МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Дано:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

Найти $tg\alpha = ?$

1) из (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{5}$$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

2) $\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (1)}\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}}\\ \sin 2\beta = -\sqrt{1-\frac{1}{5}}\end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$

3) (1): $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

4) $\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$ $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \overset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{1} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 & \mid : \cos^2\alpha \neq 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0 & \mid : \cos^2\alpha \neq 0 \end{array}\right.$$

~~$\cos^2\alpha \neq 0$~~, так $\cos\alpha = 0$ не содержит решений, т.к. $\left\{\begin{array}{l} 0 - \sin^2\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \end{array}\right. \varnothing$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 0 + 3\sin^2\alpha = 0 \\ \cos\alpha \end{array}\right. \varnothing$

$$\left[\begin{array}{l} 2\,tg\alpha + 3 - tg^2\alpha = 0 \\ 2\,tg\alpha - 1 + 3\,tg^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha - 2\,tg\alpha - 3 = 0 \\ 3\,tg^2\alpha + 2\,tg\alpha - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Замена: $tg\alpha = t$

$$\left\{\begin{array}{l} t^2 - 2t - 3 = 0 \quad (1) \\ 3t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right. \qquad (1): \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right. \qquad (2): \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Получилось три значение $tg\alpha$, что удовлетворяет условию

Ответ: $-1;\ 3;\ \frac{1}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)} \\ (x-6)^2+3(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{cases} x-6=a \\ 2y-1=b \end{cases}$$

Тогда $x-12y=a-6b$

$x(2y-1)-6(2y-1)=$
$=(x-6)(2y-1)=ab$

Тогда.

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+3b^2=90 \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} a\geq 6b \\ a^2-12ab+36b^2=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 6b \\ a^2-13ab+36b^2=0 \end{cases}$$

$D_a=169b^2-144b^2=25b^2$

$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{13b+5b}{2} \\ a&=\frac{13b-5b}{2} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} a&=9b \\ a&=4b \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} a\geq 6b \\ \left[\begin{aligned} a&=9b \\ a&=4b \end{aligned}\right. \\ a^2+3b^2=90 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} 84b^2&=90 \\ 19b^2&=90 \end{aligned}\right. \\ a\geq 6b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned} b^2&=\frac{45}{42} \\ b^2&=\frac{90}{19} \end{aligned}\right.$$

Продолжение № 2.

$$\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b^2 = \frac{45}{42} \quad (1)^* \\ a = 9b \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 = \frac{90}{19} \quad (2)^* \\ a = 4b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$(1)^*$: $\begin{cases} b^2 = \frac{15}{14} \\ a = 9b \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} b = \sqrt{\frac{15}{14}} \text{ и } a = 9\sqrt{\frac{15}{14}} \\ b = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \text{ и } a = -9\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \end{array}\right.$$

$(2)^*$ $\left[\begin{array}{l} b = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \text{ и } a = \frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \\ b = -\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \; a = -\frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9\sqrt{\frac{15}{14}} \\ b = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{9\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \\ b = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\begin{cases} x - 6 = a \\ 2y - 1 = b \end{cases}$ $\begin{cases} x = a + 6 \\ y = \frac{b+1}{2} \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9\sqrt{\frac{15}{14}} + 6 \\ y = \frac{\sqrt{\frac{15}{14}} + 1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{9\sqrt{15}}{\sqrt{14}} + 6 \\ y = \frac{-\sqrt{\frac{15}{14}} + 1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{15}{14}} + 6; \frac{\sqrt{\frac{15}{14}} + 1}{2}\right)$; $\left(-9\sqrt{\frac{15}{14}} + 6; \frac{-\sqrt{\frac{15}{14}} + 1}{2}\right)$.

$a \geq 6b$ и

$$\begin{cases} a = 9\sqrt{\frac{15}{14}} \\ b = \sqrt{\frac{15}{14}} \end{cases} \cup \begin{cases} a = -9\sqrt{\frac{15}{14}} \\ b = -\sqrt{\frac{15}{14}} \end{cases} \cup \begin{cases} a = \frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \\ b = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \end{cases} \cup \begin{cases} a = -\frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \\ b = -\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}} \end{cases}$$

Тогда $(a;b)$ подходят $\left(\frac{9\sqrt{15}}{\sqrt{14}}; \sqrt{\frac{15}{14}}\right)$; $\left(-12\sqrt{\frac{10}{19}}; -3\sqrt{\frac{10}{19}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 2

$$\begin{cases} x-6=a \\ 2y-1=b \end{cases} \quad \begin{cases} x=a+6 \\ y=\frac{b+1}{2} \end{cases}$$

Подставляя a и b получим

Ответ:

Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{15}{14}}+6;\ \frac{\sqrt{\frac{15}{14}}+1}{2}\right)$; ~~$\left(-12\sqrt{\frac{10}{19}}+6\right)$~~

$\left(-12\sqrt{\frac{10}{19}}+6;\ \frac{-3\sqrt{\frac{10}{19}}+1}{2}\right)$.

№3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2+|10x-x^2|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Необходимо $10x-x^2>0$, тогда $\Downarrow$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $t=\log_3(10x-x^2)$, тогда

$10x-x^2=3^t$, тогда $\quad 3^t+(3^t)^{\log_3 4}\geq 5^t$

$$3^t+\left(3^{\log_3 4}\right)^t\geq 5^t$$

$$3^t+4^t\geq 5^t$$

~~$t=\log_3(10x-x^2)$ $t=\log_3 z$ — монотонная функция~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение 5 3.

$3^t+4^t \geq 5^t \quad /:5^t>0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1.$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t$ — убывающая ф-ия ~~прот~~ на $\mathbb{R}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t$ — убывающая ф-ия на $\mathbb{R}$, а значит ур-ие
значит $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\right)$ — убывающая ф-ия на $\mathbb{R}$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t=1$ имеет не более одного решения

решение можно подобрать $t=2$ $\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$

Если $t<2$, то. $\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t > 1$, если $t>2$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t < 1$, т.е.

решением $\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1$ явл. $t \leq 2$

$\log_3(10x-x^2) \leq 2$

$0<10x-x^2 \leq 9$

$x^2-10x+9 \geq 0$ и $0<10x-x^2$

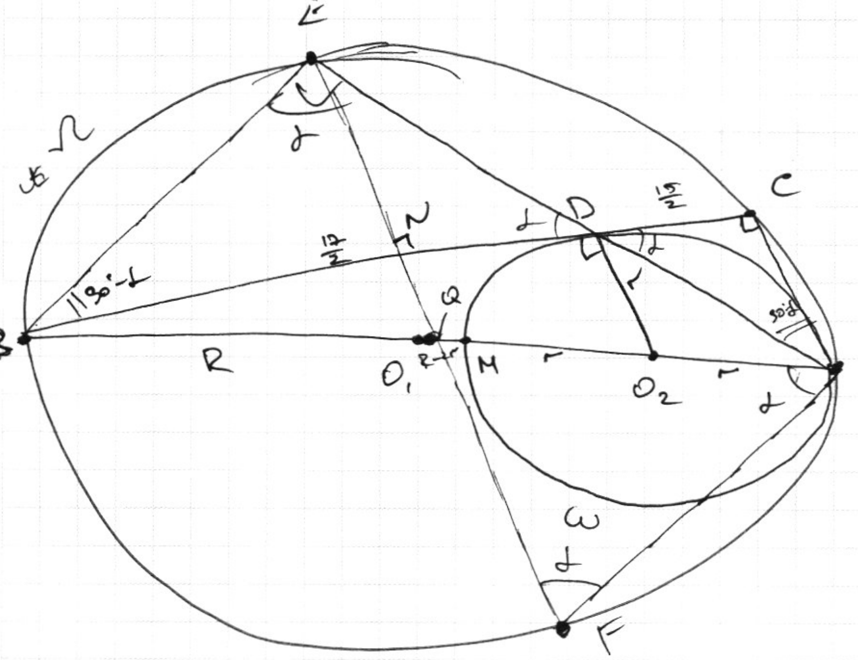
$(x-1)(x-9) \geq 0 \qquad x^2-10x<0$

$\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{array}\right. \qquad x(x-10)<0$

$0<x<10$

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$.

№ 4.



Дано Ω, ω.
У Ω центр O_1, $BD=\frac{17}{2}$
У ω центр O_2, $CD=\frac{15}{2}$
$O_2D \perp BC$
$EF \perp BC$
Найти: $BO_1 = ?$
$O_2A = ?$
$\angle AFE = ?$
$S_{\triangle AEF} = ?$

1) Пусть $R = BO_1$; $r = AO_2$.

По св-ву касат. и секущей. $BD^2 = BM \cdot BA$, где $M = AB \cap \omega$, $M \neq A$

т.е. $BD^2 = 2R \cdot (R + O_1M)$

$O_1M = AB - BO_1 - AM = R - 2r$

т.е. $BD^2 = 2R(2R-2r) \Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2R(2R-2r)$

2) $\angle BCA$ – вписан, опирается на AB, но AB – диаметр, значит $\angle BCA = 90°$

3) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}} = \frac{r+R+R-2r}{2R} \Rightarrow$$

$$\frac{17}{32} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 34R = 64R - 32r \Rightarrow 30R = 32r$$

$15R = 16r$

$R = \frac{16r}{15}$ $r = \frac{15R}{16}$

4) $\begin{cases} \frac{289}{4} = 2R(2R-2r) \\ r = \frac{15R}{16} \end{cases} \Rightarrow \frac{289}{4} = 4R\left(R - \frac{15R}{16}\right)$

$289 = R^2$

$R = 17$ $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

$BO_1 = 17$ $AO_2 = \frac{255}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №4.

5) Пусть $EF \cap BC = N$ 6) Пусть $\angle CDA = \alpha$, тогда $\angle DAC = 90^\circ - \alpha$. ($\triangle DCA$ прямоуг.)

7) $\angle EDN = \angle CDA = \alpha$ (вертикальные)

8) $\angle BEA = 90^\circ$, т.к. вписан. и опирается на диаметр AB

9) $\triangle END$ $\angle NED = 90^\circ - \alpha$; $\angle E = 90^\circ \Rightarrow \angle BEN = \alpha$

10) $\angle BEF = \frac{\breve{BF}}{2}$ (вписан угл), но $\angle BAF = \frac{\breve{BF}}{2}$ (вписан угл), значит

$\angle BEF = \angle BAF = \alpha$

11) $\angle EBC = 90^\circ - \alpha$ $\triangle BEN$ - прямоуг.

12) $\angle EFA = \breve{AE}/2 = \frac{\breve{EC} + \breve{CA}}{2} = \frac{\breve{EC}}{2} + \frac{\breve{CA}}{2} = \angle EBC + \angle CBA$

(св-ва вписанных углов).

13) $\angle EFA = 90^\circ - \alpha + \angle CBA$.

14) $\triangle BDO_2$ $tg \angle CBA = \frac{r}{\frac{17}{2}} = \frac{2r}{17} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 17}{17 \cdot 16} = \frac{15}{8}$

15) $\triangle BO_2D \sim \triangle BCA$

$$\frac{DO_2}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AC = \frac{DO_2 \cdot BC}{BD} = \frac{r \cdot \frac{32}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17} r =$$

$$= \frac{32}{17} \cdot \frac{15 \cdot 17}{16} = 30.$$

16) $\triangle DCA$ $tg \angle DAC = tg(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение №4

$\angle EFA = \angle CBA + (90^\circ - \alpha)$

$tg\angle CBA = \frac{15}{8}$ $tg(90^\circ-\alpha) = \frac{1}{4}$

$tg(\angle CBA + (90^\circ - \alpha)) = \dfrac{\frac{15}{8}+\frac{1}{4}}{1-\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{17}{8}}{\frac{17}{32}} = 4 = tg(\angle EFA)$

$\angle EFA = arctg\,4$, но если $tg(90^\circ-\alpha) = \frac{1}{4}$, значит $tg\alpha = 4$, т.е. $\alpha = arctg 4$.

$tg\angle EFA = tg\alpha \Rightarrow \alpha = \angle EFA$, значит

$\triangle QAF$ – р/б ~~значит~~ ~~$QA = QF$~~

Пусть $EF \cap AB = Q$, тогда $\angle FQA = 180^\circ - 2\angle F =$

$= 180^\circ - 2\alpha$ $\angle FQA = \angle NQB = 180^\circ - 2\alpha$ (вертик).

$\triangle BNQ$ – прямоуг, значит $\angle NBQ = 90^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha - 90^\circ$

$\triangle QAF$ – р/б $\Leftrightarrow QA = QF$.

$\angle NBQ = 2\alpha - 90^\circ$ $\angle EBN = 90^\circ - \alpha$, значит

$\angle EBQ = \alpha$ значит $\triangle BEQ$ – р/б, значит

$EQ = QB$

$\triangle BDO_2$ – прямоуг $\angle DO_2B = 90^\circ - 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ - 2\alpha$, значит

$\angle DO_2A = 2\alpha$ (смежные), значит $\angle DAO_2 = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle DO_2A$ – р/б)

$\angle DAO_2 = 90^\circ - \alpha$ $\angle QEA = 90^\circ - \alpha$ $\Leftrightarrow \triangle EQA$ – р/б $\Rightarrow$

$EQ = QA$, но тогда по доказ. $EQ = QA = QF = BQ$,

значит Q – серед. BA, но сер. BA – O_1, значит $Q = O_1$.

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 9
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение³ N 4.

По доказан. $QA = QF = EQ = R = O_1A = O_1E$

$S_{\triangle EAF} = S_{\triangle EO_1A} + S_{\triangle AO_1F} =$

$= \frac{R^2}{2}\sin\angle EO_1A + \frac{R^2}{2}\sin\angle FO_1A =$

$\sin\angle \quad = R^2 \sin\angle FO_1A$ (т.к. $\angle FO_1A = 180^\circ - \angle EO_1A$)

$\angle FO_1A = 180^\circ - 2\alpha$

$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{17} = \frac{8}{17}$.

$tg\alpha = 4 \quad 1+16 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$S_{\triangle EAF} = 17^2\cdot\frac{8}{17} = 17\cdot 8 = 80+56 = 136$.

Ответ: 17; $\frac{255}{16}$; $arctg 4$; 136.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$y_1=\frac{16x-16}{4x-5}=\frac{4(4x-5)+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}.$$

$y_1=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ — гипербола ас-ты $(x=\frac{5}{4}\ y=4)$

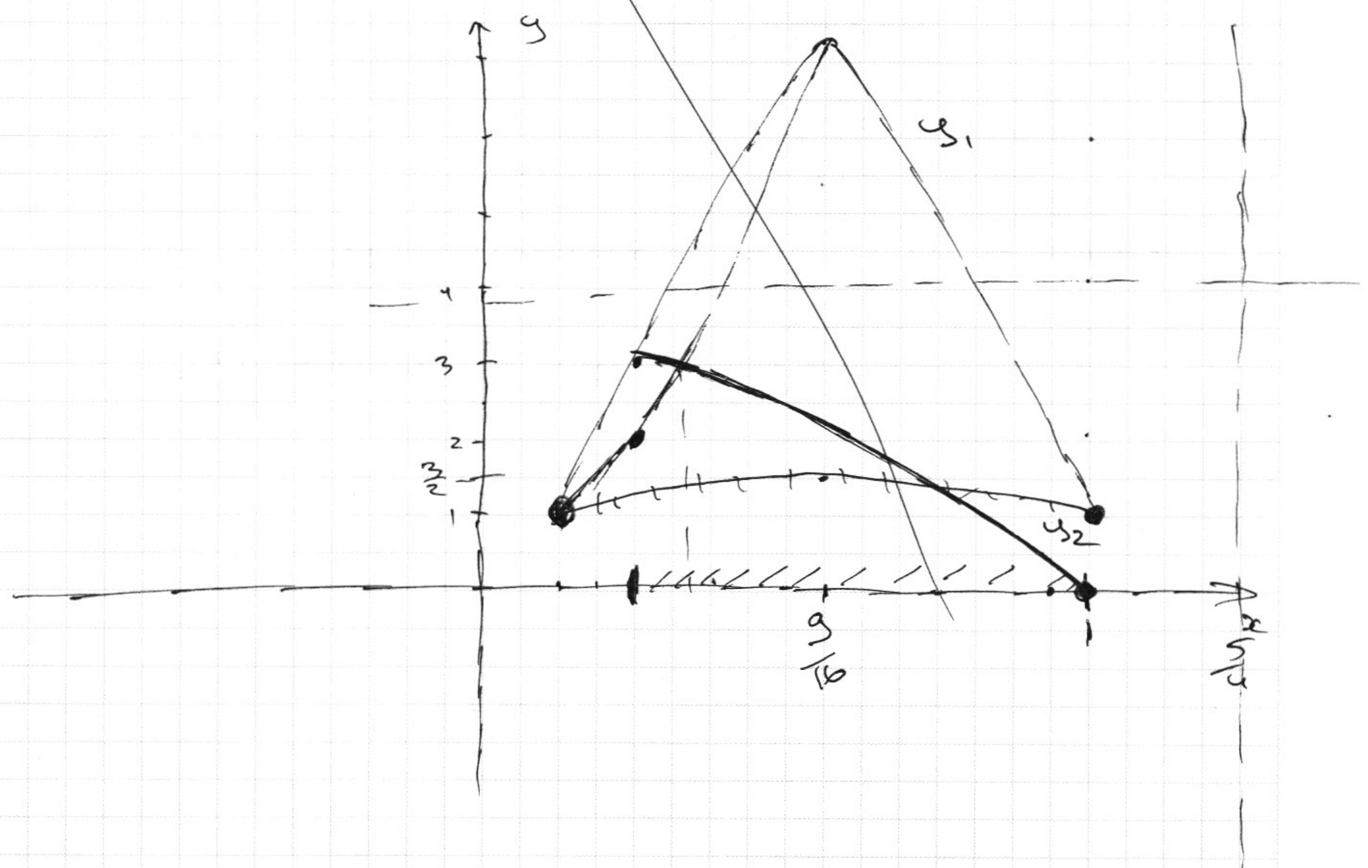
$$y_2=-32x^2+36x-3$$

$$x_B=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$$

$$y_B=-32\cdot\frac{81}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=-\frac{162+\cancel{180}+54}{16}-3=$$

$$=\frac{108+54-48}{16}=\frac{114}{16}=\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}$$

$$\cancel{=\frac{72-48}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}}$$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$a,b:\ \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ верно для всех x на $[\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

верно $x\in[\frac{1}{4};1]$ верно $x=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$\cancel{\frac{1}{4}x+b}$ $\quad 3 \le \frac{1}{4}a+b \le -\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3$

$3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

верно $x\in[\frac{1}{4};1]$ верно $x=1$

$0 \le a+b \le 4$

~~верно $x\in[\frac{1}{4};1]$ верно $x=\frac{9}{16}$~~

~~$4+\frac{4}{\frac{9}{4}-5} \le \frac{9}{16}a+b \le -32^2\frac{81}{16^2\,16}+36\cdot\frac{9}{16}-3$~~

~~$4+\frac{4\cdot4}{9-20} \le \frac{9}{16}a+b \le \frac{-162+270+54-48}{16}$~~

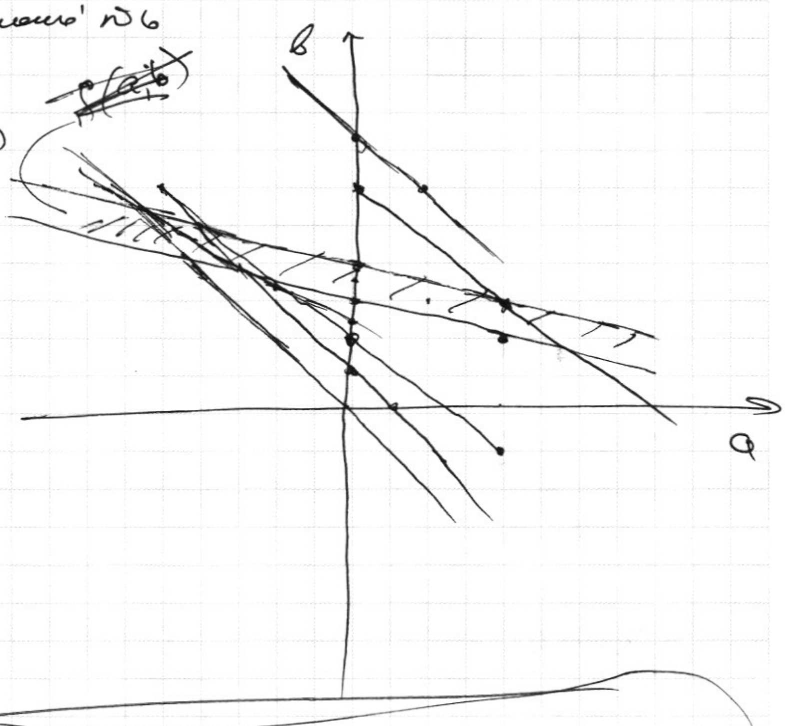
~~$4-\frac{16}{11} \le \frac{9}{16}a+b \le \frac{114}{16} = \frac{57}{8}$~~

~~$\frac{28}{11}$~~

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение №6

$$\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4 \ (1) \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases}$$



$f(a;b) = \frac{1}{4}a + b$

$g(a;b) = a + b$

1) $\frac{1}{4}a + b \ge 3$

$b \ge 3 - \frac{1}{4}a$

2) $\frac{1}{4}a + b \le 4$

$b \le 4 - \frac{1}{4}a$

3) $a + b \le 1$

$b \le 1 - a$

4) $a + b \ge 0$

$b \ge -a$

верно при $x \in [\frac{1}{4}; ...]$ верно если $x = \frac{3}{4}$

$2 \le \frac{3}{4}a + b \le -\cancel{32} \cdot \frac{9}{16} + 36 \cdot \frac{3}{4} - 3$

$-18 + 27 - 3 = 6.$

$2 \le \frac{3}{4}a + b \le 6$

$b \le 6 - \frac{3}{4}a$

$b \ge 2 - \frac{3}{4}a$

$\frac{28}{11} \le \frac{9}{16}a + b \le \frac{57}{8}$

$b \le \frac{57}{8} - \frac{9}{16}a$

$7\frac{1}{8}$

$a = 2 \quad b = \frac{57}{8} - \frac{9}{8} = \frac{48}{8} = 6.$

$\frac{9}{16}a + b \ge \frac{28}{11}$

$b \ge \frac{28}{11} - \frac{9}{16}a$

$2\frac{6}{11}$

~~$a = -1 \quad b = \frac{28}{11} - \frac{9}{16} =$~~

$a = -2 \quad b = \frac{28}{11} + \frac{9}{8} = \frac{160 + 64 + 99}{88} = \frac{323}{88} = 3\frac{59}{88}$

224 264 36 59

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 6

$$\begin{cases} b \geq 3-\frac{1}{4}a \\ b \leq 4-\frac{1}{4}a \\ b \geq -a \\ b \leq 1-a \\ b \leq 6-\frac{3}{4}a \\ b \geq 2-\frac{3}{4}a \end{cases}$$

$4-\frac{1}{4}a = 2-\frac{3}{4}a$

$2 = -\frac{1}{2}a$

$a = -4$

при $a > -4$

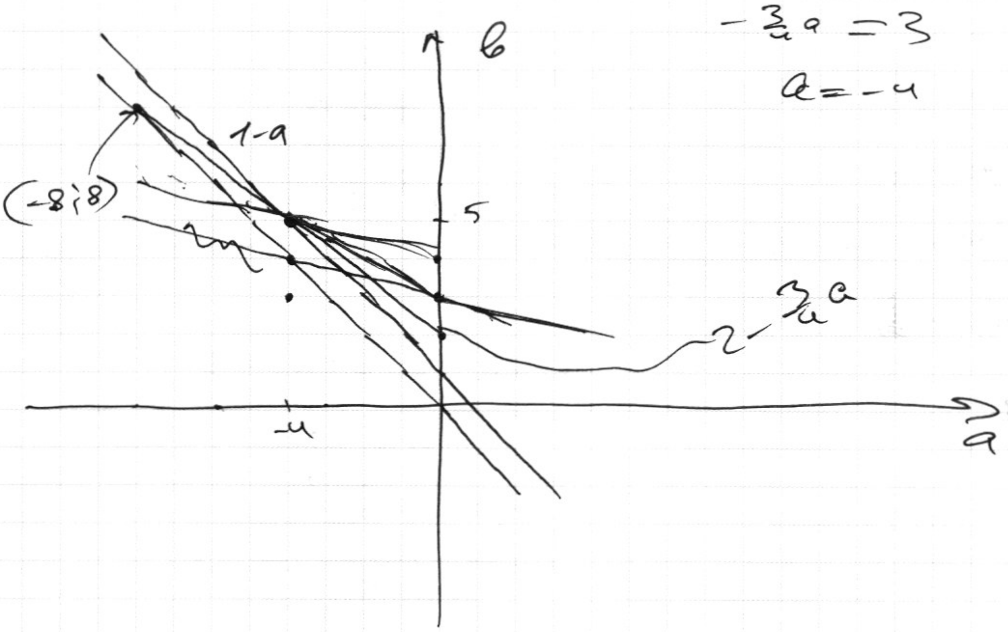
$\downarrow$

$2-\frac{3}{4}a > 4-\frac{1}{4}a$

$1-a = 4-\frac{1}{4}a$

$-\frac{3}{4}a = 3$

$a = -4$



$$\begin{cases} b \leq 4-\frac{1}{4}a \\ b \geq 2-\frac{3}{4}a \\ b \leq 1-a \end{cases}$$

$4-\frac{1}{4}a = 2-\frac{3}{4}a = 1-a$ в $a=-4$

при $a < -4$

$$\begin{cases} 1-a > 2-\frac{3}{4}a \\ 1-a > 4-\frac{1}{4}a \\ 2-\frac{3}{4}a > 4-\frac{1}{4}a \end{cases} \Rightarrow$$ ~~решение~~ Ко

Продолжение № 6.

$2-\frac{3}{4}a > 4-\frac{1}{4}a$, но $b \geq 2-\frac{3}{4}a$, а $b \leq 4-\frac{1}{4}a \Rightarrow$ нет решен.

$b > -4$, то $1-a < 2-\frac{3}{4}a$, но $b \leq 1-a$ и $b \geq 2-\frac{3}{4}a$ $\Big| \Rightarrow$ решения нет.

ед. реш. $\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$

Проверка

$$4+\frac{4}{4x-5} \leq -4x+5 \leq -32x^2+36x-3$$

$32x^2-40x+8 \leq 0$

~~$4x^2-10x+1$~~

$4x^2-5x+1 \leq 0$

$(x-1)(4x-1) \leq 0$

$\frac{1}{4} \leq x \leq 1$

$4x+\frac{4}{4x-5}-1 \leq 0$

$\frac{4+16x^2-20x-4x+5}{4x-5} \leq 0$

$\frac{16x^2-24x+9}{4x-5} \leq 0$

$\frac{(4x-3)^2}{4x-5} \leq 0$

$x < \frac{5}{4}$

$x \in [\frac{1}{4};1]$ подходит

при $\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$ условие выполняется

Ответ: $(-4;5)$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 14

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

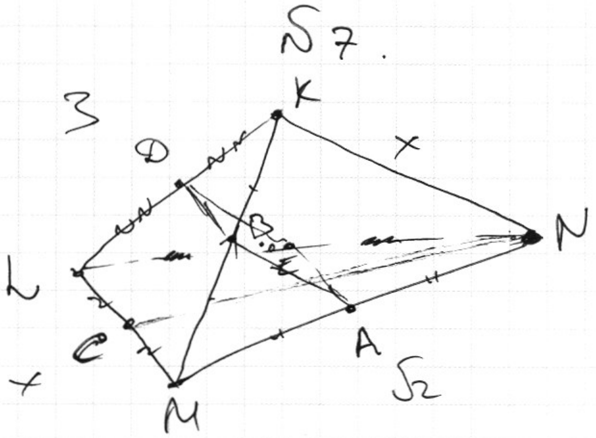
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



S – сфера

$N \in S$

A, B, C, D, E серед. сторон соответ. MN, KM, LM, LK, LN

$A, B, C, D, E \in S$.

$KL = 3$ $KM = 1$ $MN = \sqrt{2}$

$LM = ?$

1) AE – ср. лин. $\triangle NLM$, значит $AE \parallel LM$ $AE = \frac{1}{2} LM$.

2) BD – средн. лин. $\triangle LKM$, значит $BD = \frac{LM}{2}$ $BD \parallel LM$

из 1) и 2) получаем $AE = BD$ $AE \parallel BD$ значит $AEDB$ – п/г, значит $AB \parallel DE$.

3) Пусть $LM = x$, тогда $EA = DB = \frac{x}{2}$ по доказ.

4) ~~Если~~ Т.к. ABDE – п/г, то все точки лежат на одной пл-ти, но $A, B, D, E \in S$, то ABDE лежат на одной окружности, но ABDE – п/2, значит ABDE – квадрат. Значит $AB = BD = DE = EA = \frac{x}{2}$.

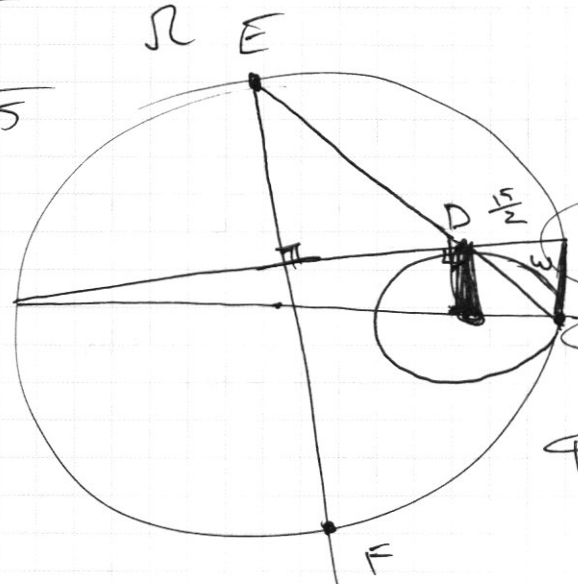
5) DE – ср. лин. $\triangle LKN$ значит $DE = \frac{KN}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow KN = x$

6) Если O – центр ABDE, то O_1 – центр S значит лежит на $O_1O \perp ABDE$.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 17 \\ \hline 105 \\ +\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$$

BD = $\frac{17}{2}$

r = ?



$r = \frac{15 \cdot 17}{28} = \frac{15 \cdot 17}{16}$

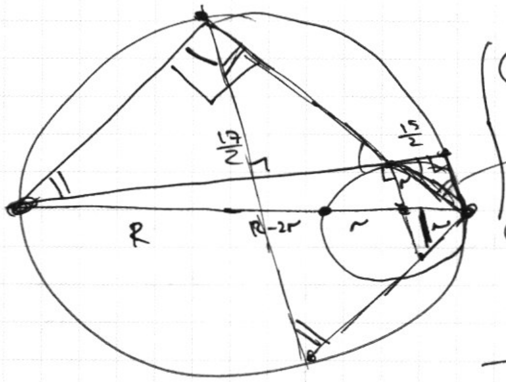
$R = 17$

$\frac{289}{4} = (2R - r)^2 - r^2 =$

$\frac{17}{2}$)

$\frac{289}{4} = \frac{32r}{15} \cdot \left(\frac{32r}{15} - 2r\right) = \frac{32r^2}{15} \cdot \frac{2}{15}$

$\frac{289}{4} = \frac{64r^2}{225}$ $\quad r^2 = \frac{225 \cdot 289}{4 \cdot 64}$



$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R - 2r) \cdot 2R =$

$\cancel{\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R - 2r)}^2 - r^2$

$\frac{289}{4} = 4R(R - r)$

$(2R - 3r)(2R - r)$

$\frac{r}{y} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}}$

$y = \frac{32r}{17}$ $\quad \frac{289}{16R}$

$2R - r$

$\frac{\frac{17}{2}}{\frac{15}{12}} = \frac{2R + r}{2R}$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}}$

$\frac{17}{15} = \frac{2R - r}{2R}$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$34R = 30R - 15r$

$15R = 16r$

$R = \frac{16r}{15}$

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x - x^2 \geq 5^{\log_3(10x - x^2)} - |10x - x^2|^{\log_3 4}$$

$$10x - x^2 = -(x-5)^2 + 25 \leq 25$$

л.ч. ≤ 25

л.ч. ≥ 0, т.к. $10x - x^2 > 0$ из $\log_3(10x - x^2)$

$$\log_3(10x - x^2) \leq \log_3 25$$

~~$5^{\log_3 25}$~~

$0 < t \leq 25$

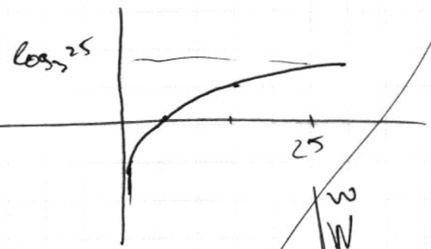
$$t \geq 5^{\log_3 t} - |t|^{\log_3 4}$$

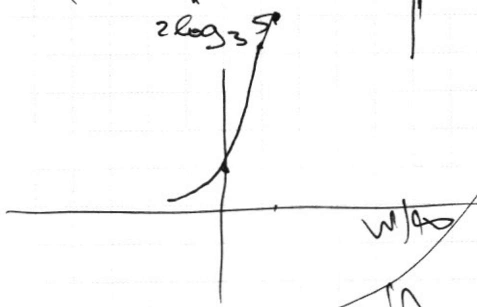
$$t + |t|^{\log_3 4} \leq 25 + 25^{\log_3 4}$$

~~$5^{\log_3 t}$~~

$\log_3 t \in (-\infty; \log_3 25]$

$2\log_3 5$





$a = -5$

$0 \leq a + b \leq 1$

$3 \leq \frac{1}{2}a + b \leq 4$

$2 \leq \frac{1}{4}a + b \leq 4$

$-2 \leq a - 3 \leq -1$

$0 \geq -a - b \geq -1$

$0 \leq -a \leq \frac{3}{10}$

$2 \leq -3a \leq 4$

$-2 \leq a - 3$

$f(ab) = f(a) \times f(b)$

$f(p) = [p/4]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 6.

$y_2 = -32x^2+36x-3$

$x=1 \quad y_2(1) = -32+36-3 = 1$

$y_2(1) = y_2\left(\frac{9}{16}-\left(1-\frac{9}{16}\right)\right) = y_2\left(\frac{2}{16}\right) = y_2\left(\frac{1}{8}\right)$

$x=\frac{1}{4} \quad y = -\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3 = 2$

$y_1 = 4+\dfrac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$x=1 \quad y_1(1) = \cancel{4+4=8} \; 4-4=0$

$x=\frac{1}{4} \quad y_1\left(\frac{1}{4}\right) = \cancel{4+\frac{1}{4}\ldots} \; 4-1=3$

Тогда прямые $ax+b$ на $\left[\frac{1}{4};1\right]$

Найдем точку пересеч. y_1 и y_2

$4+\dfrac{1}{x-\frac{5}{4}} = -32x^2+36x-3$

$4+\dfrac{4}{4x-5} = -32x^2+36x-3$

$\cancel{16x} \quad 4 = (-32x^2+36x)(4x-5)-7(4x-5)$

$4 = -128x^3+160x^2+144x^2-180x-28x+35$

$-128x^3+304x^2-238x-39=0$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Подставим (4) в (3) $\left(\frac{9(3b^2+10)}{13b}\right)^2 + 9b^2 = 90$

Пусть $b^2 = t$ $t \geq 0$, тогда:

$\left(\frac{9(3t+10)}{13}\right)^2 \cdot \frac{1}{t} + 9t = 90$

$\frac{9(9t^2+100+60t)}{13t} + t = 10 \quad | \cdot \cancel{13}t \quad t \neq 0$

$81t^2 + 900 + 540t + 13t^2 - 130t = 0$

$94t^2 + 410t + 900 = 0$

$47t^2 + 205t + 450 = 0$

$D = 205^2 - 4 \cdot 47 \cdot 450 = 5^2(41^2 - 4 \cdot \underbrace{47 \cdot 18}_{=72}) < 0$

$41 \cdot 41$: 41, 164, 1681

72×47: 504, 288, 3384

Таких t нет, значит таких b^2 нет, значит таких a и b нет, значит таких x, y нет, которые удовлетворяют данной системе.

Ответ: $\varnothing$.

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = y$

$(3^y)^{\log_3 4} = 4^y \qquad 5^y \qquad t = 3^y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1)\\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2)\end{cases}$$

(1): $x-12y=\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)}$

$x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

(2): $x^2-12x+36y^2-36y=45$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

Пусть $x-6=a$ $2y-1=b$

Тогда $x-12y=a-6b$, а $\sqrt{(x-6)(2y-1)}=\sqrt{ab}$

Тогда:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}\\ a^2+9b^2=90 \ (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 6b\\ a^2+36b^2-12ab=ab\\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq 6b\\ 27b^2+90-13ab=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 6b\\ 9(3b^2+10)=13ab\end{cases} \quad \begin{cases} a\geq 6b\\ a=\dfrac{9(3b^2+10)}{13b} \ (4)\end{cases}$$

($b=0$ не решение т.к. тогда $90=0$ $\varnothing$)

$25t^2-129t+90=0$

$D=129^2-100\cdot 90$

$\frac{7641}{9}=\frac{849}{3}=283$

$3\sqrt{283\cdot 3}$

$$\begin{array}{r} 129 \\ \times 129 \\ \hline 1161 \\ 258 \\ 129 \\ \hline 16641 \\ -9000 \\ \hline 7641 \end{array}$$

9000

$(x-6)^2+3(2y-1)^2=90$

$a^2+3b^2=90$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\frac{13b+5b}{2}=9b$

$a=\frac{13b-5b}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$a \geq 6b \quad ab \geq 0$

$$a^2=90-9b^2$$

$$a^2+36b^2-12ab=ab$$

$$90-9b^2+36b^2-13ab=0$$

$$90+27b^2=13ab$$

$$a=\frac{90+27b^2}{13b}=\frac{9(10+3b^2)}{13b}$$

$$\frac{90+27b^2-78b^2}{13b}=\sqrt{\frac{90+27b^2}{13}}$$

$\frac{1760}{1160}$

$$\frac{90-51b^2}{13b}=\sqrt{\frac{90+27b^2}{13}}$$

$$\frac{(90-51(b^2))^2}{13b^2}=90+27b^2$$

$b^2=t$

$$\frac{\cancel{9}(30-17b^2)^2}{13b^2}=\cancel{9}\overset{10}{\cancel{0}}+\overset{3}{\cancel{27}}b^2$$

$$\frac{(30-17t)^2}{13t}=10+3t$$

$$30^2+289t^2-1160t=130t+39t^2$$

$$250t^2-1290t+30^2=0$$

$$25t^2-129t+90=0$$

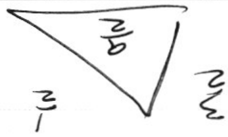
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

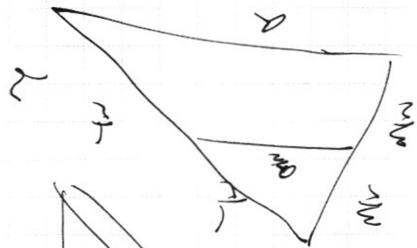
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

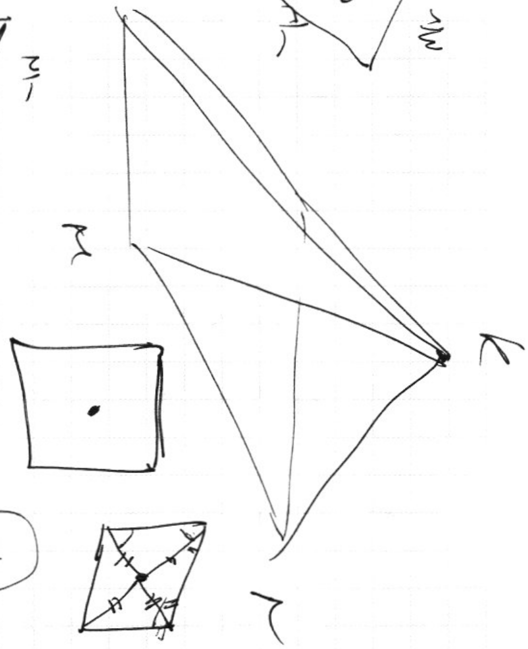
$tg\,\alpha = ?$



$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta}$

$$\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

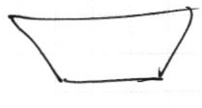


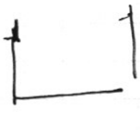
$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$





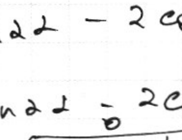
$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \to 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$2tg\alpha - 1 + 3tg^2\alpha = 0$

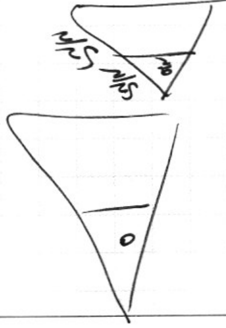
$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

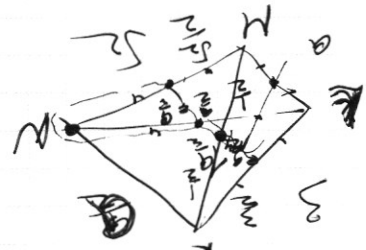
$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 0$ $/ : \cos^2 2\alpha$



$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$





☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad / : \cos^2\alpha$

$-\sin^2\alpha$

$3\cos^2\alpha$

$-tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

$x - 6 = a$

$2y - 1 = b \quad -6b = -12y + 6$

$a - 6b =$

$= x - 6 - 12y + 6 = x - 1$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \quad a \geq 6b$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} ab = a^2 - 12ab + 36b^2 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$x - 12y = \sqrt{x(2y-1) - 6(2y-1)}$

$\cancel{ab}$

$x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$90 - 9b^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$\cancel{(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 0}$ $\quad -12y + 6$

$\cancel{x = 6 \quad y = \frac{1}{2}}$

$x - 6 \quad b = 0$ не подходит

$13ab = 27b^2 + 90$

$\frac{a^2 + 9b^2}{2} \geq 3\sqrt{ab}$

$a^2 + 9b \geq 6\sqrt{ab}$

$90 = a^2 + 9b^2 \geq 6a - 36b$

$30 \geq 2a - 12b$

$15 \geq a - 6b$

$a \leq 15 + 6b$

$\cancel{a \geq 6b}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)