МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; & (1) \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}; & (2). \end{cases}$$

(2) : $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5};$

$$2 \sin \frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2} = -\frac{4}{5};$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5};$$

Подставим $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{4}{5}; \quad | \cdot (-1) : 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = \frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

По ОТТ $\sin 2\beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 5}{25}} =$

$= \pm \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$

(1) : $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}};$

1) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}:$

$$+\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad | \cdot \sqrt{5}$$

$$2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1; \quad | : \sqrt{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

① : $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \cancel{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi n = \cancel{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi k \\ 2\alpha + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$k, n \in \mathbb{Z}$.

или

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$k, n \in \mathbb{Z}$.

тогда $$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi(k-n) = 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}. \\ 2\alpha = \pi - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \cancel{2\pi(k-n)} \; 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\pi + 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi t \\ 2\alpha = 2\pi t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{Z}.$$

тогда

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi t \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi t \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2) если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + \cancel{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi n = \pi + \cancel{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi k \\ 2\alpha + \pi - \cancel{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi n = -\cancel{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi k \\ 2\alpha + \cancel{\pi} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = \cancel{\pi} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$k, n \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi t, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi t \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \pi t \\ \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + \pi t$ – не подх., т.к. тогда $\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha$ не определен.

1) $\alpha = \pi t$.

$\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $tg\,\alpha = 0$.

2) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) =$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$tg\,\alpha = \frac{2 \cdot \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}} \cdot (-1)} = -2$.

3) $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin\alpha = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$tg\,\alpha = 2$.

4) $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad tg\,\alpha = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

$\cos\alpha = \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5) $\alpha = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

Ответ: $0;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm 2.$

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}; \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена $x-2=a$

$y-1=b$

тогда $x-2y = (x-2)-(2y-2) = a-2b.$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \quad |\wedge 2 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a-2b \geq 0 \\ a \geq 2b \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (2) \end{cases}$$

(1) $a^2-5ab+4b^2 = (a-b)(a-4b)=0;$

$a=b$ или $a=4b.$

1) $a=b$:

(2): $10b^2=25;$

$b = \pm\sqrt{\frac{25}{10}} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(a,b) = \left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ — не подходит под условие $a \geq 2b.$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

2) $a=4b$:

$25b^2=25$;

$b=\pm 1$

$a=\pm 4$

$b=-1$, $a=-4$ – не подходит.

вернемся к замене.

1) $x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

$y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

2) $x-2=4$; $x=6$

$y-1=1$; $y=2$.

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$; $(6;2)$

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$;

ОДЗ: $x^2+18x>0$;

$x(x+18)>0$;

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$.

Замена $x^2+18x=t>0$.

тогда $|x^2+18x|=x^2+18x$.

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$;

~~№6~~

~~$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$;~~

$\log_{12} t = z$

$5^z + 12^z \ge 13^z$;

Заметим, что слева и справа возрастающие ф-ии, причём при $z = 2$

$5^2 + 12^2 = 13^2$. Тогда $z \le 2$ – решение.

$\log_{12} t \le 2$;

$t \le 144$;

$x^2 + 18x \le 144$;

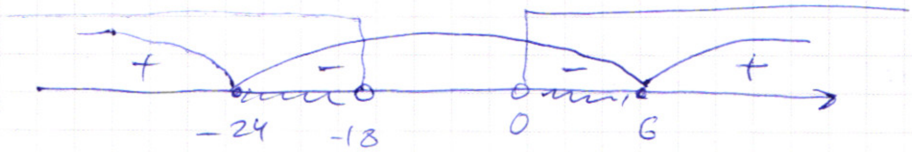
$x^2 + 18x - 144 \le 0$;

$D_1 = 81 + 144 = 225$

$x_1 = -9 - 15 = -24$

$x_2 = -9 + 15 = 6$

с учётом ОДЗ:



Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

№6.

$$\underbrace{3 + \frac{2}{4x+3}}_{f(x)} \le ax + b \le \underbrace{-8x^2 - 30x - 17}_{g(x)}$$

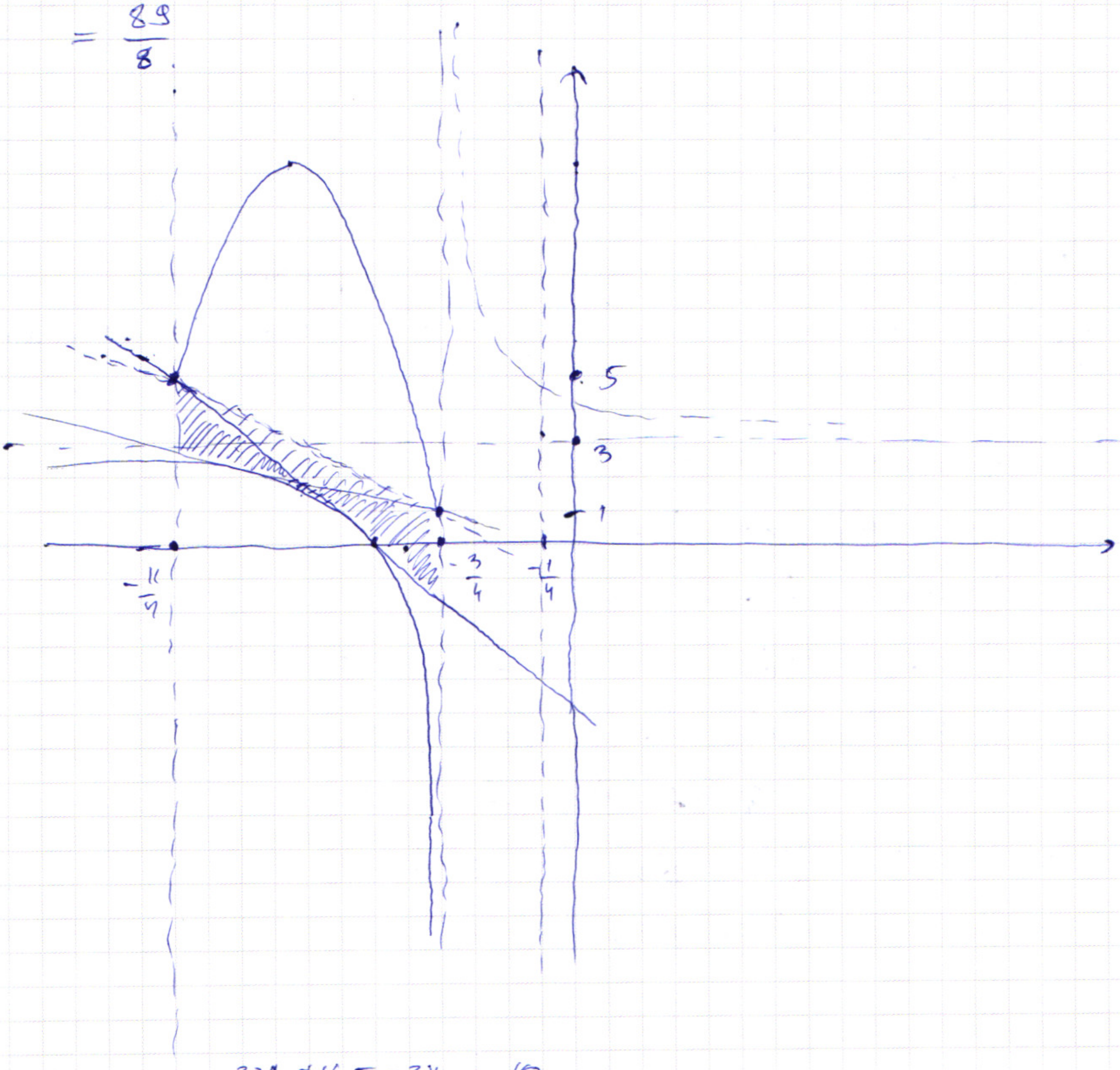
$f(x)$ – гипербола, асимптоты – $x = -\frac{3}{4}$;

$y = 3$.

$g(x)$ – парабола, ветви вниз, $x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g\left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8\cdot 225}{8\cdot 8} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = \frac{-225+450-136}{8} = \frac{89}{8}.$$



$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-121+165-34}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$g\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$$

тогда под исходные условия подойдут все a, b при которых прямая лежит в выделенной области.

верхняя граница области – прямая, прохо-
дящая через $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ и $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$;

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}a + b = 1 \\ -\frac{11}{4}a + b = 5 \end{cases} -$$

$-2a = 4$;

$a = -2$;

$\frac{3}{2} + b = 1$;

$b = -0,5.$

т.е. $y = -2x - 0,5.$

Найдём касательную к $f(x)$, угловой коэф. которой $= -2$.

$-2x + b = \frac{12x + 11}{4x + 3}$;

$(-2x + b)(4x + 3) = 12x + 11$;

$-8x^2 + 4bx - 6x + 3b - 12x - 11 = 0$;

$-8x^2 + 4bx - 18x + 3b - 11 = 0$;

$8x^2 - 4bx + 18x - 3b + 11 = 0$;

$8x^2 - 2x(2b - 9) + 3b + 11 = 0$;

$D_1 = 4b^2 - 36b + 81 - 24b - 88 = 0$;

$4b^2 - 60b - 7 = 0$;

$D_1 = 900 + 28 = 928$;

$b_1 = \frac{30 - \sqrt{928}}{2} = \frac{30 - 2\sqrt{232}}{2} = 15 - \sqrt{232}$

$b_2 = 15 + \sqrt{232}$ – при этом „b" прямая $-2x + b$ верхней части гиперболы $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не подх. Зн., $b = 15 - \sqrt{232}$, $y = -2x + 15 - \sqrt{232}$ –
– нижняя граница. ~~Зн, все прямые, где~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

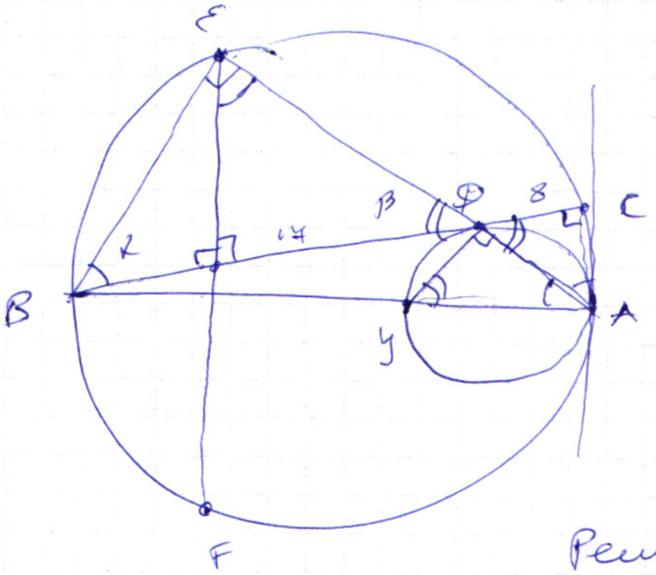
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~a = -2~~, ~~a в E~~ Не №4.



Решение.

1) $\triangle BEФ \sim \triangle ACФ$ по 2 углам.

2) из $\triangle BEФ$: $EФ = 17 \sin\alpha$;

из $\triangle ACФ$: $AФ = \dfrac{8}{\sin\alpha}$;

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$(R_1-R_2)\cdot(R_1+R_2)=17^2$

$25+144$

$5^2+12^2=13^2$

$5^2+12^2=13^2$

$4\alpha=180^\circ;$

$\alpha=45^\circ.$

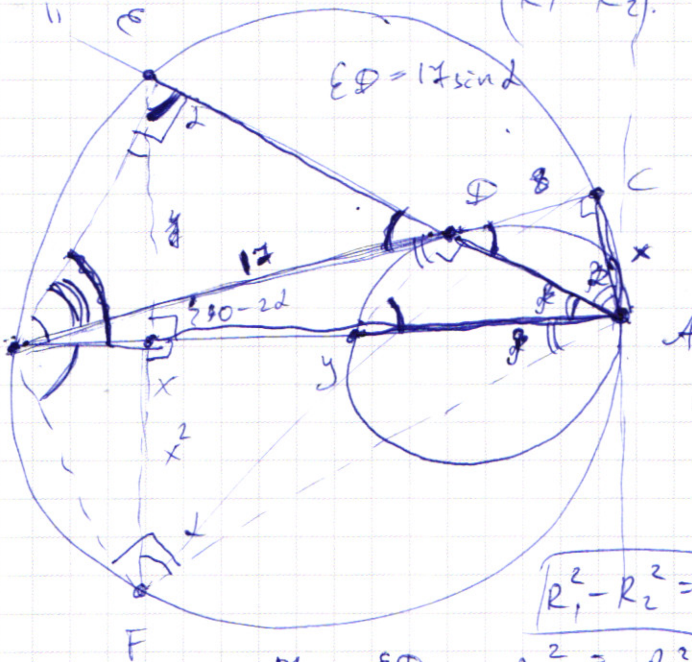
$BY=\frac{17^2}{YA};$

$ED=17\sin\alpha$

$125+$

$25\cdot$

$169\cdot 13.$



$BY\cdot YA=17^2$

$(BY+YA)^2=25^2+x^2;$

$CD=8$

$AD\cdot DE=$
$=17\cdot 8\cdot BD\ 17$

$6^3\cdot 2^3=$
$=216\cdot 8=$
$=1600+$
$+128=$
$=1728$

$BX\cdot XA=y^2;$

$\boxed{R_1^2-R_2^2=17^2}$

$f(a)+f(b)$

$AD\cdot DE=8\cdot 17.$

$-\frac{8\cdot 9}{162}=-\frac{9}{2}+\frac{\overset{15}{\cancel{36}}\cdot 3}{42}=-\frac{9+45-34}{2}=$

$\frac{17}{r}=\frac{ED}{EB}$

$R_2^2=R_1^2-17^2$

$BY\cdot BA=17^2$

$\frac{AD}{DE}$

$f(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=$
$=0.$

$(R_1-R_2)(R_1+R_2)=17$

$\frac{8}{ED}=\frac{AD}{17};$

$R_1^2=17^2+R_2^2$

$5^2+12^2=13^2.$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13};$

$(-\alpha$

$f(6)=f(3)+f(3)=$
$=\left[\frac{3}{4}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]=$
$=0+0=0.$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geq 13^{\log_{12}t};$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}$

$(17)^2\geq 13^2.$

$-\frac{8\cdot 121}{162}=-\frac{121}{2}+\frac{\overset{15}{\cancel{36}}\cdot 11}{42}=\frac{-121+165-34}{2}=$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=$
$=0\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=$
$=0.$

$5-\sqrt{232}\ \vee\ \frac{1}{2};$

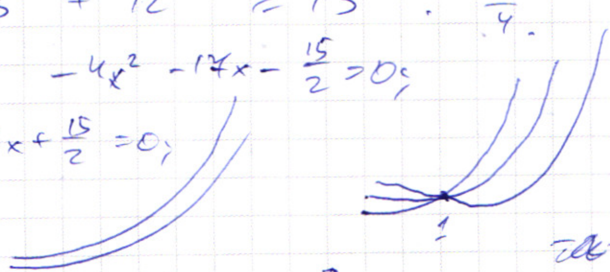
$5^2+12^2\geq 13^2.$

$\frac{17}{4}.$

$-4x^2-17x-\frac{15}{2}=0;$

$4x^2+17x+\frac{15}{2}=0;$

$2x+$



$-2x-\frac{1}{2}=\frac{12x+11}{4x+3};$

$-\left(x+\frac{1}{2}\right)(4x+3)=12x+11;$

$-4x^2-5x+\frac{3}{2}=12x+11;$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5+ \qquad 13^2 \geq$

$3 + \frac{2}{4x+3} \geq ax + b \geq -(8x^2 + 30x + 17)$

$5^2 + 12^2 \geq 13^2$

$5^2 \qquad 5 + 12 \geq 13$

$z \leq 1$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13}$

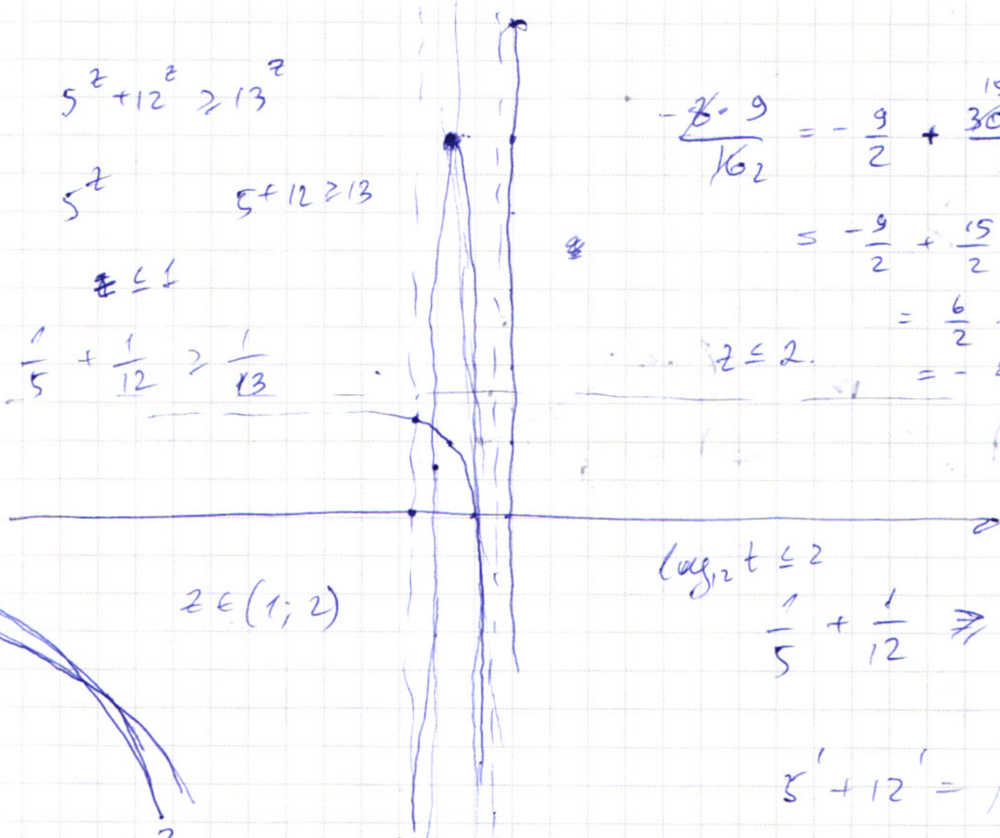
$-\frac{8 \cdot 9}{16_2} = -\frac{9}{2} + \frac{30 \cdot 3}{4_2} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{15}{2} - \frac{34}{2} =$

$= \frac{6}{2} - \frac{34}{2} =$

$= -\frac{28}{2} = -14$

$z \leq 2.$



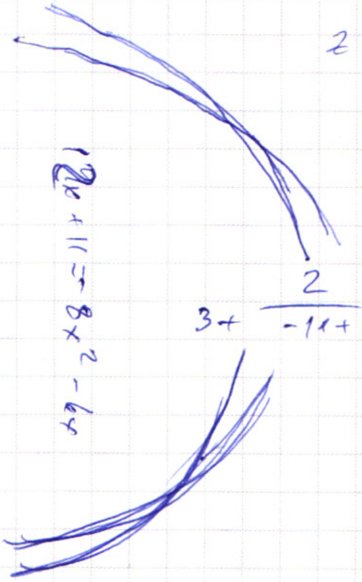
$z \in (1; 2)$

$\log_{12} t \leq 2$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13};$

$5' + 12' = 13'.$

$5 + 12 = 13.$



$3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{8} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

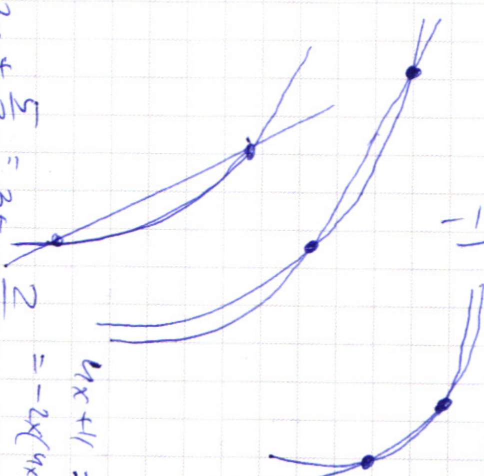
$\frac{-30}{16} = -\frac{15}{8}. \qquad -\frac{6}{4} + b = 1;$

$f\left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8 \cdot 225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} + 17 \qquad -\frac{3}{2} + b = 1;$

$= -\frac{450}{4} + \frac{225}{4} + \frac{17 \cdot 4}{4} = \qquad b = 1 + 1{,}5 = \frac{5}{2}$

$= -\frac{225 + 68}{4} = -\frac{157}{4}.$

$\frac{-11+3}{4} a = 4; \quad -217 + 60 = \frac{-157}{4}$



$-2a = 4;$

$\boxed{a = -2}$

$17 \cdot 8 = 136$

$-2x + \frac{5}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3};$

$-\frac{3}{4} a + b = 1$

$-\frac{4}{4} a + b = 5$

$-361 + 450$

$-2x = \frac{1}{2} + \frac{2}{4x+3};$

$-2x(4x+3) = 2x + \frac{3}{2} + 2;$

$-8x^2 - 6x = 2x + \frac{7}{2};$

$-8x^2 - 8x - \frac{7}{2} = 0;$

$8x^2 + 8x + \frac{7}{2} = 0;$

$12x + 11 = -8x^2 - 6x$

$-2x + \frac{5}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3};$

$-2x(4x+3) + \frac{5}{2}(4x+3) = \ldots$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

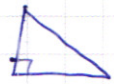
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$;

$|t|^{\log_{12} 13} - t = t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1) \leq 5^{\log_{12} t}$;

$t^{\log_{12} 5} + t$

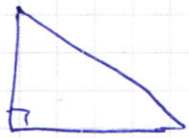
$5^2 + 12^2 = 13^2$



$t^{\log_{12} 5} + t^1 \geq t^{\log_{12} 13}$

$t(t^{\log_{12} 5 - 1} + 1 - \cancel{t}^{\log_{12} 13 - 1}) \geq 0$;

$t^{\log_{12} 5} \vee t^{\log_{12} 13}$



$t^{\log_{12} 5 - 1} - t^{\log_{12} 13 - 1} \vee 1$;

$t^{\log_{12} 13 - 1} \vee 0$;

$t^{\log_{12} \frac{13}{12}} > 0$.

$\log_{12} t = z$

$12^z = t$

$5^z + 12^z \geq 13^z$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$-\log_{12} \frac{12}{5}$.

$5^2 + 12^2 = 13^2$.

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$;

$5^3 + 12^3 =$

$a = 5^{\log_5 12}$

$= \ln 13 \cdot 13^2$

$t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5}$;

$f' = \ln \log_{12} 13 \cdot t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}.$

$5^z + 12^z \geq 13^z.$

$\ln 5 \cdot 5^z + \ln 12 \cdot 12^z \vee \ln 13 \cdot 13^z$ при $z \geq 2.$

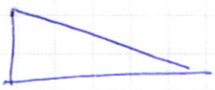
$5^z < (6,5)^z$

12^z

$2 \cdot 12^z \vee 13^z$

$\frac{AD}{R}$ $13^z = \cancel{(5+12)^z}.$

$a^x + b^x \vee$



$\frac{8}{x} = \frac{AD}{yA}.$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17;$

$$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ \underline{12x+9} & 3 \\ 2 & \end{array}$$

$\frac{AD}{17} = \frac{8}{ED}.$

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq$

$8x^2 + 30x + 17 =$

$2\sqrt{8}\, x = 30;$

$x = \frac{15}{\sqrt{8}}$ $x_B = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}.$

$\cancel{\frac{8}{17 \sin\alpha}} =$

$= \cancel{\frac{8}{\sin 2 \cdot 17}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{2\alpha+2\beta+2\alpha+4\beta}{2} = 2\alpha+3\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$;

$\frac{\cancel{2\alpha}+4\beta-\cancel{2\alpha}-2\beta}{2} = \beta$

$\boxed{\sin(2\alpha+2\beta)} + \boxed{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha} = -\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}$;

$2(\sin2\alpha\cos3\beta+\cos2\alpha\sin3\beta)\cos\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta + \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}$;

$0 < t = x^2+18x$

$2\sin \qquad \sin2\beta =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{4}{5}$;

$\gamma = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = 2\beta$.

$\sqrt5$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{4}{5}$;

$\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = \frac{4}{5}$;

$\frac{4\cdot5}{25} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$.

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$;

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\alpha + 2\beta =$

$2\alpha + 2\pi n = 2\pi k;$

$2\alpha = 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pi t$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin$

$9(y^2 - 2y + 1) - 9$

$x^2 - 4x + 4 - 4$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2};$

$9(y-1)^2 + (x-2)^2 = 12;$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12;$

$y - 1 = a$

$x - 2 = b$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0;$

$D_1 = 4 - 1 \cdot (9y^2 - 18y - 12) = 4 - 9y^2 + 18y + 12 =$

$= -9y^2 + 18y + 16 =$

$2a - b$

$3 \cdot 4.$

$(3y +$

$-a \geq -2a;$

$-4 \geq -2$

$a \leq 2a$ при $a > 0.$

$(x-2)(y-1) = xy - 2y + 2 - x$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 2y + 2 - x;$

$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0;$

$(a - b)(a - 4b) = 0$

$\sqrt{\frac{25}{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq -2\sqrt{\frac{5}{2}}.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

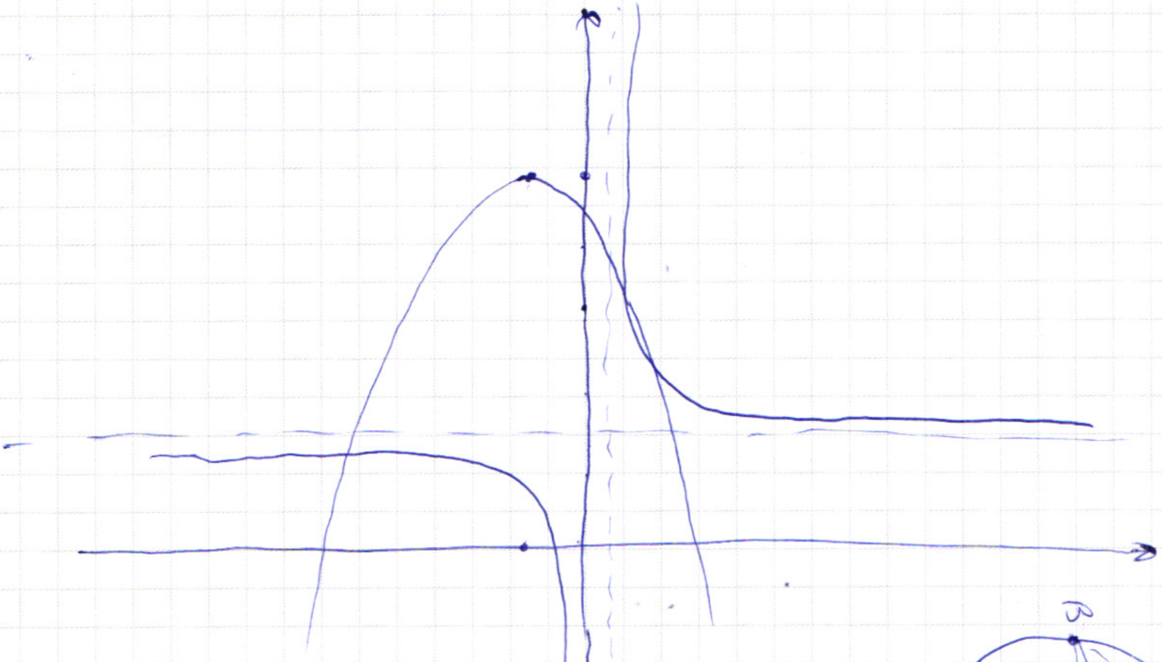
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

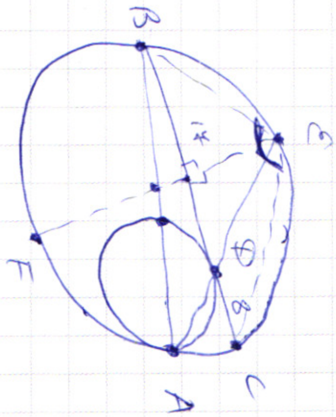
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$5^z + 12^z \geq 13^z$

$5^z \cdot \ln 5 + 12^z \cdot \ln 12$

$\vee \ln 13 \cdot 13^z$

$5^z + 12^z$ $\quad \frac{30}{\cancel{16}} = -\frac{15}{\cancel{16}} = -\frac{15}{8}$

136

$-\frac{\cancel{8} \cdot 225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 =$ $\quad 2x + \frac{3}{2}$

$125 - 36 = 89$, $\quad = -\frac{\cancel{8} \cdot 225}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 =$

$= -$ [illegible] $+ \frac{-225 + 450}{8} - 17 =$

$3 + \frac{2}{4x+3}$

$= \frac{225}{8} - \frac{17 \cdot 8}{8} = \frac{89}{9}$

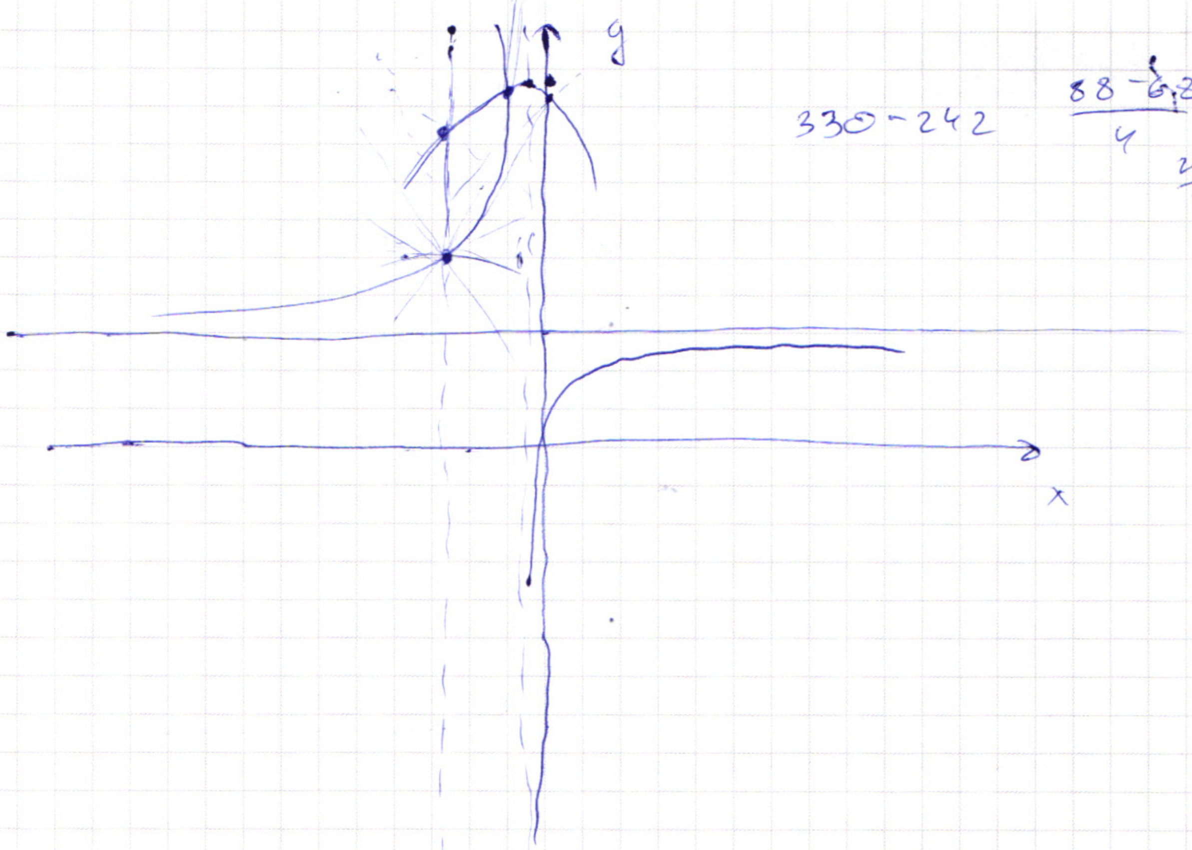
$3 + \frac{2}{4(x + \frac{3}{4})} =$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

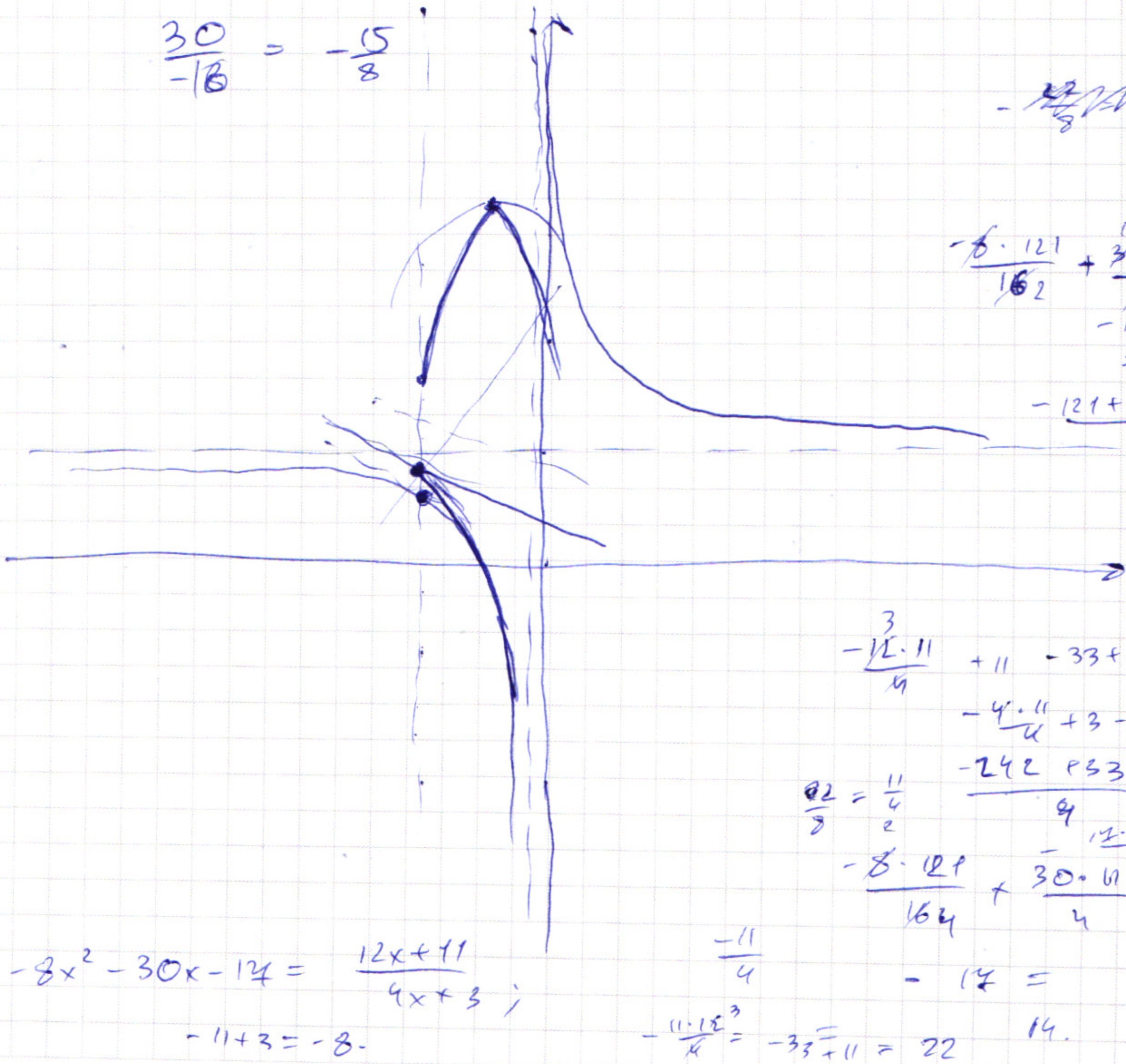


$330 - 242$

$\frac{88 - 6\cdot 3}{4} =$

$\frac{20}{4} = 5$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$



$-\frac{8\cdot 121}{16_2} + \frac{\overset{15}{30}\cdot 11}{4_2} - 17 =$

$= \frac{-121 + 165 - 34}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

$-\frac{\overset{3}{12}\cdot 11}{4} + 11 \quad -33 + 11 = -22$

$-\frac{4\cdot 11}{4} + 3 \quad -11 + 3 = -8$

$\frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

$\frac{-242 + 330}{4} -$

$-\frac{8\cdot 121}{16_4} + \frac{30\cdot 11}{4} - \frac{11}{4} - 17 = 14.$

$-8x^2 - 30x - 17 = \frac{12x + 11}{4x + 3};$

$-11 + 3 = -8.$

$-\frac{11\cdot 12^3}{4} = -33 + 11 = 22$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)