МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ $\quad 2500+292$ $\quad 2792$

$\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{4}{5}$ $+\sin 2\alpha$ $\quad 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=2[\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta]$

$5584 | 2 \; 3$; $2792 | 2 \; 3$; $1366 | 2$

$\cos\alpha\cos\beta$ $\quad \cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-4/5$ $\quad 2722 | 2$ $\quad 1366$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{64 \cdot 81}{64}$ $\quad 512$ $\quad 5184$ $\quad 18$ $\quad 2611 \; 3$ $\quad 87$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$ $\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ $\quad \frac{1366}{2}$ 557 $\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad 750+33$ $\quad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta=x$ $\quad 1366 | 2$ $\quad 683$

$\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta=-\frac45$ $\quad \alpha-\beta=y$ $\quad 12$ $\quad 166$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 750$ $\quad 783$ $\quad 2\alpha+2\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \boxed{\alpha=\frac{x+y}{2}}$ $\quad 166 | 2$ $\quad 83$ $\quad -16$ $\quad 6$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ $\quad 683$

$2\alpha+2\beta=\arcsin -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad | 2$

$2\alpha+4\beta=\arcsin -\frac45$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)[\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha)=$

$4\alpha+4\beta=2\arcsin -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad =\frac12[\cos(-2\beta)-\cos(4\alpha+6\beta)]+\frac12(\cos 2\beta-\cos 4\alpha+2\beta)$ ⊜

$2\alpha+4\beta=\arcsin -\frac45$ $\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$4[\alpha+\beta]$ $\quad 1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

$2\alpha=2\arcsin -\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin -\frac45$

2α $\quad$ ⊜ $\cos 2\beta-\frac12(\cos(4\alpha+6\beta)+\cos(4\alpha+2\beta))$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad =\cos 2\beta-\cancel{\cos 2\beta}+\cos(4[\alpha+\beta])=\frac{4}{5\sqrt5}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$ $\quad \cos^2 2(\alpha+\beta)-\sin^2(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{5\sqrt5}$

$\frac12(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ $\quad x+y=4\alpha+6\beta$ $\quad 1-\cos 2\alpha$ $\quad =2^2\cdot 3^2(\ldots)$ $\quad 2^2\cdot3^4+3^2\cdot2^4$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ $\quad x-y=4\alpha+2\beta$ $\quad 18^2+144\cdot4$

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ $\quad 2\cos x\cos y$ $\quad x=4\alpha$ $\quad +4\beta$ $\quad 2^2\cdot3^4+12^2\cdot4=2^2\cdot3^4+3^2\cdot2^2\cdot2^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$;

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

1) $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha)$

$4\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha$

$\cancel{(2\sin\alpha+1)\cos\alpha=0}$

~~$\cos\alpha \neq 0$, т.к. $tg\,\alpha$ определён~~

$\cancel{\sin\alpha = -\frac{1}{2};\ tg\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt3}}$

$\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$\cos\alpha\neq 0$, т.к. $tg\,\alpha$ опред.

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha = -(1-\cos 2\alpha)$

$4\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha\end{array}\right.$

$tg\,\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -2$

$\boxed{\text{Ответ: } 0;\ -\frac{1}{2};\ -2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2-4-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$17^2=4R^2-4Rr$

$17^2+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$17^2=(2R-2r)\cdot 2R \quad DE\cdot DA=17\cdot 8$

$17^2+r^2=(2R-r)^2$

$\frac{17}{5}\cdot\frac{8}{3}=$

$x^2-4x+(9y^2-18y-12)=0.$

$D=16-4(9y^2-18y-12)=-36y^2+72y+\cancel{...}=-36(y^2+2y+1)=$

$=-36y^2-72y+64=-36(y+1)^2+100.$

$2^7 \quad 36^2/4$

$9y^2-18y+(x^2-4x-12)$

$D=18^2-\cancel{36}(x^2-4x-12)=36(9-x^2+4x+12)=36(-x^2+4x+21)$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$2\left(1+\frac{5}{\sqrt{11}}\right)-\left(4+\frac{20}{\sqrt{11}}\right)\le 0.$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0.$

$2+\frac{10}{\sqrt{11}}-4-\frac{20}{\sqrt{11}}\le 0.$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18+9$

$17\cdot 8 \quad 80+56.$

450

$\frac{200}{11}+9\cdot\frac{25}{11}=$

$405+200=\frac{605}{11}$

$\log_{12} t = h \quad t$

$=\frac{200+9\cdot 25}{11}=\frac{25(8+9)}{11}$

$12^h=t.$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t\ge 1$

$t=12^h.$

$\frac{20^2}{11}+\frac{25\cdot 9}{11}$

$25\cdot 11=275. \quad 1394-25$

$x=12^t.$

400+

$\frac{25\cdot 2}{11}$ $\sqrt{50}$ $5\sqrt{2}$

$1394-25=1369$

$\frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2}=10\cdot\frac{5}{2}$

$\left(\ln\frac{5}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right)^t$

1369

$f_1(t) \quad f_1'=\ln 5\cdot 5^t+\ln 12\cdot 12^t\cdot >0.$

$\ln 13\cdot 13^t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$~~x^2-4x+(9y^2-18y-12)=0~~$

$~~D=16-4(9y^2-18y-12)~~$

$(x-2)^2+9(y-1)^2-13=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$x^2-5xy+4y^2=-x-2y+2$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0.$

$D(y)=(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=$

$=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5y-1\pm 3|y-1|}{2} \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$x=\dfrac{5y-1\pm 3(y-1)}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{(5y_1-1)+3y_1-3}{2}=4y_1-2 \\ x_2=\dfrac{5y_2-1-3y_2+3}{2}=y_2+1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} (4y_1-4)^2+9(y_1-1)^2=25 \\ (y_2-1)^2+9(y_2-1)^2=25 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 25(y_1-1)^2=25 \\ 10(y_2-1)^2=25 \end{array}\right. \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$y_1-1=\pm 1$

$y_2-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=0 \\ y_1=2 \end{array}\right.$$

$y_2=1\pm\sqrt{5/2}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \quad -2-0<0 \\ x_1=6 \quad 6-4>0. \end{array}\right.$$

$x_2=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$~~2+\frac{20}{\sqrt{11}}-2\left(1+\frac{5}{\sqrt{11}}\right)=\frac{10}{\sqrt{11}}\geq 0~~$

$~~2-\frac{20}{\sqrt{11}}-2\left(1-\frac{5}{\sqrt{11}}\right)=-\frac{10}{\sqrt{11}}<0~~$

$2+\sqrt{\frac{5}{2}}-2\left(1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$

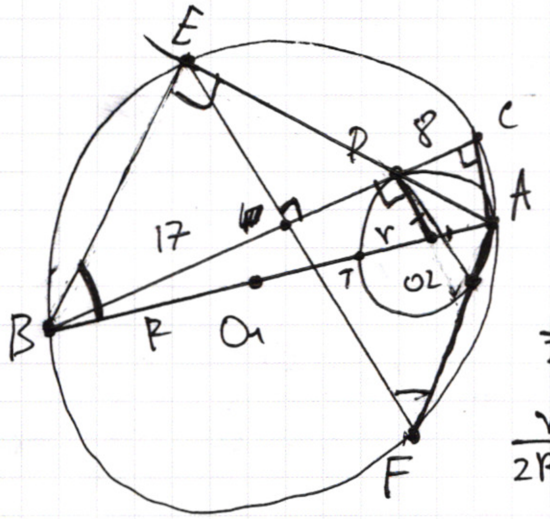
$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$

Ответ: $~~\left(2+\frac{20}{\sqrt{11}};1+\frac{5}{\sqrt{11}}\right),\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right).~~$

$(6;2);\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\angle BCA = 90°$ (AB - диаметр).

$17^2 = BT \cdot AB = 2(R-r) \cdot 2R = 4R(R-r)$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$

$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R}$

$\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$; $r = \frac{16}{25}R$

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$17^2 = 4R^2 - \frac{64}{25}R^2 = \frac{36}{25}R^2$

$17 = \frac{6}{5}R$

$R = \frac{85}{6}$

$r = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$

$AC = \frac{25r}{17} \circledS$

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 2^2(R+r)^2 - 25^2 = 4 \cdot \left(\frac{85}{6} + \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6}\right)^2 - 25^2 =$

$\circledS\ \frac{25}{17} \cdot \frac{136}{15} = \frac{5 \cdot 8}{3} = 40/3$

$\angle AEB = 90°$

$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \frac{\sqrt{2176}}{3}$

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$; $ED = \frac{17 \cdot 8 \cdot 3}{\sqrt{2176}} = \frac{17 \cdot 8 \cdot 3}{\sqrt{17 \cdot 128}} = \frac{\sqrt{17} \cdot 2^3 \cdot 3}{\sqrt{2^7}} = 3\sqrt{\frac{17}{2}}$

#3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$|x^2+18x| = x^2+18x$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x)\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

~~$x^2+18x=t,\ t>0$~~

$\log_{12}(x^2+18x)=t.$

$5^t+12^t\geq 12^{t\cdot\log_{12}13}$

$5^t+12^t\geq 13^t \quad |\cdot 13^{-t} \quad (13^{-t}>0\ \forall t).$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t\geq 1$

$f(t)=\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t$

$\frac{df}{dt}=\ln\frac{5}{13}\left(\frac{5}{13}\right)^t+\ln\frac{12}{13}\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^t<0 \quad \forall t.$

~~$f(t)$ пересекает~~ $y=f(t)$ пересекает $y=1$ в 1 точке.

при $t=2$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25+144}{169}=1.$

при $t\leq 2$ $\quad 5^t+12^t\geq 13^t$

$\log_{12}x^2+18x\leq 2$

$\log_{12}x^2+18x\leq\log_{12}144$

$x^2+18x-144\leq 0.$

$D=18^2+144\cdot 4=(2\cdot 9)^2+(4\cdot 3)^2\cdot 4=$

$=2^2\cdot 3^4+2^4\cdot 3^2\cdot 2^2=2^2\cdot 3^2(3^2+2^4)=$

$=36\cdot 25$

$x_1=\frac{-18+30}{2}=6$

$x_2=\frac{-18-30}{2}=-24$

$x\in(-24;6)$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$\boxed{\text{Ответ: } x\in(-24;-18)\cup(0;6)}.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AE = AO + OE = \frac{\sqrt{17\cdot 2^7}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{17} = \frac{8\sqrt{34}}{3} + 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \sqrt{17}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sin\angle AEB = \sin\angle AFE = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{17}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{85}{6} + \frac{136}{15}} = \frac{90\sqrt{17}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{15\cdot 85 + 136\cdot 6} =$$

$$= \frac{90\sqrt{17}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{17(15\cdot 5 + 8\cdot 6)} = \frac{30\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{17}(15+16)} = \frac{80\sqrt{2} + \frac{90}{\sqrt{2}}}{31\sqrt{17}} = \frac{270}{31\sqrt{34}}$$

Ответ: радиус $\Omega = \frac{85}{6}$, рад. $\omega - \frac{136}{15}$; $\sin\angle AFE = \frac{270}{31\sqrt{34}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(x/y) = f(x) + f(1/y) < 0$

$f(1\cdot x) = f(1) + f(1\cdot x) = \left[\frac{p}{4}\right].$

$f(1) = 0$ расшк

$f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0 + 0$

$f(5\cdot 6) = f(5) + f(6) = \left[\frac{5}{4}\right]$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = f\left(5\cdot\frac{1}{6}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{6}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(1) = f\left(5\cdot\frac{1}{5}\right) = f($

$24 = 8\cdot 3 = 2^3\cdot 3^1$

$f(24) = 0.$

$f(23) = 5$

$f(22) = 5$

$f(21) = 5$

$f(20) = f(2^2) = 2f(2) + f(5) = 1$

$f(19) = 4$

$f(18) = 2$

$f(17)$

12 ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

~~21~~ ~~22~~ 23 24

2 5

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) $f(1)=0$, т.к. $\forall x \in D(f)$ $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x)$

2) $\forall x \in D(f)$: $\frac{1}{x}\in D(f)$.

$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$.

$f(\frac{1}{x})=-f(x)$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$.

Найдём чему может быть равно $f(p)$ при $p\in[0;24]$ p-простые.

для $p\in\{2,3\}$ $f(p)=0$ если $p>4t$, $p<4(t+1)$, то $f(p)=t$, $t\in Z$

если $x=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, где p-простые, то

$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(p_i)$

$f(24)=0$; $\max f(x)$ при $x\in[1;24]$ – 5 $=f(23)$.

① пусть $f(\frac{y}{x})=1$.

тогда x – включает простые множители 5, 7, но не может включать мн-тели >8.

$y\in\{5;7;10;14;15;20;21\}$ – всего 7 вар.

тогда $f(y)=0$. y состоит только из 2-ек и 3-ек.

$x\in\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,24,18\}$ – всего 11 вар.

всего пар $11\cdot 7=77$.

② пусть $f(\frac{y}{x})=2$.

тогда ~~х может~~ ~~состоять~~ иметь множитель $p\in[8;12]$.

$y\in\{11,22\}$ – 2 вар.

$f(x)=0$ или $f(x)=1$

для x – $11+7=18$ вар-тов.

Всего таких пар: $18 \cdot \overset{2}{\cancel{3}} = \cancel{54}$ 36

пусть $f(y) = 3$ ~~у вычтогаем~~

(3) $y \in \{13\}$ – 1 вар.

$f(x) \in \{0, 1, 2\}$ – $11 + 7 + 2 = 20$ вар-тов.

Всего пар – 20.

~~пусть f(y~~ (4) пусть $f(y) = 4$.

$y \in \{17, 19\}$ – 2 вар-та.

$f(x) \in \{0, 1, 2, 3\}$ – 21 вар.

Всего пар – 42

(5) пусть $f(y) = 5$.

$y = 23$ – 1 вар.

$f(x) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ – 23 вар.

пар – 24.

Всего пар – $77 + 36 + 20 + 42 + 23 = 100 + 36 + 20 + 42 = 100 + 56 + 42 = 198$

Ответ: 198.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)