array}\right.$

1. $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

~~$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$~~

~~$2\cdot\sin2\alpha+\cos2\alpha=-\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$~~

$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\Rightarrow tg\alpha=0\\ 2\cos\alpha=-\sin\alpha\Rightarrow tg\alpha=-2\end{array}\right.$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\Rightarrow \cancel{tg\alpha=0}\\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha\Rightarrow tg\alpha=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$, $x \geq 2y$

$\cancel{(x-2y)^2}$

$(x^2-4x+4) + (9y^2-18y+9) = 25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

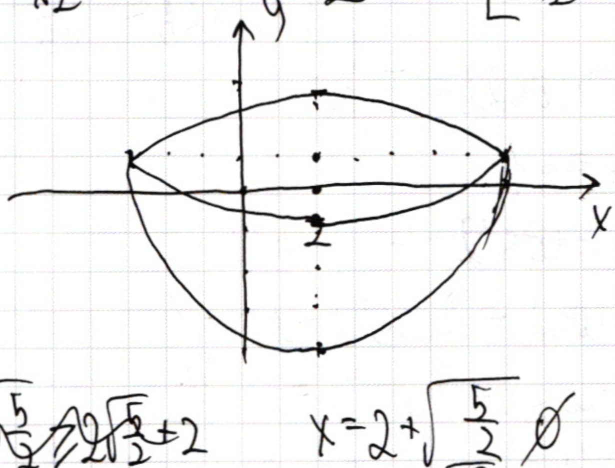
$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-4(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$

$x_1=\frac{5y-1-3(y-1)}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2y+2}{2}=y+1 \\ x_2=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \end{array}\right.$

$x_2=\frac{5y-1+3(y-1)}{2}$



$(y+1-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=\frac{5}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ $\quad y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1$, $\quad y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$2+\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2\sqrt{\frac{5}{2}}+2$ $\quad x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\varnothing$

✓ $x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(4y-2-2)^2+(3y-3)^2=25$ $\quad (y-1)^2=1$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$ $\quad \left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=6 \; ✓ \\ x=-2 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \quad y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} - 2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 2}$

$\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - 2 + 3\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$10\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)^2 = 25 \qquad \frac{10\cdot 5}{2} = 25$ ✓

$6-4 = \sqrt{6\cdot 2 - 6 - 4 + 2} \quad ; \ 2 = 2$

$x = 6 \ ; y = 2$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$

$\cancel{f(x)=}$ $x^2+18x > 0$ - всегда ; $x^2+18x = t, \ t>0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad 5 \geq 1$

$\cancel{t \geq 1}$

$\frac{1}{12}$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$(\log_{15} t)' = \frac{1}{\ln 15 \cdot t}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13}$ $\quad f(t) = 5^{\log_{12} t} + t - t^{\log_{12} 13}$

$\cancel{f'(t)=}$

$5^{\log_{12} t} \geq t\left(t^{\log_{12} 13 - 1}\right)$

$\log_5 5^{\log_{12} t} \geq \log_5\left(t^{\log_{12} 13} - t\right) ; \log_5\left(t\left(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1\right)\right)$

$t\left(t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1\right)$

$\log_{12} t \geq \cancel{\frac{\log_5 t^{\log_{12} 13}}{\log_5 t}}$

$\log_{12} t \geq \log_5 t + \log_5\left(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1\right)$

$(5^{\log_{12}t})' = \cancel{5^{\log_{12}t}\cdot\frac{1}{\log_{12}t}}\quad 5^{\log_{12}t}\cdot\frac{1}{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + t \cancel{- t^{\log_{12}13} = 0} = t^{\log_{12}13}$

$x^2+18x>0 \qquad x(x+18)>0;\quad x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$t^{\log_{12}13} - t = t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$

$5^{\log_{12}t}$

$\log_t(5^{\log_{12}t}+t) \geq \log_t t^{\log_{12}13}$

$\log_t(5^{\log_{12}t}+t) \geq \log_{12}13$

$\cancel{\frac{\log_t(5^{\log_{12}t}+t)}{\log_{12}13}\geq 1}$

$\log_{12}\quad t^{\log_{12}13} - t \leq 5^{\log_{12}t}$

$169-144\leq 5^{\log_{12}12^2}$

$25\leq25$

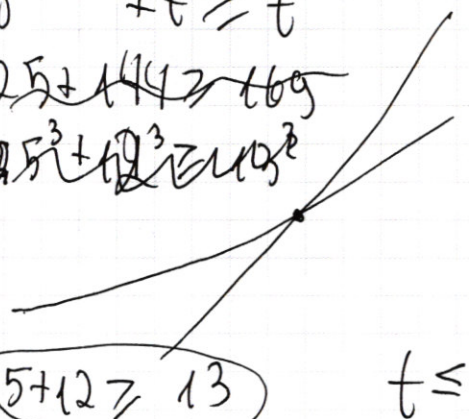
$\boxed{t=144}$

$18\cdot18=324 \qquad 144\cdot4=576 \qquad 576+324=900$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

~~$25+144\geq169$~~

~~$5^3+12^3\geq13^3$~~



$13^3-12^3\leq5^3$

$1(13^2+13\cdot12+12^2)\leq125$

$(13-12)(13^2+13\cdot12+12^2)\leq125$

$13^3+13^2\cdot12+13\cdot12^2-12\cdot13^2-12^2\cdot13-12^3$

$5+12\geq13$

$t\leq144$

$x^2+18x\leq144;\quad x^2+18x-144\leq0$

$D=18^2+144\cdot4=900$

$x_1=\frac{-18+30}{2}=6 \qquad x\in[-24;6]$

$x_2=\frac{-18-30}{2}=-24$

$\begin{cases} x\in[-24;6] \\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)\end{cases}$

$x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

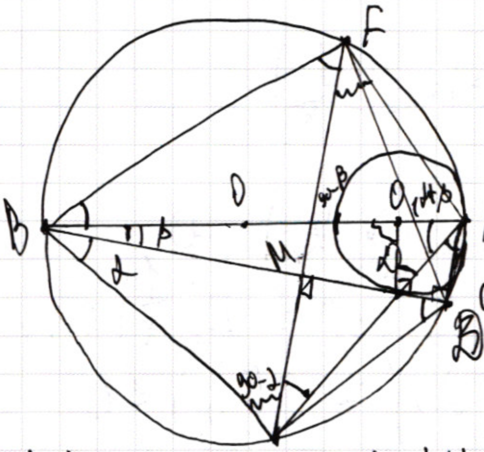
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$CD=8$; $BD=17$

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{17}{8}$

$AB=\frac{17}{8}AC$

$BC=25$

$AB^2=AC^2+BC^2$

$\frac{17^2}{8^2}AC^2=AC^2+25^2$

$\frac{17^2-8^2}{8^2}AC^2=25^2$

$\frac{225}{8^2}AC^2=25^2$

$AC^2=\frac{25^2\cdot 8^2}{225}$

$AC^2=\frac{25\cdot 25\cdot 8\cdot 8}{3\cdot 15\cdot 15\cdot 3}$

$AC^2=\frac{5^2\cdot 8^2}{3^2}$; $AC=\frac{40}{3}$

$AB=\frac{17\cdot 40}{8\cdot 3}=\frac{85}{3}$

$289-64=225$

$17\cdot 8=136$

$17\cdot 5=85$; $85\cdot 5=425$; $425-289=136$

$2\alpha+\beta$

$90-\alpha+\alpha+\beta=$
$=90+\beta$
$180-90-\beta=$
$=180\ 90-\beta$

$R=\boxed{\frac{85}{6}}$

$\cancel{\frac{BO_1}{B}}$

$\frac{BO_1}{BA}=\frac{BD}{BC}=\frac{O_1D}{AC}$

$\boxed{EF=AB}$ диаметр

$\frac{17}{25}=\frac{O_1D}{\frac{40}{3}}$

$O_1D=\frac{17\cdot 40\,8}{5\,\cancel{25}\cdot 3}$

$O_1D=\frac{136}{15}$

$\frac{BO_1}{\frac{85}{3}}=\frac{17}{25}$

$BO_1=\frac{17\cdot 85\,17}{5\,\cancel{25}\cdot 3}=\frac{289}{15}$

$r=AB-BO_1=\frac{85}{3}-\frac{289}{15}=\frac{425-289}{15}=\boxed{\frac{136}{15}}$

$\cancel{tg\beta}$ $\sin\beta=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{40}{3}}{\frac{85}{3}}=\frac{5\cdot 8}{5\cdot 17}=\frac{8}{17}$; $\cos\beta=\frac{15}{17}$

$\angle AFE=\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\beta=\arcsin\frac{8}{17}$

$\sin\angle AFE=\sin(\alpha+\beta)=$
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$
$=\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{15}{17}+\frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{8}{17}=$
$=\frac{85}{17\sqrt{34}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\cos 2\alpha=\frac{8}{17}$

$2\cos^2\alpha-1=\frac{8}{17}$

$2\cos^2\alpha=\frac{25}{17}$; $\cos^2\alpha=\frac{25}{34}$

$17\cdot 5=85$; $125-17\cdot 5$

$\angle AFE=90-\alpha$

$\alpha+\beta=90-\alpha$; $2\alpha+\beta=90$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{25}{34}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=[p/4]$

$1\leq x\leq 24$; $1\leq y\leq 24$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(xy)=f(x)+f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(1)=0$; $\cancel{f(1)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)}$

$f(2)=0$

$f(2)=f\left(2\frac{x}{y}\right)+f\left(2\frac{y}{x}\right)=0$

$f\left(2\frac{y}{x}\right)=f(2y)+f\left(\frac{1}{x}\right)>0$

$f\left(2\frac{x}{y}\right)=f(2x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(1)=0=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$

$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \\ f\left(\frac{y}{x}\right)>0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \\ f(y)+f\left(\frac{1}{x}\right)>0 \end{cases}$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f(y)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)$ $\quad f(x)-f(y)<0$

~~2; 3; 2и2; 2и5; 3и3~~ $\quad \cancel{f(1)=f(y^2)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)}$ $\quad f(x)<f(y)$

x-простое:

$\overset{0}{2}; \overset{0}{3}; \overset{1}{5}; \overset{1}{7}; \overset{2}{11}; \overset{3}{13}; \overset{4}{17}; \overset{4}{19}$; $\quad f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=0$

$\overset{5}{23}$ $\quad f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$\overset{0}{1}; \overset{0}{2}; \overset{0}{3}; \overset{0}{4}; \overset{1}{5}; \overset{0}{6}; \overset{1}{7}; \overset{0}{8}; \overset{0}{9}; \overset{1}{10}; \overset{2}{11}; \overset{0}{12}; \overset{3}{13}; \overset{1}{14}; \overset{1}{15}; \overset{0}{16}; \overset{4}{17}; \overset{0}{18}; \overset{4}{19}; \overset{1}{20}$

$\overset{1}{21}; \overset{2}{22}; \overset{5}{23}; \overset{0}{24}$

$0-11$; $12 \to 11\cdot 13$

$1-7$; $6 \to 7\cdot 6$

$2-2$; $4 \to 2\cdot 4$

1; $2 \to 1\cdot 3$

2; $1 \to 2\cdot 1$

$11\cdot 13 = 143$

$11\cdot 13+7\cdot 6+2\cdot 4+3+2=$

$=143+42+8+5=$

$=193+5=198$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)