МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Преобр. второе ур. $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

Подставим $-\frac{1}{\sqrt5}$ вместо $\sin(2\alpha+2\beta)$:

$+\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = +\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

1 сл: $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow 2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$ ~~$\Rightarrow \cos 4\beta = \frac{3}{5}$; $\sin 4\beta = -\frac{4}{5}$~~

~~$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$~~ $\Rightarrow$

~~$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \quad | : \sqrt{4+1}$~~

$\sin\left(2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi n \\ 2\alpha = \pi + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = \end{array}\right.$

$= -2$

2сл: $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n \Rightarrow$

$\sin\left(2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n \\ 2\alpha = \pi + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$ – в этих точках $tg\,\alpha$ не опред.

$\Rightarrow tg\,\alpha = tg\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -tg\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; -2.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

Возведём второе ур. в квадрат с учётом ОДЗ $x \geq 2y$

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

Пусть $x-2=a$; $y-1=b \Rightarrow x-2y=a-2b \Rightarrow$

$(a-2b)^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

1сл: $b\neq 0 \Rightarrow$ поделим на $b^2 \Rightarrow$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$\frac{a}{b}=t \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x-2}{y-1}=1 \\ \frac{x-2}{y-1}=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x=4y-2 \end{array}\right.$

а) $x=y+1$ - подставим во 2-е ур.:

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$y=\dfrac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}$ ~~нет корней, D<0~~ $\dfrac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{4+\sqrt{10}}{2} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$

не подх. к ОДЗ

подх к ОДЗ

б) $x=4y-2$, подставим во второе ур.:

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12$

$25y^2-50y=0$

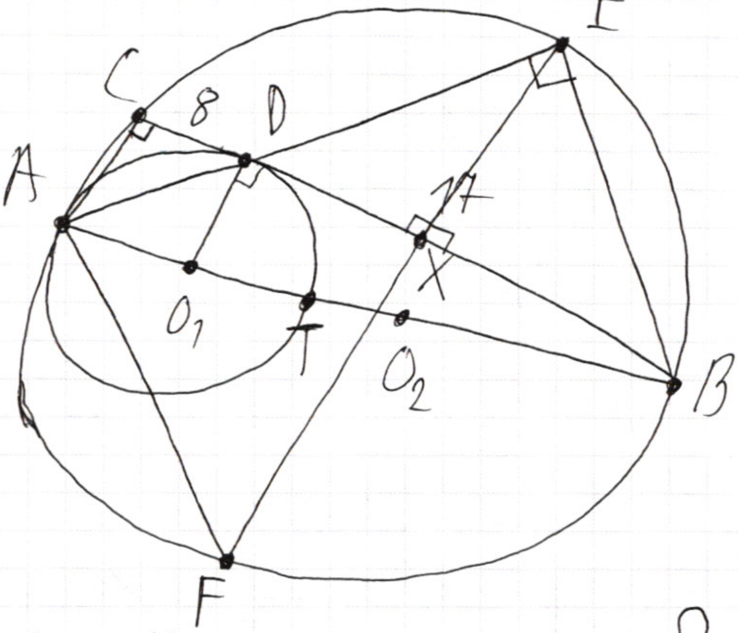
$y(y-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=-2 \text{ - не подх к ОДЗ} \\ y=2 \Rightarrow x=6 \text{ - подх. к ОДЗ}\end{array}\right.$

2сл: $b=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow a-2b=x-2y=0 \Rightarrow x=2$, подходит к ОДЗ a, но не подх. к второму ур.

Ответ: $(6;2)$; $\left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть r_1 и r_2 – радиусы ω и Ω соотв.; T – т. перес. AB и ω ~~отл~~; O_1 и O_2 – центры ω и Ω

2) Св-во касат. и секущей: $BD^2 = BT \cdot BA \Rightarrow$

$289 = (2r_2 - 2r_1) \cdot 2r_2$ (1)

3) $AC \perp BC$, т.к. угол ACB стягивает диаметр Ω

4) Проведём O_1D; $O_1D \perp BC$, т.к. касание $\Rightarrow$

5) $O_1D \parallel AC \Rightarrow$

6) т. Фалеса: $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2r_2 - r_1}{2r_2} \Rightarrow$

$34r_2 = 50r_2 - 25r_1 \Rightarrow 25r_1 = 16r_2 \Rightarrow r_1 = \frac{16}{25}r_2$ –

– подставим это в (1):

$289 = (2r_2 - \frac{32}{25}r_2) \cdot 2r_2$

$289 = \frac{36}{25}r_2^2 \Rightarrow \pm 17 = \frac{6}{5}r_2 \Rightarrow r_2 = \pm\frac{85}{6} \Rightarrow r_2 = \frac{85}{6} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

7) По т. Фалеса: $\frac{O_1D}{AC} = \frac{17}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{17} O_1D = \frac{25}{17} \cdot \frac{136}{15} = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

$\Rightarrow$ 8) ~~Из трапеции $ACDO_1$ найдём~~ Т. Пифагора для $\triangle ACD$: $AD = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

9) Т. cos для $\triangle O_1AD$:

$\cancel{O_1D^2} = \cancel{O_1}A^2 + AD^2 - 2 \cdot O_1A \cdot AD \cdot \cos\angle DAO_1$

$0 = AD - 2 \cdot O_1A \cdot \cos\angle DAO_1$

$2 \cdot O_1A \cdot \cos\angle DAO_1 = AD$

$\cos\angle DAO_1 = \frac{AD}{2O_1A} = \frac{\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{3}}\sqrt{34}}{\cancel{2} \cdot \frac{136}{\cancel{15}_5}} = \frac{20\sqrt{34}}{136} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

10) $AE \perp EB$, т.к. $\angle AEB$ опир. диаметр. $\Rightarrow$

11) $\angle EBA = 90^\circ - \angle EAB = 90^\circ - \arccos\frac{5\sqrt{34}}{34} = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$

($\angle EAB = \arccos\frac{5\sqrt{34}}{34}$, т.к. он угол прямоуг. треуг.)

12) $\angle AFE = \angle EBA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$, т.к. они опир. на одну дугу

13) $EB = AB\cos\angle EBA = \frac{85}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}\sqrt{34}}{34} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$

14) Метрическое соотн. в прямоуг. $\triangle DEB$:

$EB^2 = BX \cdot BD \Rightarrow BX = \frac{EB^2}{BD} = \frac{25 \cdot 34}{4 \cdot 17} = \frac{25}{2} \Rightarrow$

15) $\sin\angle XEB = \frac{XB}{BE} = \frac{25 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle XEB = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\angle AEF = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}} = \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

16) $AF = 2r_2 \sin\angle AEF = \cancel{2} \cdot \frac{85}{\cancel{6}3} \cdot \cancel{\ldots} = \cancel{\frac{5\sqrt{1131}}{6}}$ т. sin $= 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

17) $\angle FAE = \pi - \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} - \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\angle FAE =$

$= \cancel{\frac{\sqrt{1131}}{34} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34} + \frac{5\sqrt{34}}{34} \cdot \frac{5}{34} = \frac{\sqrt{34}(25 + 3\sqrt{1131})}{34^2}} = 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолж.

1б) $EF = 2 V_2 \sin\angle FAE = 2\cdot\frac{85}{6} = \frac{85}{3}$

1г) $S_{\Delta AEF} = 2\sin AFE \cdot AF \cdot FE = 2\cdot\frac{5\sqrt{34}}{34}\cdot\frac{85}{\sqrt{34}}\cdot\frac{85}{3} = \frac{2\cdot 5\cdot 85^2}{34\cdot 3}$

Ответ: $V_1 = \frac{136}{15}$; $V_2 = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$; $S_{\Delta AFE} = \frac{2\cdot 5\cdot 85^2}{34\cdot 3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x>0$ в силу ОДЗ логарифма => модуль можно убрать

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

воспользуемся тождеством $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Пусть $\log_{12}(x^2+18x)=t \Rightarrow x^2+18x=12^t \Rightarrow$

Нерво имеет вид

$5^t+12^t \geq 13^t \quad |:13^t>0$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^{t} \geq 1$

$f(t)=\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t$ – убывающая, т.к. это сумма убыв. функций

Заметим, что при $t=2$ ~~...~~ равенство $\Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow$ при $t>2$ $f(t)<1$, при $t<2$ $f(t)>1$ в силу убывания $\Rightarrow t\leq 2 \Rightarrow$

$\log_{12}(x^2+18x)\leq 2$

$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[-24;6] \\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$4x+3 < 0$ при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ => домножим первое нерво на $4x+3$

$12x+11 \ge (ax+b)(4x+3)$

$12x+11 \ge 4ax^2+3ax+4bx+3b$

$0 \ge 4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11$

Второе нерв-о: $8x^2+(30+a)x+17+b \le 0$

во втором нерве кв. трехчлен с старшим коэф. больше 0 => нер-во верно при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ <=> $-\frac{11}{4}$ и $-\frac{3}{4}$ между корнями либо являются ими =>

$$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot \frac{121}{16} + (30+a) \cdot (-\frac{11}{4}) + 17 + b \le 0 \\ 8 \cdot \frac{9}{16} + (30+a) \cdot (-\frac{3}{4}) + 17 + b \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b - 11a \le 20 \\ 4b - 3a \le 4 \end{cases}$$

Поработаем с 1-м нервом:

1сл: $a > 0$ => кв. трехчлен с полож. старш. коэфф.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{121a}{4} - (3a+4b-12) \cdot \frac{11}{4} + 3b - 11 \le 0 \\ \frac{9a}{4} - (3a+4b-12) \cdot \frac{3}{4} + 3b - 11 \le 0 \end{cases}$$

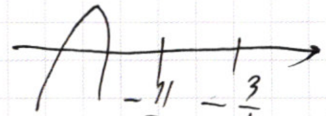
$$\Rightarrow \begin{cases} 11a - 4b \le 11 \\ -8 \le 0 \text{ — верно} \end{cases} \Rightarrow +11a - 4b \le 11, \ a > 0$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №9

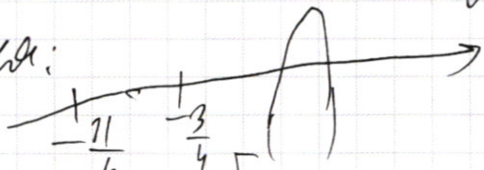
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2сл: $a<0 \Rightarrow$ старший коэф $<0 \Rightarrow$

устраивает либо такая ситуация: 

,

либо такая: 

для первого сл. необх. и достаточно:

$$\begin{cases} x_{\text{верш}} < -\frac{11}{4} \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12-4b-3a}{8a} < -\frac{11}{4} \\ 11a-4b \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 > 4b-19a \\ 11a-4b \leq 11 \\ a<0 \end{cases}$$

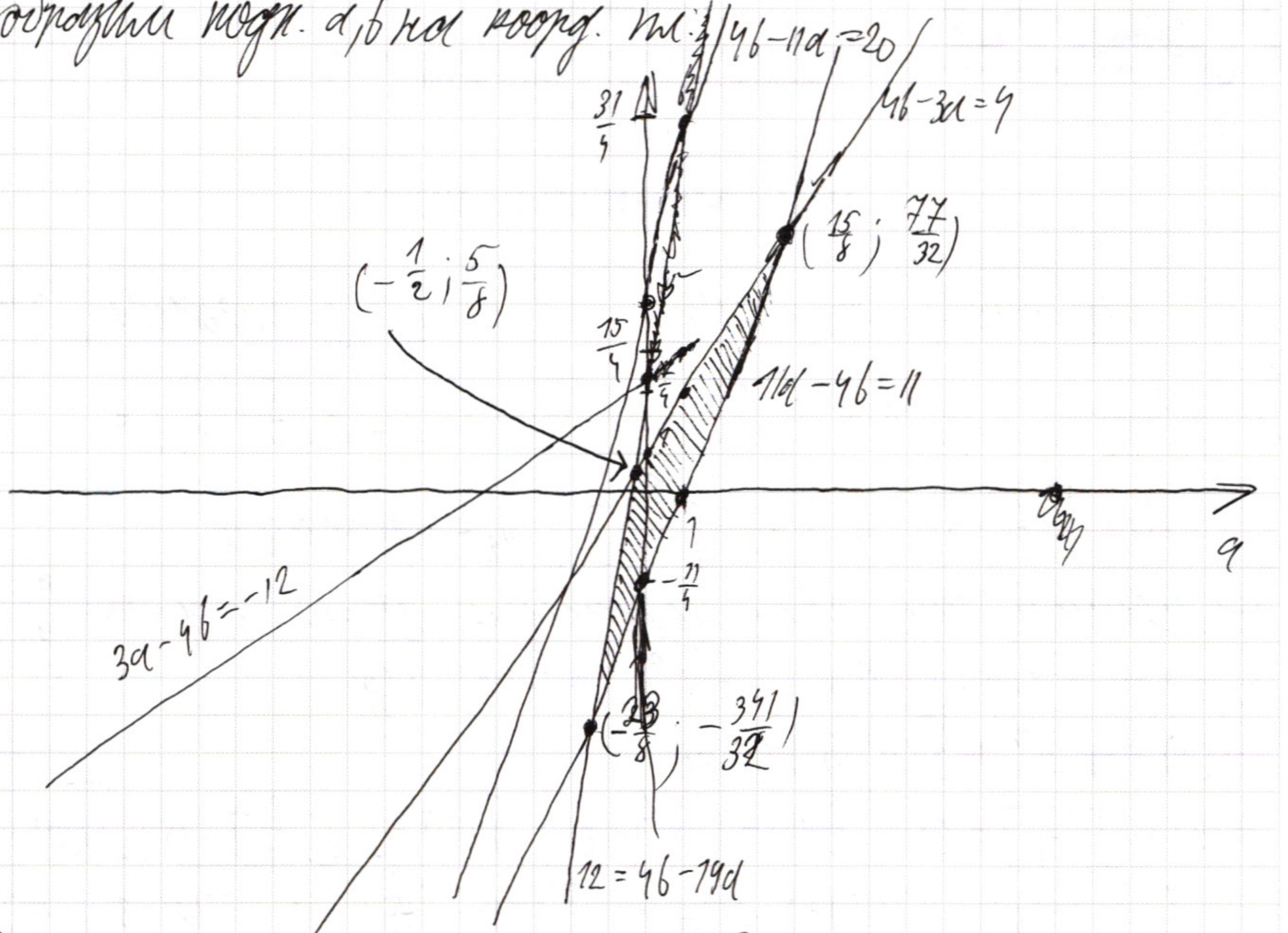
для второго сл.:

$$\begin{cases} x_{\text{верш}} > -\frac{3}{4} \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-4b < -12 \\ -8 \leq 0 \text{ – верно} \end{cases} \Rightarrow 3a-4b<-12$$

3сл: $a=0 \Rightarrow (4b-12)x+17+b \leq 0$

$(4b-12)x+17+b$ – монотонна $\Rightarrow$ необх. и дост., чтобы $\begin{cases} f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq 0 \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow b \geq -13$

Изобразим подн. a,b на коорд. пл.:



Решением явл. закраш. область

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Из $f(ab)=f(a)+f(b)$ и $f(p)=[\frac{p}{4}]$ следует, что
$f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n})=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\dots+\alpha_n f(p_n)=$
$=\alpha_1\cdot[\frac{p_1}{4}]+\dots+\alpha_n\cdot[\frac{p_n}{4}]$, p_i – простые
Заметим, что если положить $ab=x$; $a=y \Rightarrow b=\frac{x}{y} \Rightarrow$
$f(x)=f(y)+f(\frac{x}{y}) \Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$
$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$;
$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$; $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$; $f(4)=2\cdot[\frac{2}{4}]=0$; $f(5)=[\frac{5}{4}]$
$=1$; $f(6)=[\frac{2}{4}]+[\frac{3}{4}]=0$; $f(7)=[\frac{7}{4}]=1$; $f(8)=3\cdot[\frac{2}{4}]=0$;
$f(9)=2\cdot[\frac{3}{4}]=0$; $f(10)=[\frac{2}{4}]+[\frac{5}{4}]=1$; $f(11)=[\frac{11}{4}]=2$;
$f(12)=2\cdot[\frac{2}{4}]+[\frac{3}{4}]=0$; $f(13)=[\frac{13}{4}]=3$; $f(14)=[\frac{2}{4}]+[\frac{7}{4}]=$
$=1$; $f(15)=[\frac{3}{4}]+[\frac{5}{4}]=1$; $f(16)=4\cdot[\frac{2}{4}]=0$; $f(17)=[\frac{17}{4}]=$
$=4$; $f(18)=2\cdot[\frac{3}{4}]+[\frac{2}{4}]=0$; $f(19)=[\frac{19}{4}]=4$; $f(20)=2\cdot[\frac{2}{4}]+$
$+[\frac{5}{4}]=1$; $f(21)=[\frac{3}{4}]+[\frac{7}{4}]=1$; $f(22)=[\frac{2}{4}]+[\frac{11}{4}]=2$;
$f(23)=[\frac{23}{4}]=5$; $f(24)=3\cdot[\frac{2}{4}]+[\frac{3}{4}]=0 \Rightarrow$
Надо найти все пары x и y такие что $f(y)>f(x)$.
при $1\le x\in N\le 24$ $f(x)$ принимает знач $0;1;2;$
$3;4;5$ $\Rightarrow$
если $f(y)=5$ – 1 вар $\Rightarrow$ подходят все x кроме 23 $\Rightarrow$ 23 вар
если $f(y)=4$ – 2 вар $\Rightarrow$ подходят все x кроме $23;17;19 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot 21=42$ вар
если $f(y)=3$ – 1 вар $\Rightarrow$ подх все x кроме $23;17;19;13 \Rightarrow 20$ вар

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолж.

если $F(y)=2$ – 2 вар $\Rightarrow$ подходят все x такие, что $F(x)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot 18 = 36$ вар

если $F(y)=1$ – 7 вар $\Rightarrow$ подходят все x такие, что $F(x)=0 \Rightarrow$
$7\cdot 11$ вар
$= 77$

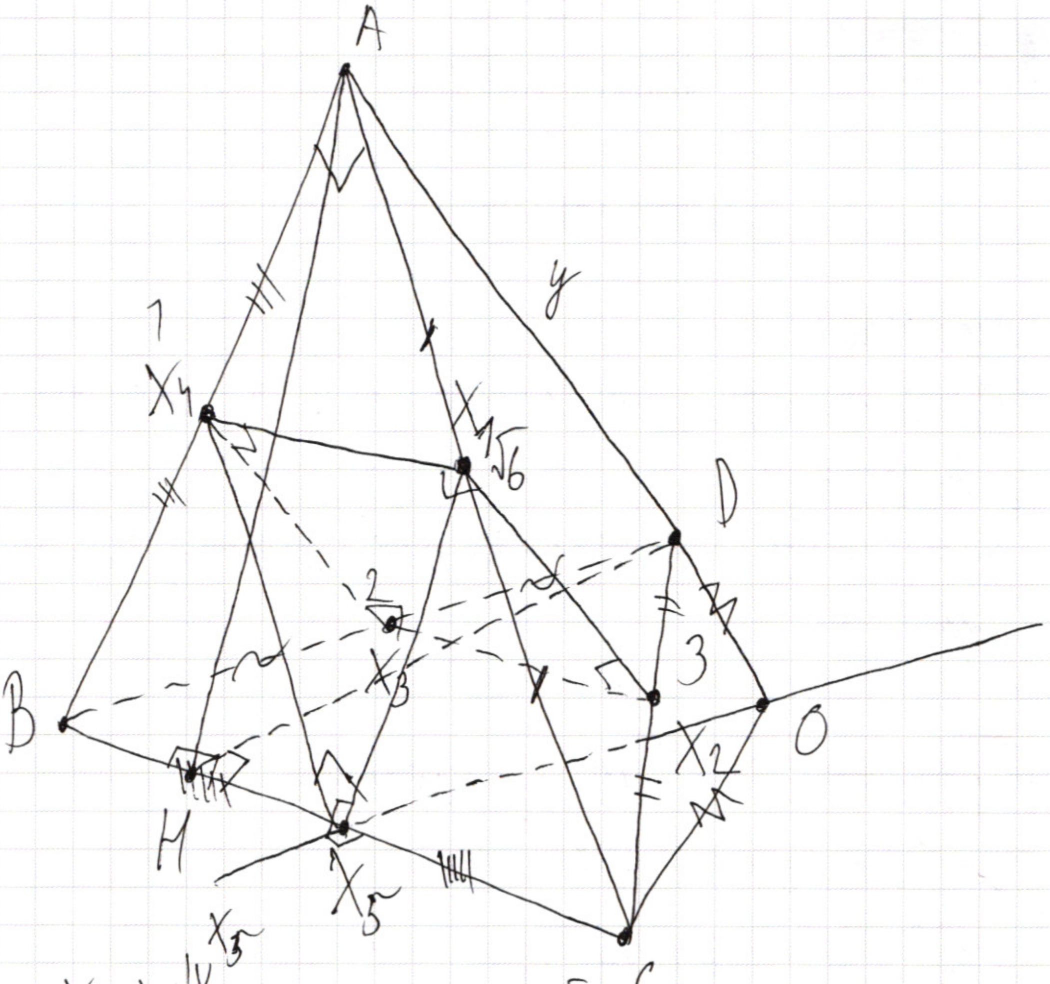
если $F(y)=0 \Rightarrow F(x) \geq F(y)$ – не подходит $\Rightarrow$

всех $23+42+20+36+77=198$

$$\begin{array}{r} 23 \\ +42 \\ \hline 65 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ +36 \\ \hline 121 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ +77 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ +42 \\ \hline 65 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ +36 \\ \hline 121 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ +77 \\ \hline 198 \end{array}$$

Ответ: 198.

№7



1) X_1, X_2, X_3, X_4 – середины рёбер

2) $X_1X_2 \parallel AD$ и $X_3X_4 \parallel AD$ и $X_1X_2 = X_3X_4 = \frac{AD}{2}$ по св-ву сред. линии $\Rightarrow X_3X_4X_1X_2$ – парал-м, $\Rightarrow X_3X_4X_1X_2$ – одна плоскость

3) Сфера пересек плоскость по окр $\Rightarrow X_1X_2X_3X_4$ – вписс. $\Rightarrow \angle X_4X_1X_2 + \angle X_4X_3X_2 = 180°$ и $\angle X_4X_1X_2 = \angle X_4X_3X_2$ по св-ву парал-мма $\Rightarrow \angle X_4X_1X_2 = \angle X_4X_3X_2 = 90°$

Аналогич. $\angle X_4X_1X_2 = \angle X_4X_3X_2 = 90°$

4) $X_1X_2 \parallel AD$; $X_3X_2 \parallel BC \Rightarrow AD \perp BC$

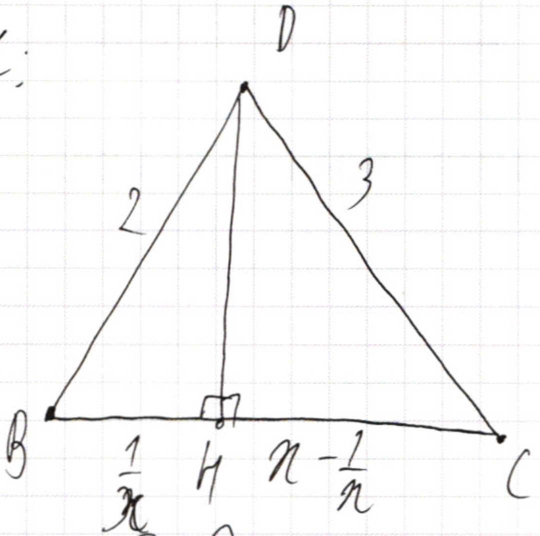
5) Проведём высоту AH в $\triangle ABC$

6) $BC \perp AH$ и $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp AHD \Rightarrow BC \perp DH$

7) Пусть $BC = x \Rightarrow BH = \frac{1}{x}$ – метрич. соотн в прямоуг. треуг.

√7 продолж.

8) Рассм. $\triangle BDC$:



~~Найдем~~ Запишем т. Пифагора для $\triangle BDH$ и $\triangle DHC$:

$DH^2 = 4 - \frac{1}{x^2} = 9 - (x - \frac{1}{x})^2 \Rightarrow$

$4 - \cancel{\frac{1}{x^2}} = 9 - x^2 - \cancel{\frac{1}{x^2}} + 2$

$x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7} = BC$

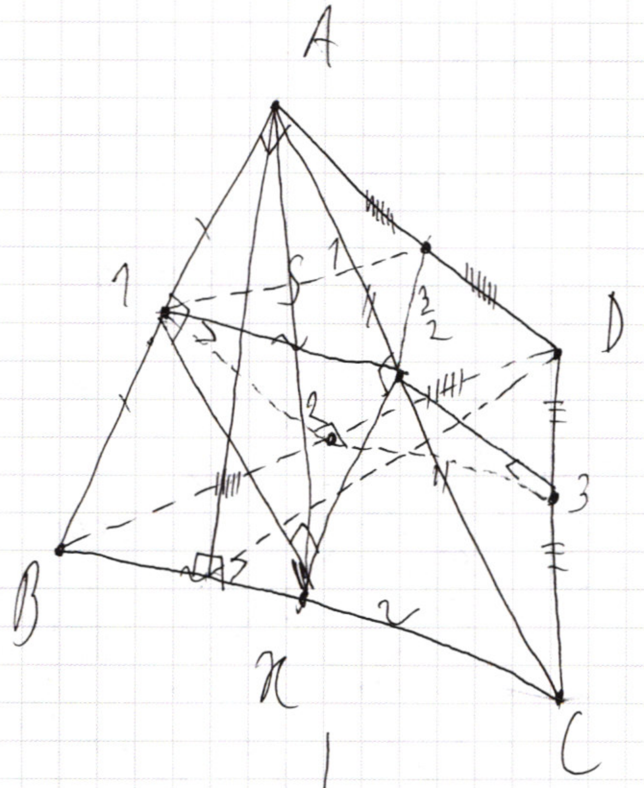
9) $X_4X_5X_7A$ - паралл-м, т.к. $X_4X_5 \parallel AC$; $X_7X_5 \parallel AB \Rightarrow$ по рассуждению из п. 3) $AX_4X_5X_7$ - прямоуг. $\Rightarrow$ $\angle BAC = 90° \Rightarrow AC = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$ - т. Пифагора

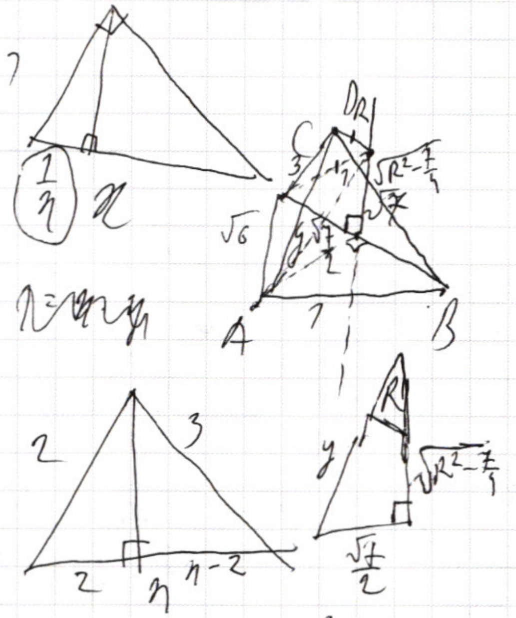
10) Пусть $AD = y$

11) Центр сферы, опис. около $ABCD$ лежит на прямой $\perp ABC$ и прох через X_5, т.к. X_5 - центр. опис. окр $\triangle ABC$

12) Пусть O - центр. опис. сферы $\Rightarrow OD = OC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



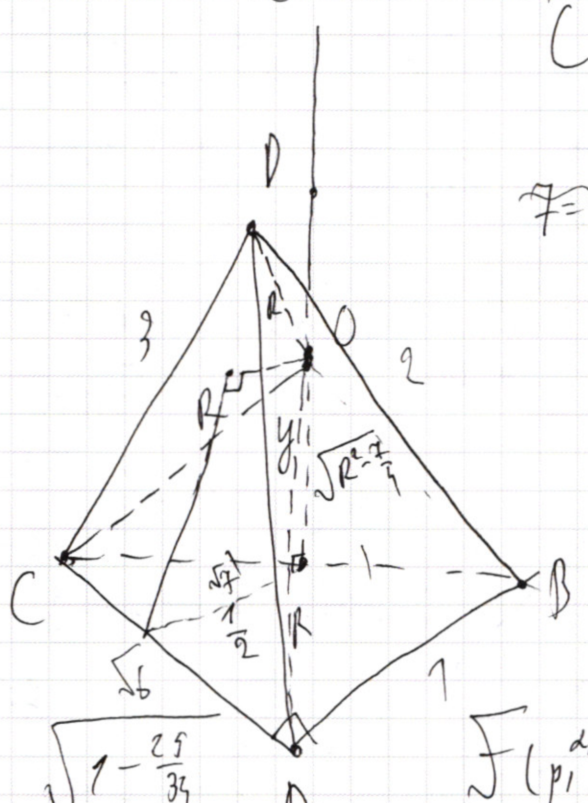


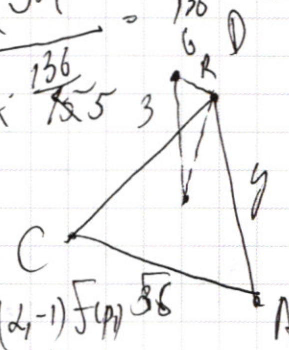
$$4-2^2=9-(x-2)^2$$

$$4-\frac{1}{x^2}=9-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$4-\frac{4}{x^2}=9-x^2-\frac{1}{x^2}+2$$

$$\frac{4\sqrt{34}}{\frac{4\cdot 136}{15}}=\frac{5\sqrt{34}}{136}=\frac{5\sqrt{34}}{34}\qquad \frac{5\cdot 136}{17\cdot 3}=\frac{40}{3}$$





$$4\sqrt{4+\frac{100}{9}}=4\frac{\sqrt{136}}{3}=\frac{8\sqrt{34}}{3}$$

$$(\alpha_1-1)f(p_1)$$

$$f(p_1^{\alpha_1})=f(p_1^{\alpha_1-1})+f(p_1)=\ldots=(\alpha_1-1)f(p_1)+f(p_1)$$

$$\sqrt{1-\frac{25}{34}}=\sqrt{\frac{9}{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\frac{50-32}{25}=\frac{18}{25}$$

$$\frac{85}{3}\cdot\frac{3\sqrt{34}}{34\cdot 2}\quad \frac{85}{3}=\frac{5\sqrt{34}}{2}$$

$$V_1=\frac{16}{25}\cdot\frac{85}{3}=\frac{136}{15}\qquad 289=\frac{36}{25}V_2^2$$

$$\arcsin\frac{3}{\ldots}-\arcsin\ldots\qquad \frac{17\cdot 5}{6}=V_2$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

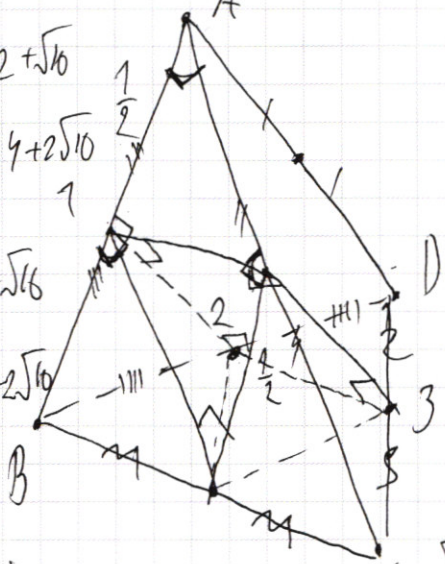
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$

$4+\sqrt{10} \geq 4+2\sqrt{10}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

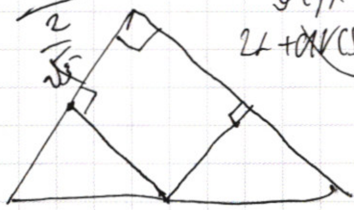
$4-\sqrt{10} \geq 4-2\sqrt{10}$



$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad 2\alpha + \arccos = -\arccos$

$BC = ?$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f(2)=1$

$\sin \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{5}}$



$2\alpha + \arccos = \pi + \arccos$

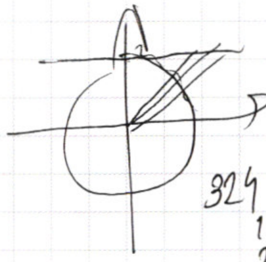
$x > 2$

$f(x) < f(2) = 1$

$x < 2$

$f(x) > f(2) = 1$

$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$



$\frac{4+\sqrt{10}}{2}$

144 · 4 = 576

324 + 576 = 900

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) - f(y)$

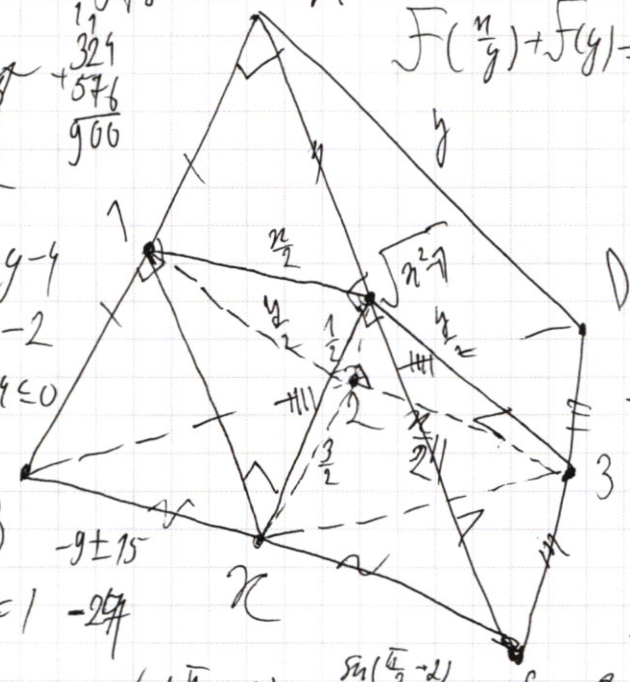
$xy\, f\left(\frac{1}{\frac{1}{y}}\right) = f(1) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f(1) = 0$

$1 + ctg^2 = 5$

$ctg = 2$



$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{1+4}{5}$

$4+\cancel{9}-8-\cancel{9}=12$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\frac{-9 \pm 15}{6}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$x-2 = 4y-4$

$x = 4y-2$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$\frac{-18 \pm 30}{2}$

-9 ± 15

$2\alpha - \arccos = -\arccos + 2\pi k$

$2\alpha - \arccos = \pi + \arccos + 2\pi k$

$x(18+x)$ $\quad -18;0$

$\frac{15+9}{4}$

$\frac{x-2}{y-1} = 1$ $\quad -24$

$x-2 = y-1$

$x = y+1$

$15+9 = 24$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{+\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha$

$24 + 16 = 90$ [sic]

$x = a+2$

$y = b+1$ $\quad a + \cancel{2} - 2b - \cancel{2}$

$x(y-1) - 2(y-1)$

$2y^2 - 4y - 3 = 0$

$(-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $11a-4b=11$ $4b-3a=4$ $x\ge 2y$ $8a=15$

$3^{-\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\ge 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$ $\frac{x-15}{8}-4=4b$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$ $x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$\log_{12}(x^2+18x)=t$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$x^2+18x=12^t$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$ $x=a+2$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$ $x-2=a$ $y=b+1$ $6-4$

$y-1=b$ $x-2y=a+2-2b-2=a-2b$

$(a-2b)^2=ab$ $3a-4b=-12$ $x-2=y-1$

$a^2+9b^2=25$ $a=1$ $x-1=y$ $5^t+12^t\ge 13^t$ $4\cdot 9^2+4\cdot 144$

$a^2-5ab+4b^2=0$ $-4b=-15$ $b=\frac{15}{4}$ $x=y+1$ $12=4b-19a$ $4=4b-3a$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2$ $3a-4b=-12$ $a=0$ $b=3$ $x-2=4y-4$ $8=-16a$

$x=4y-2$ $4=4b+\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}=4b$ $\log_{12}\frac{13}{5}=\log_{12}\frac{12}{5}+\log_{12}\frac{13}{12}$

$3^{-\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\ge(x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$ $4+y-8-18=12$ $\frac{8-3}{2}$

$x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\ge 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$ $(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}}=(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{12}{5}}+1$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2+18x\ge(x^2+18x)^{\log_{12}13}$ $-18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 144}$

$0\ge(x^2+18x)^{\log_{12}5}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}}-(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{12}{5}}-1\right)$ $\frac{-18\pm 30}{2}$

$12=4b-19a$ $x^2+18x-144\le 0$ -9 ± 15

$11a-4b=11$ $-8a=23$ -18 0 $x=4b+\frac{19\cdot 23}{8}$ -27 6

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\qquad 6\sqrt{34} < 34$

$(34-6)(34+6)\ 29\cdot 39$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\sqrt{\frac{34-25}{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}}$ $\qquad 2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$

$\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

1) $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

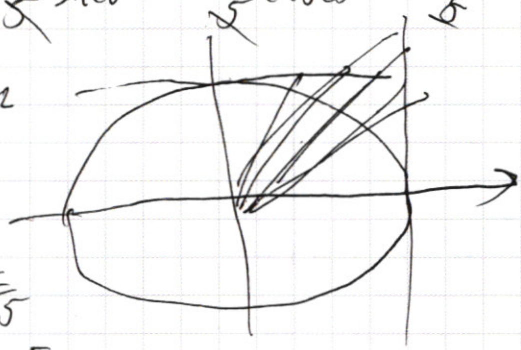
$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad 1137$

$\sqrt{\frac{34^2-25^2}{34^2}}$ $\qquad \frac{\sqrt{29\cdot 34}}{34}$ $\qquad \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \frac{136}{16}$

$\frac{8}{5}\sin 2\alpha-\frac{4}{5}\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$V_1^2+289=(2V_2-V_1)^2$

$V_1^2+289=4V_2^2-4V_2V_1+V_1^2$

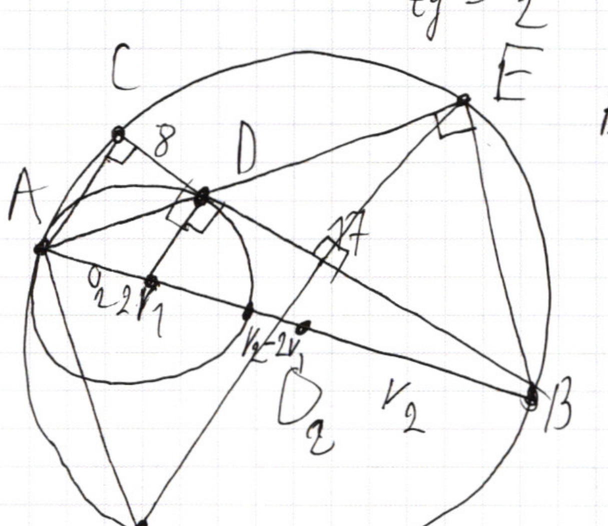


$\frac{17}{25}=\frac{2V_2-V_1}{2V_2}$ $\qquad \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad 8\cdot 17=AD\cdot DE$

$1+tg^2=\frac{5}{4}$ $\qquad 1+ctg^2=5$

$tg^2=\frac{1}{4}$ $\qquad ctg^2=4$

$tg=\frac{1}{2}$ $\qquad ctg=2$ $\qquad 4\sqrt{4+\frac{100}{9}}=$



V_1, V_2

$\angle AFE$

S_{AFE}

$\cos(\pi+\arcsin x)=-\cos$

$=4\sqrt{\frac{136}{9}}=$

$289=(2V_2-2V_1)\cdot 2V_2$

$\frac{50}{25}=\frac{32}{25}=\frac{18}{25}$ $\qquad 4\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 34}=$

$=\frac{8}{3}\sqrt{34}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{4}{4} \le x < -\frac{3}{4}$

$-4 \le 4x < -3$

$-8 < 4x-3 < 0$

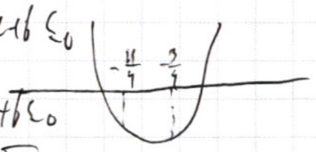
$12x+11 \ge (4x+3)(ax+b)$

$12x+11 \ge 4ax^2+4bx+3ax+3b$

$0 \ge 4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11$

$0 \ge 8x^2+(30+a)x+b+17$

$-\frac{4}{4}(4b-12)+17+b \le 0$



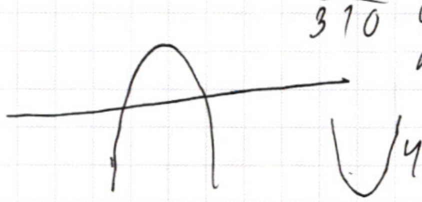
$-4b+33+17+b \le 0$

$50 \le 10b \quad f(-\frac{4}{4}) \le 0$

$5 \le b \quad f(-\frac{3}{4}) \le 0$

$8x^2+(30+a)x+b+17 \le 0$

$4b-11a=20$, $a=0$, $b=5$, $a=2$, $4b=42$, $b=\frac{21}{2}$, $a=1$



$4b-11=20$, $b=\frac{31}{4}$

$\frac{121}{2}-(30+a)\cdot\frac{4}{4}+17+b \le 0$

$242-330-11a+68+4b \le 0$

$4b-11a \le 20$

$\frac{9}{2}-(30+a)\frac{3}{4}+17+b \le 0$

$18-90-3a+68+4b \le 0$

$4b-3a \le 4$ $\quad a=1$

$12=4b-19a \quad 3a-4b \le -4$

$121a-33a-44b+132+12b-44 \le 0$

$88a-32b \le 88$

$11a-4b \le 11$

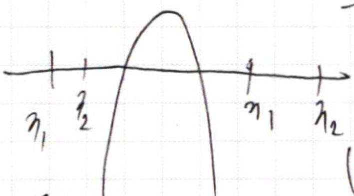
$a=0$, $b=3$

$9a-9a-12b+36+12b-44 \le 0$

$\frac{3a+4b-12}{8a}$

$12-4b-3a > -22a$

$12-4b+14a > 0$



$(4b-12)x+17+b \le 0$

$\frac{12-4b-3a}{8a} > -\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}(4b-12)+17+b \le 0 \quad \frac{52}{4}=\frac{26}{2}$

$11a-4b \le 11 \quad (4b-12)x$

$12-4b-3a < -6a$ $\quad 20 \ge 4b-11a \ge -11$

$-3(4b-12)+68+4b \le 0$

$3a-4b < -12$

$4b-3a \le 4 \quad 4b-3a=4$

$-12b+36+68+4b \le 0$

$4b-3a=4 \quad 3=-4a+1 \quad -4b+3a \ge -4 \quad 4b=7 \quad a=-\frac{4}{3}$

$104 \le 8b \quad 13 \le b \quad a=-\frac{1}{2}$

$12=4b-14a \quad \cancel{-8a \ge -16} \quad b=\frac{7}{4}$

$12=-16a+4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f(x/y) < 0$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{3}{5}) = f(3) + f(\frac{1}{5}) = [\frac{3}{4}] + f(\frac{1}{5}) = 0 + f(\frac{1}{5})$

$-\frac{11}{4} < -\frac{15}{8}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{12x+11}{3x+3} = 0$ $-\frac{11}{12}$

$-\frac{11}{12} > -\frac{15}{8}$

$-\frac{15}{8} < -\frac{3}{4}$

$\frac{12x+11}{3x+3} \le ax+b \le -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{12x+9+2}{3x+3} = 3 + \frac{2}{3x+3}$

$4(x+\frac{3}{4})$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$\frac{8\cdot17\cdot4 - 900}{32} = \frac{8\cdot17 - 225}{8}$

$-\frac{89}{8}$