МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№1.~~

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{\sqrt5}{5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}$; $\sin$~~

№1.

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{\sqrt5}{5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{4}{5}\ (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}\\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}\ (1)\\ \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dots(1)\\ \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dots(1)\\ 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dots(1)\\ \cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=\frac{\sqrt5}{5}\\ \cos 2\beta\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dots(1)\\ \cos 2\beta=\frac{2\cdot5}{\sqrt5\cdot5}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}.\end{cases}$$

Тогда, $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{20}{5}}=\pm\frac{\sqrt5}{5}.$

Решим (2), подставим в (1).

~~$\sin 2\beta$~~ 1) Если $\sin 2\beta=\frac{\sqrt5}{5}$, то

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5} \Leftrightarrow 2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1.$

2) Если $\sin 2\beta=-\frac{\sqrt5}{5}$, то

(1) $a=4b$. Тогда, из ур-ия (3):

$(4b)^2+9b^2=25$

$\Leftrightarrow 16b^2+9b^2=25$

$\Leftrightarrow b^2=\pm 1$

$\Leftrightarrow b=\pm 1$. Тогда, $a=\pm 4$. Проверим (1):

$\left[\begin{array}{l} a=4,\ b=1;\ a>2b. \\ a=-4\ b=-1;\ 2b=-2;\ a<2b \text{ - не подходит} \end{array}\right.$

(2) $a=b$. Тогда, из ур. (3):

$b^2+9b^2=25$

$\Leftrightarrow 10b^2=25$

$\Leftrightarrow b^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Проверим (1):

$\left[\begin{array}{l} a=\sqrt{\frac{5}{2}},\ b=\sqrt{\frac{5}{2}},\ 2b=\frac{2\sqrt{5}}{4},\ a<2b \text{ - не подх.} \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}},\ 2b=\frac{-2\sqrt{5}}{4};\ a>2b. \end{array}\right.$

Итого решения:

1) $a=4;\ b=1$ и 2) $a=\frac{-\sqrt{5}}{4};\ b=\frac{-\sqrt{5}}{4}$.

Тогда,

1) $x=6;\quad y=2$

2) $x=\frac{-\sqrt{5}}{4}+2\quad y=\frac{-\sqrt{5}}{4}+1$.

Ответ: $(6;2)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}}{4}+2;\ \frac{-\sqrt{5}}{4}+1\right)$.

№3.

ОДЗ: $x^2+18x>0$.

$\Leftrightarrow x(x+18)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18. \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда, $2\cos^2 x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x$ опр.

В этом случае $\operatorname{tg} x = \frac{0}{1} = 0$.

Итого 3 зн. $\operatorname{tg} x$: $-\frac{1}{2}; -2; 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; -2; 0$.

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)\cdot 1-2\cdot(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

Замена пер.: $a=x-2$; $b=y-1$.

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b. & (1) \\ a^2-5ab+4b^2=0 & (2) \\ a^2+9b^2=25 & (3) \end{cases}$$

Заметим, что $b\neq 0$, т.к.

$(3)-(2)$: $5b^2-5ab=25$.

Тогда пусть $t=\frac{a}{b}$. Решим (2):

$\Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \quad |:b^2$ (т.к. $b\neq 0$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0 \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \\ \frac{a}{b}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b. \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}$.

Пусть $t = x^2+18x$

$5^{\log_{12}t} + t \geqslant |t|^{\log_{12}13}$. Т.к. по ОДЗ: $t > 0$, то раскр. модуль с «+».

$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}t} - t^{\log_{12}13} \geqslant -t$

$\Leftrightarrow t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}t} \leqslant t$ Т.к. $t > 0$, то $|:t$

N 4 (продолжение).

Откуда, заметим, что $\angle AFE = \angle ABE = 180° - \angle ECA = 90° - \angle ECB = 90° - \angle BAF$.

При этом $O_2D = O_2A$, как r. Откуда, $\angle O_2DA = \angle O_2AE = 90° -$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(1)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=f(3\cdot 2)=0$ $f(9)=0$

$f(2)=0$ $f(4)=f(2)+f(2)=0$ $f(7)=1$ $f(8)=0$ $f(10)=1$

$f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(16)=0$ $f(17)=4$

$f(18)=0$ $f(19)=4$ $f(20)=1$ $f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$ $f(24)=0$.

Тогда,

знач. 0: 11 чисел

знач. 1: 7 чисел

знач. 2: 2 числа

знач. 3: 1 число

знач. 4: 1 число

знач. 5: 1 число

Тогда, заметим, что $f(x)=f(\frac{x}{y}\cdot y)=f(\frac{x}{y})+f(y)$. Значит, $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

Тогда, если $f(x)\neq f(y)$, то при $x>y$ б.о.о.:

$f(\frac{x}{y})>0$, а $f(\frac{y}{x})<0$ (если $f(x)=f(y)$, то $f(\frac{x}{y})=0$.

Тогда, кол-во нужных пар $(x;y)$ - кол-во пар x и y, у которых $f(x)\neq f(y)$.

Всего пар (различных) среди 24: $\frac{24\cdot 23}{2}=12\cdot 23=276$. На $[1;24]$:

Пар с совпад. $f(x)$: 1) Если $f(x)=0$, то вариантов $C_{11}^2=\frac{11\cdot 10}{2}=55$.

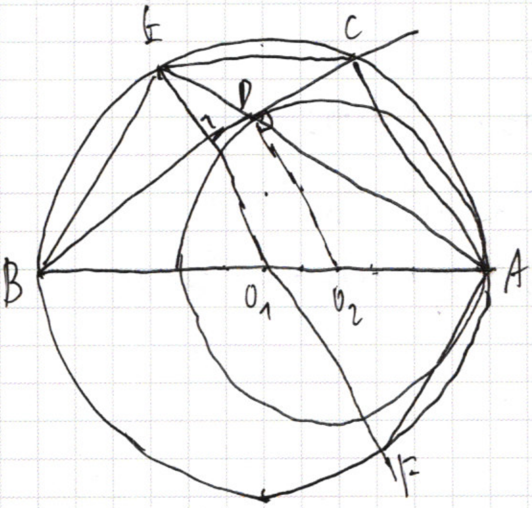
2) Если $f(x)=1$, то $C_7^2=7\cdot 3=21$ 3) Если $f(x)=2$ — 1 пара.

4) При $f(x)>2$ подходящих пар нет

Тогда, всего подх. подр.: $276-55-21-1=199$.

Ответ: 199.

~~зад~~. ~~№~~ №4.



O_1 и O_2 – центры окружн.

O_2 лежит на AB, т.к. O_1O_2 проходит через A.

① $\angle O_2DC=\angle O_2DB=90°$, т.к. BC – касат., а O_2D – радиус. ~~Тогда~~

② $\angle BCA=90°$, т.к. AB – диаметр.

③ $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$ – подобны, т.к. $\angle B$ общий, и $\angle BDO_2=\angle BCA$.

Тогда, $BA=2R=\frac{25}{17}BO_2=2R-r$.

Тогда $AO_2=\frac{8}{25}BA$, и ~~O_2~~ ~~AO_2~~ $r=\frac{16}{25}R$. $R=\frac{25}{16}r$.

Тогда, по ~~теор~~ т. Пифагора в $\triangle BDO_2$:

$BD^2+DO_2^2=BO_2^2$

$\Leftrightarrow 289+r^2=\left(\frac{17\cdot 2}{25}R\right)^2$

$\Leftrightarrow 289+r^2=\left(\frac{17}{8}r\right)^2$

$\Leftrightarrow 289+r^2=\frac{289}{64}r^2$

$\Leftrightarrow 289=\frac{225}{64}r^2 \Leftrightarrow \frac{15}{8}r=17 \Leftrightarrow r=\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{136}{15}$.

Тогда, $R=\frac{17\cdot 8}{15}\cdot\frac{25}{16}=\frac{17\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{85}{6}$. (продолж. на стр. 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} =$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5$

$\sin\alpha = \frac{2\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$

$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$

$t \geq |t|^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} t}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$

$1 + \log_t t^{\dots} - 1$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2)(y-1)$

$t^{\log\dots - 1}$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$

$2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 5$

$t^{\log_{12} 13} - 5^{\log}$

$2\sin 2\alpha = -(1-\cos 2\alpha)$

$(x-2)(y-1) = x^2 - 4xy + 4y^2$

$\log t (t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

$\alpha = -tg\alpha$

$x \geq 2y$

$\log_{12} 13$

$1 + \log_t t^{\dots} - 1 \geq \log_{12} t + \log_t 5 = \log_{12} 5$

$(x-2)(y-1) \geq 0$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ \end{cases}$

$\log_t$ $\log_t$

$\log_5 12$

$\frac{\log_t t^{\dots}}{\log_t t^{\dots} - 1} =$

$(x-2)(y-1)$

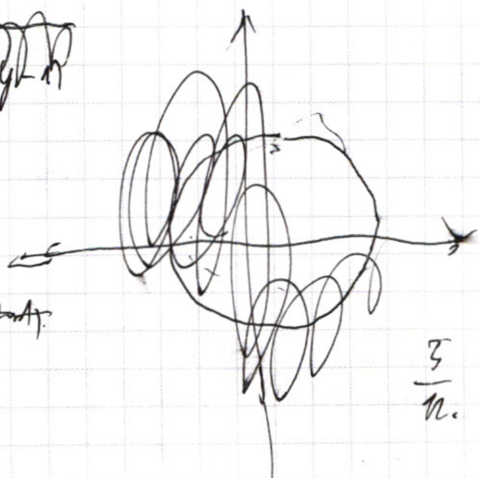
$\log_{12} 12$

$\log_{12} 5$

$\frac{\log_{12} 5}{\log_{12} t} = \log_t 5$

$\frac{1}{\log_t t^{\dots} - 1}$ $\log_{12} 5$

$\log$



$\frac{3}{n}$

$t^{\log_{12}13} - t = t(t^{\log_{12}13-1}$ $-11 \cdot \frac{30}{-16} = \boxed{-\frac{15}{8}}$

480 512 544

$\log_{12} 1$ 0

2 0

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$30^2 - 4 \cdot 8 \cdot 17 =$ 3 0 $-(8x^2+30x+17)$

$(\log_{12} 13 - 1)(\log_{12} t) =$

$t^{\log_{12} 13}$ $5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13}$ $t = 900 -$ 4 0

$-32 \cdot 17$ 5 1 log ≥ 0

$\frac{900}{-544}$ 356 $t^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} t} \leq t.$ 6 0 $\frac{-30 \pm 2\sqrt{89}}{16} =$ $\frac{5^{-2}}{64^3} =$

$\log_{12}(t^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} t}) \leq \log_{12} t.$ 7 $= \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$ $\frac{5^{\log_8 64}}{64 \log_8 5} = \frac{5^2}{64}$

$\frac{t^{\log_{12} 13}}{t}$ $t^{(\log_{12} 13 - 1)} - 1$

$\frac{\log_{12} t^{\log_{12} 13}}{\log_{12} 5^{\log_{12} t}} \leq \log_{12} t$ $\frac{356}{4} = 89.$ $\frac{12x+17}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17.$

$(\log_{12} 13 - 1)(\log_{12} t) \geq$

$\frac{t^{\log_{12} 13}}{t}$ t $2\sqrt{89}.$

$3 - \frac{1}{4x+3} \leq ax+b \leq$ $\log_{12} t \log_{12} 5 - \log_{12} t.$

5

$(t$ $t^{\log_{12} 13 - 1}$ $\frac{\log_{12} 13 \cancel{\log_{12} t}}{\cancel{\log_{12} t} \log_{12} 5}$ $t^{\log_{12} 13}$ $t^{\log}$ $\frac{5^{\log_{12} t}}{t.}$

$x - 2y.$

$\log_{12} t (\log_{12} 5 - 1)$

$f(ab) = f(a) + f(b).$ $(\log_{12} 13 - 1)(\log_{12} t) \geq \log_{12} 5^{\log_{12} t} - \log_{12} t$

$(1 - \ln 4)$ $t^{\ln 13}$

5

$f(p) = [p/4].$ $f(\frac{13}{4} \cdot 4) =$ $\frac{5^{\log_{12} t}}{t^{\log_{12} 13}} = a$

$1 - \cancel{\log}$ $f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$f(1) = 0$ $f(2) = 0$ $f(13) = 3$

$15 - 2\sqrt{89}$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y).$

$f(3) = 0$ $f(11) = 2$

$\frac{3}{4}$

$f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(17) = 4$ $\sqrt{89}$ $\frac{5^{\ln t}}{t^{\ln 13}}$

3

$-\frac{11}{4}$ $-11+3.$ $f(19) = 4$ $\times \begin{array}{r} 94 \\ 94 \\ \hline 336 \\ +846 \\ \hline 8796 \end{array}$ $\frac{5, 5, \ldots, 5, 6}{8.}$ $\frac{5^{\ln t}}{t^{\ln 13}}$

$f(23) = 5.$

$8 -$ $t^{(\log_{12} 13 - 1)} \geq \frac{5^{\log_{12} t}}{t.}$ $t1$ $\cancel{15 - 2\sqrt{89}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = \frac{-\sqrt5}{5}$

$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1.$

Заметим, что

1) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Т.к. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то $\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$, если $\cos\alpha \neq 0$.

Т.к. $tg\alpha$ опр., то $\cos\alpha \neq 0$, и $\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$. Тогда,

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$ А т.к. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$ Тогда, в случае ①

$2\sin 2\alpha = -(\cos 2\alpha + 1)$ Т.к. $tg\alpha$ опр., то $(\cos 2\alpha + 1) \neq 0$. Тогда,

$2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = -1$

$\Leftrightarrow 2tg\alpha = -1$

$\Leftrightarrow tg\alpha = -\frac{1}{2}.$

2) Т.к. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, если $\sin\alpha \neq 0$.

Тогда, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$ (случае $\sin\alpha \neq 0$). А т.к. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, то $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$.

$tg\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$

Тогда, в случае ②:

1) $\sin\alpha \neq 0$. Тогда, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$\Leftrightarrow -2\sin 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$. Т.к. $\sin\alpha \neq 0$, то $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$.

Тогда,

$-2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = -2.$

2) Если $\sin\alpha = 0$, то $\sin 2\alpha = 0$, и $0 = \cos 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

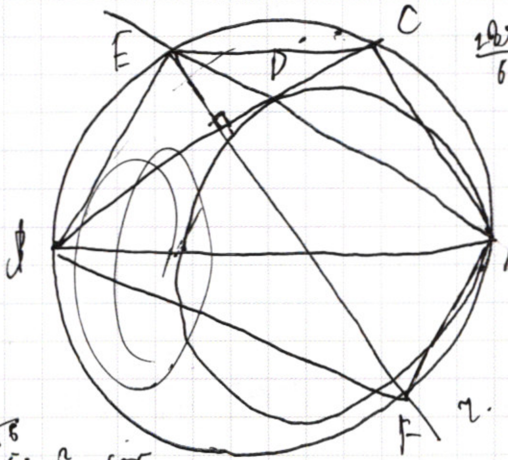
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(\frac{17}{8}r)^2 = r^2 + 17^2.$

$81 = 4R^2 - 4Rr.$ $\frac{225}{64}r^2 = 289.$ $\frac{25}{16}r.$ $\frac{15}{8}r = 17$

$\frac{289}{64}r^2 = r^2 + 289.$

$CD = 8$ $BD = 17.$ $r = \frac{17 \cdot 8}{15} =$



$\frac{136}{15}.$

$r^2 + 81 = (2R - r)^2$

$r^2 + 81 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$r \cdot \frac{25}{17}$ $81 = 4R^2 - 4Rr.$

$64 \cdot 9 = 576.$

$r + (2R - 2r)$

$81 = 4R(R - r).$ $2R - r = \frac{7}{16}r.$ $= 2R - r.$

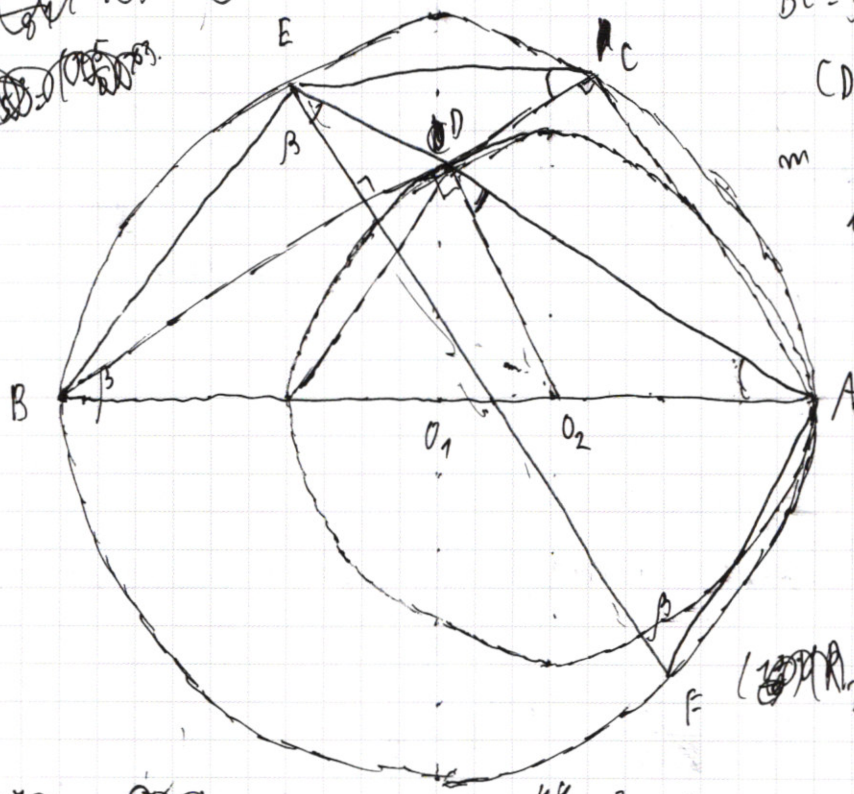
$\angle BAD - ?$

$BC = 9$ $R = \frac{255}{16}$ $R = \frac{25}{16}r.$

$CD = 8.$

$AD = \frac{17}{8}r.$

2025.



$2R = \frac{25}{8}r.$

$\frac{49}{256}r^2 = r^2 + 17^2.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

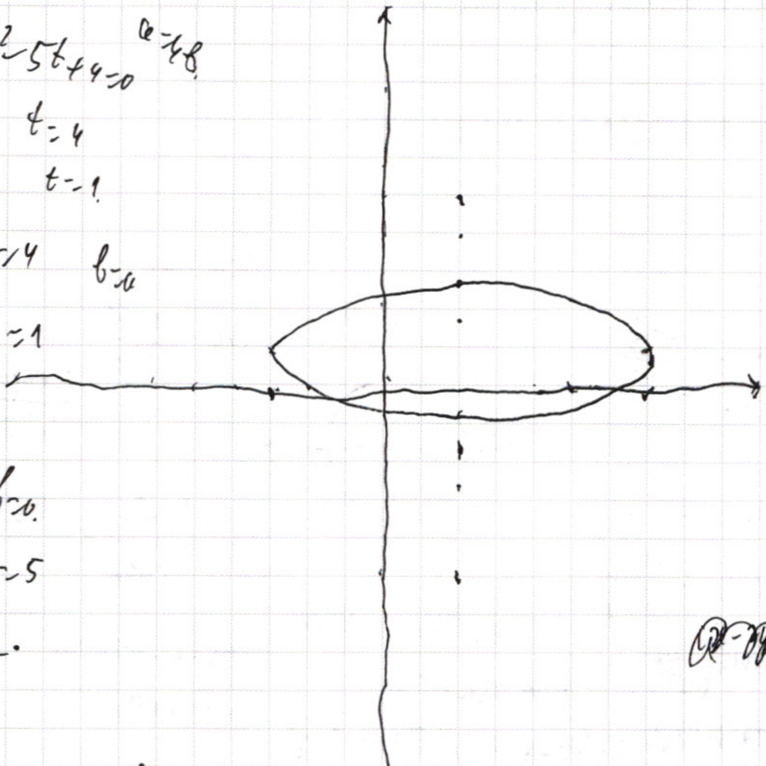
$t^2-5t+4=0$ $a=tb$

$t=4$

$t=1$

$\frac{a}{b}=4$ $b=a$

$\frac{a}{b}=1$



$1, b=0$

$a=5$

$25-$

$\frac{(1-3b^2)}{b}\geq 0$

$(x-2)^2+(3y)^2=5$

$(x-2)^2+(3(y-1))^2=5$

$a^2+9b^2=5$. $\frac{1-b^2-2b^2}{b}=$

$\frac{1-b^2}{b}\geq 2b$ $=\frac{-3b^2+1}{b}\geq 0$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x+2y+2$

$x-2-2(y-1)=$

$=x-2-2y+2=x-2y=a-2b$

$x^2-x+4y^2-2y-4xy-xy-2=$

$=x^2-x+4y^2-2y-5xy-2$

$1-b^2\geq 0$

$0, 1, -1$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$(a-2b)^2=ab$

$ab\geq 0$

$a\geq 2b$

$5^{\log_{12}t}+t\geq |t|^{\log_{12}13}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$ $b(a+b)=1$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$b^2+ab=1$

2

$\left(\frac{1-b^2}{b}\right)^2+9b^2=5$

$ab=1-b^2$

$a=\frac{1-b^2}{b}$

$a^2+9b^2=5$

$5b^2+5ab=5$

$\frac{1-2b^2+4b^4}{b^2}+9b^2=5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

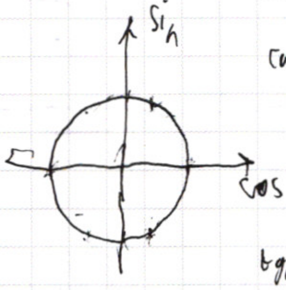
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5} = \frac{-\sqrt5}{5}$

Если $\sin\alpha \neq 0$, то

$\Leftrightarrow$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5} = \frac{-\sqrt5}{5}$



$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$

$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ $2\sin 2\alpha - \boxed{\cos 2\alpha} = -1$

$2\cos 2\beta = \frac{-4}{5} : \frac{-1}{\sqrt5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$ $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$

$\sin\alpha$

$2\cos 2\beta = \frac{4\cdot\sqrt5}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$ $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\cos^2 2\beta = \frac{20}{25}$ $\sin^2 2\beta = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$2\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

$\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1$

$2\sin 2\alpha = -(\cos 2\alpha + 1)$

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = \frac{-\sqrt5}{5}$ $\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$???

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)