МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

Из (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ (3)

(1) в (3) $-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ (4)

Из (4) $\Rightarrow$ $\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ (5)

Из (1) $-\frac{1}{\sqrt5} = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$ (6)

$\Rightarrow$ (4) и (5) в (6) $\cancel{\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{}}$

I случай ($\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$)

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $|\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(1-2\sin^2\alpha) = -1$ $\Big|\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$, т.к. $\cos\alpha\neq0$ т.к. $tg\,\alpha$ существует.

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -\frac{3}{\cos^2\alpha}$ (8)

Доп. действие: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha+1 \Rightarrow -\frac{3}{\cos^2\alpha} = -3\,tg^2\alpha-3$ (7)

(7) в (8)

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -3\,tg^2\alpha - 3$

$tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0 \xRightarrow{\text{по т. Виета}} \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=-1 \\ tg\,\alpha = 3\end{array}\right.$

Корни найдены по т. ме Виета, т.к. на $tg\,\alpha$ нет ограничений, где мотнр принято $tg\,\alpha$ за переменную

(продолжение см. на листе 2)

II случай $\left(\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\right)$ ① (продолжение)

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot \sqrt5$$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2(1-2\sin^2\alpha) = -1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ т.к. } \cos\alpha \neq 0 \text{ т.к. } tg\,\alpha \text{ сущест.}$$

$$2tg\,\alpha + 4tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (9)$$

(7) в (9)

$$2tg\,\alpha + 4tg^2\alpha = tg^2\alpha + 1$$

$$3tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$$

по т-ме Виета т.к. на $tg\,\alpha$ нет ограничений, то можно $tg\,\alpha$ считать за переменную

$$tg\,\alpha = -1$$
$$tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$

$\Downarrow$

$$tg\,\alpha = -1$$
$$tg\,\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \text{ значения}$$
$$tg\,\alpha = 3$$

Ответ: $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$; $tg\,\alpha = 3$

② $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$

из (2) $x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \quad (3)$$

из (1) $x - 12y = (x-6) - 6(2y-1)$

$$2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6) = (2y-1)(x-6)$$

$$(x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \quad (4)$$ (продолжение см. на листе 3)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 (продолжение)

~~Пусть~~ Запишем новую систему исходя из (3) и (4)

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=u$ $2y-1=v$ тогда запишем систему вновь

$$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \quad (5) \\ u^2+9v^2=90 \end{cases}$$

Из (5) при условии $u\geq 6v$

$(u-6v)^2=uv \Leftrightarrow u^2-12uv+36v^2=uv \Leftrightarrow$

$u^2-13uv+36v^2=0 \quad (6)$

I случай $v=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow 2y-1=0 \Rightarrow y=0,5$

$x-6=0 \Rightarrow x=6$ подставим эту пару в (1)

$6-6=\sqrt{6-12\cdot 0,5-6+6}$ выполняется

подставим в (2) $36+\frac{36}{4}-72-18=-45\neq 45$

$\Downarrow$

~~$v\neq 0$~~ $v=0$ не удовл.

II случай $v\neq 0$ тогда из (6)

$u^2-13uv+36v^2=0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{v^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)^2-13\frac{u}{v}+36=0$ Пусть $\frac{u}{v}=t$; $t\geq 6$, т.к. $u\geq 6v$

$t^2-13t+36=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=4 \text{ — не удовл.} \end{array}\right.$
по т-ме Виета

(продолжение см. на листе 4)

② (продолжение)

$u = 9v \Rightarrow x - 6 = 18y - 9 \Rightarrow x = 18y - 3$ (7)

(7) в (2)

$(18y-3)^2 + 36y^2 - 12(18y-3) - 36y = 45$

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y - 45 = 0$

$360y^2 - 360y = 0$

$360y(y-1) = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow x = 18\cdot 0 - 3 = -3$

$y = 1 \Rightarrow x = 18 - 3 = 15$

Проверка корней:

I. $(-3; 0)$ в (1) $-3 - 12\cdot 0 = \sqrt{-6\cdot 0 - 12\cdot 0 + 3 + 6}$

$-3 = \sqrt{9} \Rightarrow$ удовл.

II $(15; 1)$ в (1)

$15 - 12 = \sqrt{30 - 12 - 15 + 6}$

$3 = \sqrt{9}$ - удовл.

Ответ: $(-3; 0)$; $(15; 1)$

③ $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $10x - x^2 = t$ $t > 0$

ОДЗ:
$10x - x^2 > 0$
$x \in (0; 10)$

Тогда исходное неравенство примет вид.

$|t|^{\log_3 4} \geq -t + 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4} \geq -t + 5^{\log_3 t}$ (1) По основному логарифм. тождеству

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$ (2)

(2) в (1)

$4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq -t$ (3)

Заметим, что $\log_3 t$ — монотонно возрастающая функция т.к. основание больше 1, тогда $4^{\log_3 t}$ и $5^{\log_3 t}$ — монотонно возраст. функции. (продолж. на листе 5)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 (продолжение)

Т.к. $4^{\log_3 t}$ и $5^{\log_3 t}$ - степенные функции с изменяющимся одинаково показателем степени, то $4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t}$ - ~~будет~~ убывающая функция, т.к. 4^x ~~растет~~ возрастает медленнее 5^x, где x - какая-то степень.

Заметим, что $t = 9$ - критическая точка, т.к. ~~тогда~~ при $t > 9$ левая часть неравенства (3) становится меньше правой.

$$\Downarrow$$

$$t \in (0; 9]$$

$$\Downarrow$$

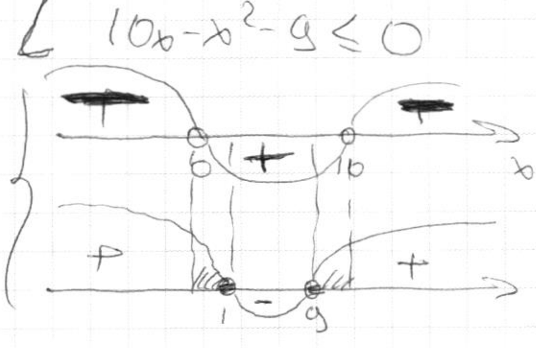
обратная замена

$$t = 10x - x^2$$

$$\Downarrow$$

$$0 < 10x - x^2 \le 9$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 - 9 \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(10-x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(10-x) > 0 \\ (x-9)(x-1) \ge 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

(4) Дано:

Ω - окр. $(O; R)$

ω - окр. $(O_1; r)$

$\Omega \cap \omega = A$

AB - диаметр Ω

$BC \cap \omega = D$

$AO \cap \Omega = E$

$EF \perp BC$;

$EF \cap \Omega = F$

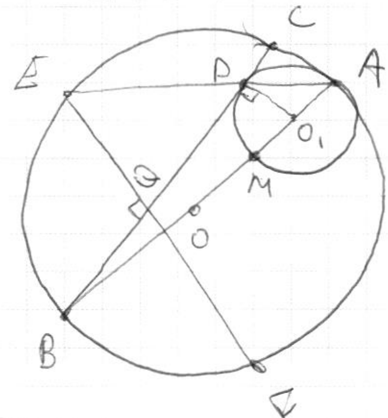
$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

R, r - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

Решение:



1) Заметим, что при касании окружностей их центры и точка касания всегда лежат на одной прямой $\Rightarrow$ диаметр AB проходит через O_1

2) Рассм. $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$

$\angle BCA = 90°$ (т.к. опирается на диаметр AB)

$\angle BDO_1 = 90°$ (т.к. BD - касается $\omega \Rightarrow BD \perp r$)
$O_1D = r$

$\angle CBA$ - общий.

$\Downarrow$

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по 2ум углам)

Тогда $\frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC}$ (1)

$BO_1 = AB - AO_1 = 2R - r$ в (1)

$AB = 2R$

$BC = BD + CD = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = 16$

$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32}$

$\Downarrow$

$64R - 32r = 34r$

$30R = 32r$

$\Downarrow$

$R = \frac{16}{15} r$ (2)

3) $BD^2 = BA \cdot BM$, (3) где $AB \cap \omega = M$, $M \neq A$
по т-ме о касательной.

(продолжение см на листе 7)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 (продолжение)

$AB = 2R$

$BM = AB - AM = 2R - 2r$

в (3) $\Rightarrow \frac{289}{4} = 4R(R-r)$ (4)

(2) в (4) $\frac{289}{4} = \frac{4R^2}{16} \Rightarrow \underline{\underline{R = 17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из (2) $r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \underline{\underline{\frac{255}{16}}}$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

⑥ ~~16x~~ Пусть $\frac{16x-16}{4x-5} = f(x)$

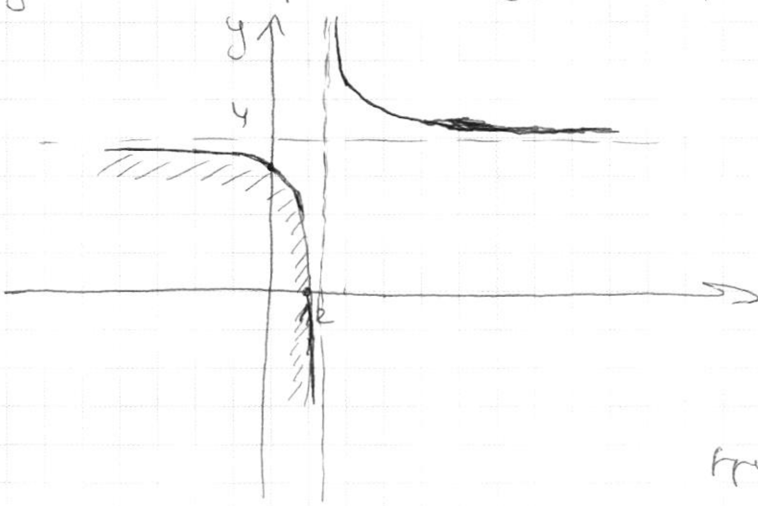
$ax+b = g(x)$

$-32x^2+36x-3 = k(x)$

$f(x)$ - гипербола с асимптотами $y=4$

$x=1{,}2 \to$ правее

$x \leq 1 \Rightarrow$ рассматриваем только убывающую ~~часть~~ гиперболу



$\to$ рассматривается гипербола на участке

Причем ее часть ~~от~~

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$f(\frac{1}{4}) = 3$

$f(1) = 0$

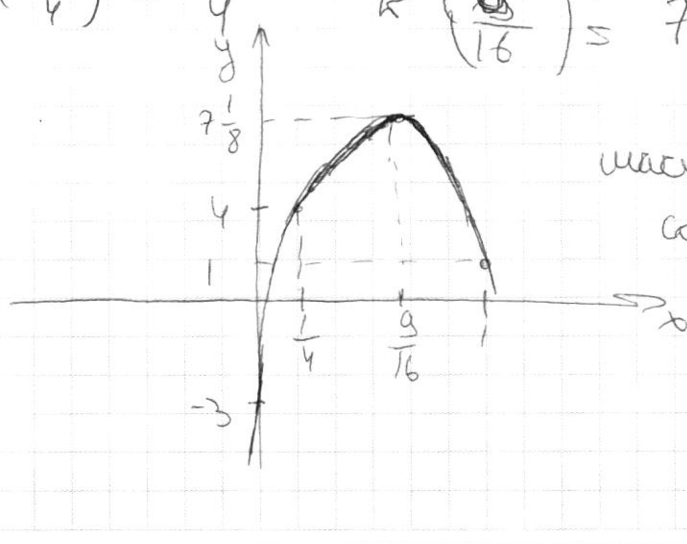
$k(x)$ - парабола с ветвями вниз.

$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} \in [\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in [\frac{1}{4}; \frac{9}{16})$ $k(x)$ возрастает

при $x \in [\frac{9}{16}; 1]$ $k(x)$ - убывает

$k(\frac{1}{4}) = 4$ $k(\frac{9}{16}) = 7\frac{1}{8}$ $k(1) = 1$



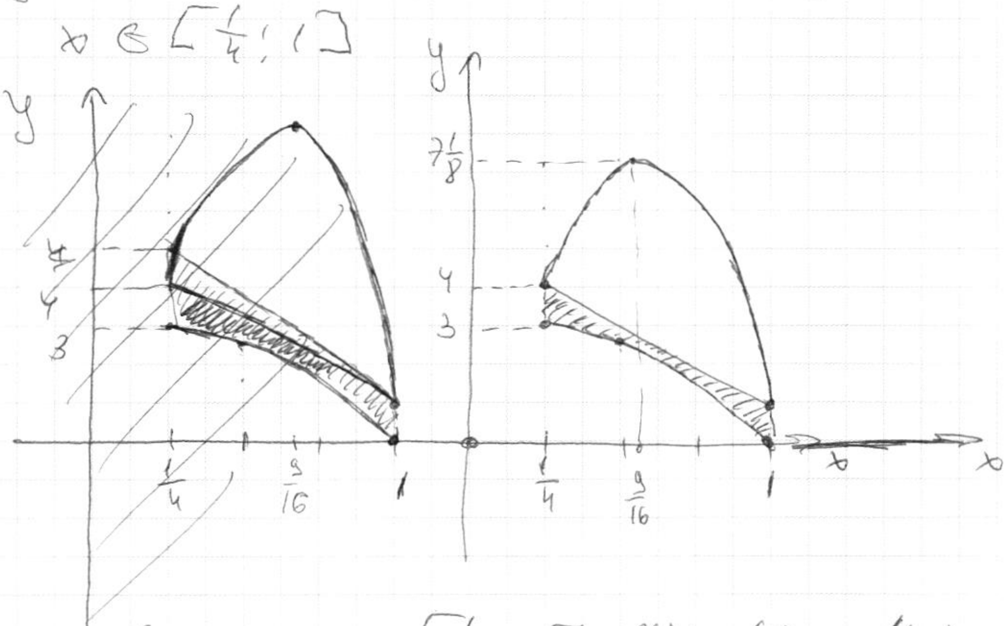
масштаб на чертеже не соблюден, график ~~условно~~ иллюстрирует схематичное изображ. ~~то~~ ~~фун~~ функции и основные точки.

(продолжение см. на листе 9)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 (продолжение)

Нарисуем общий график для всех функций на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$



Т.к. $g(x)$ при всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $f(x) \le g(x) \le h(x)$

то заштрихованная часть – область ~~возможного~~ расположения ~~всех g(x)~~ всевозможных $g(x)$

Крайнее положение $g(x) \Rightarrow$ верхняя граница

Это $g(\frac{1}{4}) = 4$ $\quad g(1) = 1$

$$-\begin{cases} \frac{a}{4} + b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases} \qquad -\frac{3}{4}a = 3 \Rightarrow a = -4$$

$$b = 5$$

$$\Downarrow$$

$g(x) = -4x + 5$ – крайнее верхнее положение

Ответ: $(-4; 5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16x-16 \mid 4x-5$

$16x-20 \mid 4$

4

$\Rightarrow 4+\frac{4}{4x-5}$

$-84x+36$

$-\frac{36}{64}$

$-\frac{9}{16}$

$+ \quad -$

$\frac{9}{16}$

$4-\frac{16}{11}=$

$4+\frac{4}{\frac{9}{4}-5}=4+\frac{4}{\frac{-11}{4}}=$

$\frac{4-16}{1-5}=\frac{-12}{-4}=3.$

$4-\frac{1}{11}=$

$\frac{7}{\frac{9}{4}-5}=\frac{-7\cdot 4}{-11}=\frac{28}{11}$

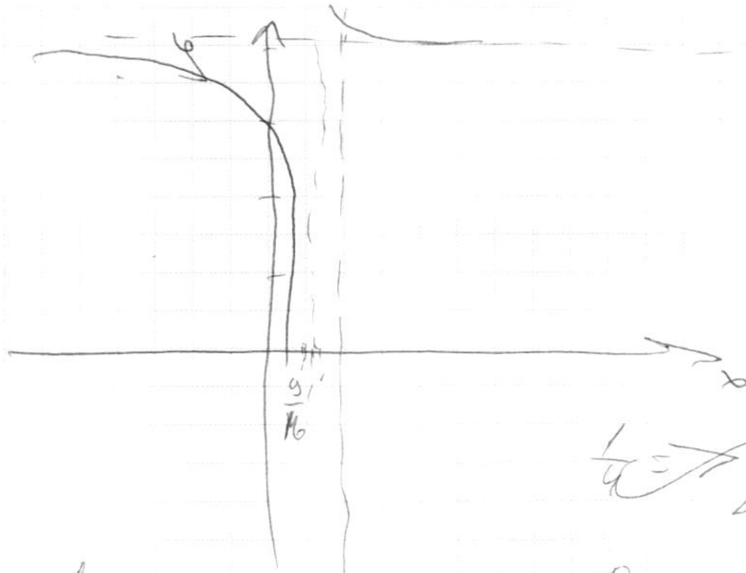
$\frac{9-16}{\frac{9}{4}-5}=\frac{-7\cdot 4}{-11}=\frac{28}{11}$

$\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2}=$

$16\cdot 5-16\cdot 4=\frac{16}{(4x-5)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\frac{8}{10} \cdot \frac{9}{16} =$

$\frac{7}{8} - \frac{8}{10}$

$45+9$
54

~~$\frac{1}{4} \Rightarrow 3 \quad \frac{28}{11}$~~

$\frac{1}{4} \Rightarrow 3$

$\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{28}{11}$

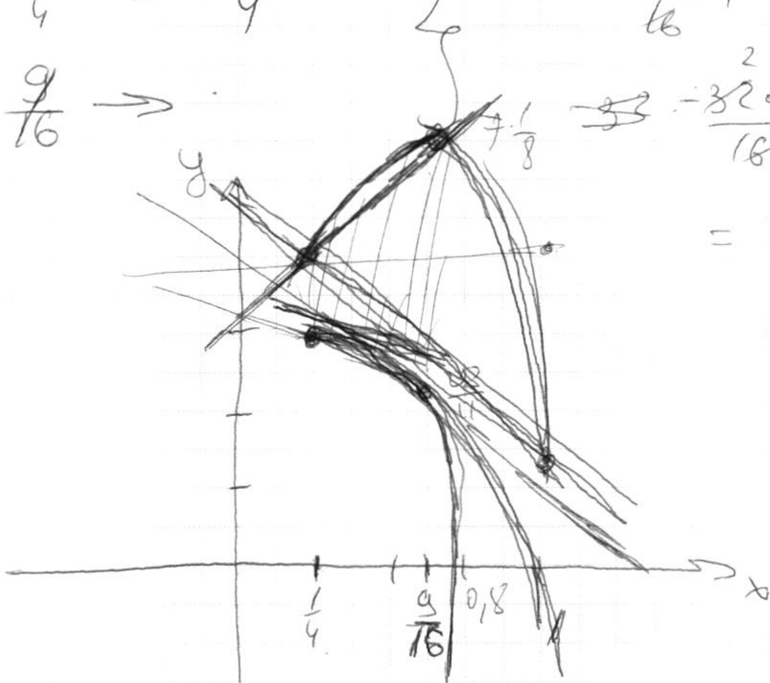
$\frac{D}{4} = 18^2 - 96 =$

$x_6 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16}$

$\frac{1}{4} \to 4 \qquad 2$

$-\frac{32}{16} + 9 - 3 = -2 + 9 - 3 = 5$

$\frac{9}{16} \to$



$-\frac{32 \cdot 81}{16^2} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3 \quad -\frac{162}{16} + \frac{324}{16}$

$= \frac{162}{16} - 3 = 10\frac{1}{8} - 3 = 7\frac{1}{8}$

$\frac{162}{16} - \frac{48}{16} = \frac{114}{16} = \frac{57}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$u > 6v$

$u^2 - 12uv + 36v^2 = uv$

$u^2 - 13uv + 36v^2 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{v^2}$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$D = 169 - 36 \cdot 4 = 25$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix} \right.$

$\frac{x-6}{2y-1} = 9 \qquad x - 6 = 18y - 9$

$x = 18y - 3$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$\cancel{-6 = \sqrt{-6}}$

$x - 6 = \sqrt{x-6-x+6}$

$x = 6$

$\underline{x - 6 = u} \qquad \underline{2y - 1 = v}$

$$\begin{cases} u - 6v = \sqrt{uv} \\ u^2 + 9v^2 = 90 \end{cases} \qquad \underline{u > 6v}$$

$u^2 - 12uv + 36v^2 = uv$

$u^2 - 13uv + 36v^2 = 0 \quad \Big| \frac{1}{v^2}$

$v = 0$

$\cancel{v \neq 0}$

$y = 0{,}5$

$x = 6$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$36 + 9 - 72 - 18$

-45

$\frac{D}{4} = 169 - 144 = 25$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix} \right.$

$x - 6 = 18y - 9 \qquad x - 6 = 8y - 4$

$\underline{x = 18y - 3} \qquad \underline{x = 8y + 2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$(x^2-12x+36)+(6y-3)^2 = 45$

~~$x=6$~~ $x=$

$(x-6)^2 = x^2-12x+36-36$

$(6y-3)^2 = 36y-2\cdot6\cdot3y+9-9$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$2y(x-6)-(x-6) = (2y-1)\quad(x-6)$

$(x-6)+6-12y = (x-6)-6(2y-1)$

$$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \\ u^2+9v^2=90 \end{cases}$$

$(u+3v)^2 = u^2+6uv+9v^2-9$

$(u+3v)^2-6uv=90$

$u-6v=\sqrt{uv}$

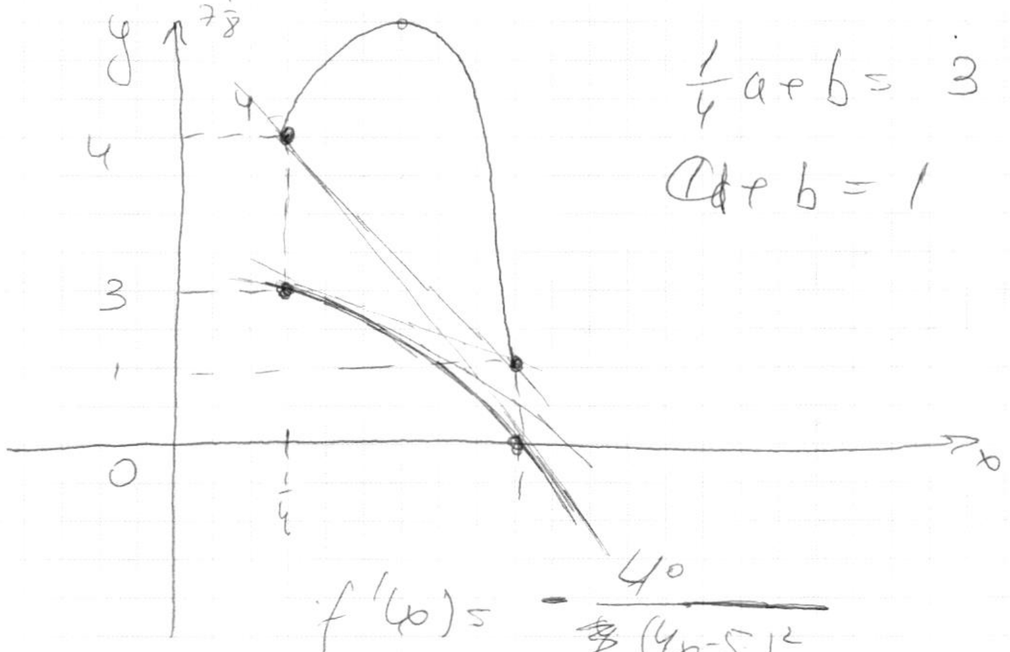
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{1}{4}a + b = 3$

$a + b = 1$

$f'(x) = -\frac{40}{(4x-5)^2}$

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f'(g(x)) = g'(x)\, f'(x)$

$\frac{1}{4x-5} = -\frac{4}{(4x-5)^2} = -\frac{16}{(4x-5)^2} = a$

$\rho = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$ $\quad \frac{-16}{(4x-5)^2} \cdot x + b = \frac{16x-16}{4x-5}$

$\frac{-16x + (4x-5)^2 b}{(4x-5)^2} = 16x + 16(4x-5)^2 = 0$

$-16x - 16x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

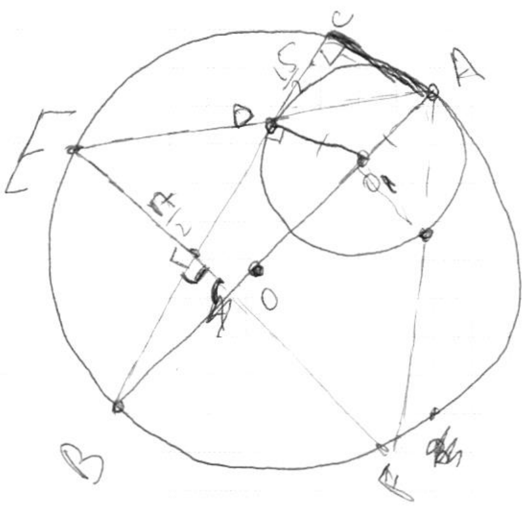
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$\cancel{f(x)}$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\frac{x}{y} \in$ Hoстыи шиаан.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$R = \frac{32}{30} r$

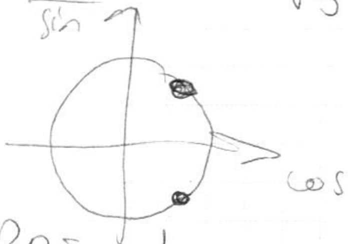
$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \cancel{(2R-r)} \cdot 2R \cdot (2R - 2r)$

$\frac{289}{4} = 4R^2 - 4R \cdot r$ $\cancel{\frac{289}{6}} =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

~~sin~~ $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$



$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

I сл. $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

~~sin2α~~ $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -\frac{3}{\cos^2\alpha}$

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -3\,tg^2\alpha - 3$

$-tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha + 3 = 0 \qquad tg\,\alpha = 3$

$tg\,\alpha = -1$

II сл. ~~2tgα~~

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2 + 4\sin^2\alpha = -1$

$2\,tg\,\alpha + 4\,tg^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$

$3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 2^2$

$t_{1,2} = \frac{-1\pm2}{3} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow$

$\frac{8-16}{2-5} = \frac{-8}{\frac{9}{2}} = -\frac{16}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\sin(\alpha+2\beta)}$

$\cancel{\sin\alpha}$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = +\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\beta = \frac{\pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n}{2}\quad n\in\mathbb{Z}$

$\beta = \arcsin$

$\cancel{k\,3}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\quad \Big|\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1\quad \Big|\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\cancel{tg\,2\alpha + 2}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\sin^2\alpha = -3\quad \Big|\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -\frac{3}{\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$2\,tg\,\alpha - 4\,tg^2\alpha = -3\,tg^2\alpha - 3$

$-tg^2\alpha + 2tg\,\alpha + 3 = 0$

$tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0$

$(tg\,\alpha - 3)(tg\,\alpha + 1) = 0$

$tg\,\alpha = 3$

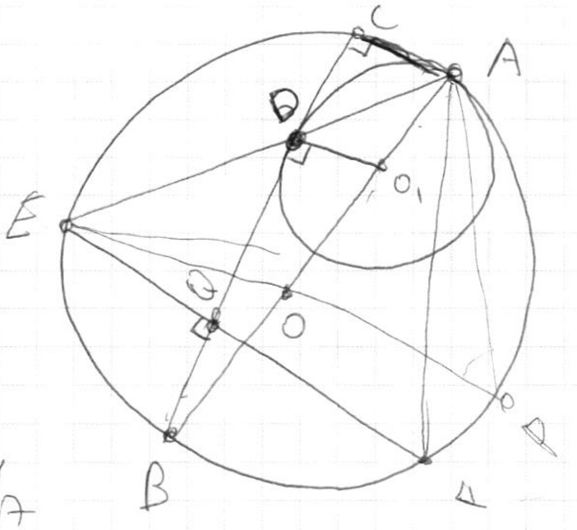
$tg\,\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{17}{2\cdot 16} = \frac{2R-r}{2R}$$

$$34R = 64R - 32r$$

$$R = \frac{32}{30} r = \frac{16}{15} r$$

$$\frac{289}{4} = 4R(R-r)$$

$$289 = 16R^2 - 16Rr$$

$$289 = 16R^2 - 15R \Rightarrow 16R^2 - 15R - 289 = 0$$

$$D = 225 + 289\cdot 64$$

$$\frac{289}{4} = \frac{4R\cdot R}{16}$$

$$\underline{R = 17}$$

$$r = \frac{15\cdot 17}{16}$$

$17 \times 17 = 289$

$289 \times 64 = 18496$

$18496 + 225 = 18721$

$17 \times 15 = 255$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(-t)^{\log_3 4} \geq -t + 5^{\log_3 t}$

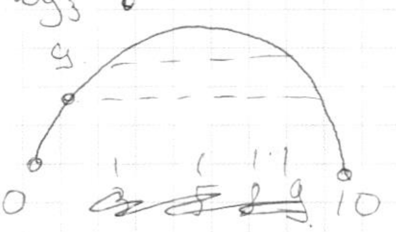
$(-t)^{\log_3 4} \geq -t + t^{\log_3 5}$

$(-t) + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq -t + t + \log \cdot t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$\frac{(-t)}{-t}$

$(-t)^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq -t$

$4^{\log_3 t} \geq -t + 5^{\log_3 t}$



$4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq -t$

$t \in (0; 3\ 9)$

$4^{\log_3 \cancel{t}} \geq t + 5^{\log_3 t}$

$4^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t} + 5^{\log_3 t}$

$1 \geq \frac{3}{4}^{\log_3 t} + \frac{5}{4}^{\log_3 t}$

$\cancel{\log_3 4 \cdot \log_3(-t) \geq \log_3 t}$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)}$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + (-t)^{\log_3 5}$

$|t|^{\log_3 4} - t \geq (-t)^{\log_3 5}$

$[0;25]$

$|t|^{\log_3 4} - (-t)^{\log_3 5} \geq t$

$(0;25)$ $(0;25)$ $\geq \cancel{(0;25)}$ $(-25;0)$

$3^2 - 3 = 6$ $3^x \, 13$

$k^{\log_3 4} \geq k + k^{\log_3 5}$

$\log_3 4 \cdot 1{,}25$

< 0

$|t|^{\log_3 4}\left(1 - (-t)^{\log_3 1{,}25}\right) \geq t$

$1 - t^{\log_3 1{,}25} \geq t^{\log_3 0{,}75}$

$1 \geq t^{\log_3 0{,}75} + t^{\log_3 1{,}25}$

$-\frac{26 \cdot 9}{16} + \frac{9 \cdot 36}{16} - 3^5$

$\frac{17 \cdot 18}{16}, 86 =$

$-8 + 9 - 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$18 \times 18 = 144 + 18 = 324$

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 + 36 = 216y - 36y^2 \cdot 45$

$18 \cdot 6 = 108$

$12 \times 18 = 96 + 12 = 216$

$360y^2 - 360y = 0$

$y = 1 \Rightarrow x = 15$

$3 = \sqrt{30 - 12 - 15 + 6}$

$y = 0 \Rightarrow x = -3$

$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y = 45$

$100y^2 - 100y - 20 = 45$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$20y^2 - 20y - 13 = 0$

$\frac{D}{4} = 100 + 13 \cdot 20 = 460$

$10x + |x(10-x)|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$

~~$10x + (|(-x^2 + 10x)|)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5$~~

$x^2 - 10x = t$

$(-t)^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3 t}$

$-t^{\log_3 4} = 4^{\log_3(-t)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)