МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Преобразуем второе уравнение:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{1}{5}.$

Подставим $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$: $-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$

$\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Из первого уравнения получаем: $\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Если $\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, то получаем: $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1 \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha-3\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=0.$

$\cos\alpha\neq 0$, т.к. в противном случае из этого ур-ния следует $\sin\alpha=0$, чего не может быть. Поэтому можно разделить на $\cos^2\alpha$.

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0 \Leftrightarrow (tg\alpha+1)(tg\alpha-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=3. \end{array}\right.$

Если $\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, то получаем: $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos 2\alpha\cdot(-\frac{2}{\sqrt{5}})=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=-1 \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0.$

$\cos\alpha\neq 0$, т.к. иначе $\sin\alpha=0$, чего не может быть. Разделим обе части ур-ния на $\cos^2\alpha\neq 0$.

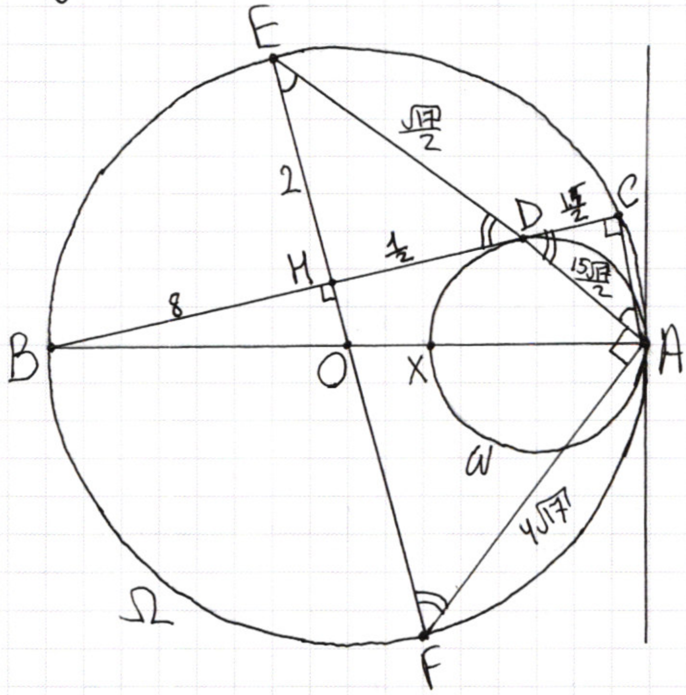
$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0 \Leftrightarrow (tg\alpha+1)(3tg\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Итак, $tg\alpha$ может принимать только значения -1; 3; $\frac{1}{3}$. Так как сказано, что знач. не менее трёх, то все они принимаются.

Ответ: -1; 3; $\frac{1}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 4.



Окружности Ω и ω кас. внутр. образом в точке A, окр. ω кас. хорды BC окр-ти Ω в точке D $\Rightarrow$ по лемме Архимеда E — середина дуги BC.

$\begin{cases} EF \perp BC \\ E\text{-сер. дуги } BC \end{cases} \Rightarrow EF$ — серединный перпендикуляр к BC $\Rightarrow EF$ — диаметр окр-ти Ω $\Rightarrow$ центр O окр-ти Ω лежит на перес. AB и EF. $\angle EAF = 90°$, т.к. опирается на диаметр. $BC = BD + DC = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = 16 \Rightarrow BH = CH = \frac{1}{2}BC = 8$. $HD = BD - BH = \frac{17}{2} - 8 = \frac{1}{2}$. $\angle HDE = \angle ADC$ как вертикальные $\Rightarrow \Delta HDE \sim \Delta CDA$ по двум углам $\Rightarrow \angle HED = \angle CAD$. $\Delta AFE \sim \Delta CDA$ по двум углам $\Rightarrow \angle AFE = \angle ADC$. По свойству перес. хорд $AD \cdot DE = BD \cdot DC = \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2}$. Из подобия ΔHDE и ΔCDA: $\frac{AD}{DE} = \frac{HD}{DC} = \frac{1/2}{15/2} = \frac{1}{15}$. Из этих соотношений находим: $AD^2 = \frac{17}{4}$; $\boxed{AD = \frac{\sqrt{17}}{2}}$, $\boxed{DE = \frac{15\sqrt{17}}{2}}$. $\cos\angle ADC = \frac{DC}{DA} = \frac{15/2}{15\sqrt{17}/2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\angle AFE = \angle ADC = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$. По теор. Пифагора для ΔEHD: $EH = \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$. Из подобия ΔAEF и $\Delta HED \Rightarrow \frac{AE}{EH} = \frac{AF}{HD}$; $\frac{8\sqrt{17}}{2} = \frac{AF}{1/2}$; $\boxed{AF = 4\sqrt{17}}$. По теор. Пифагора для ΔAEF: $EF = \sqrt{(8\sqrt{17})^2 + (4\sqrt{17})^2} = \sqrt{80 \cdot 17} = 4\sqrt{85}$; $R = \frac{EF}{2} = 2\sqrt{85}$ — радиус Ω. $S_{AFE} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{17} \cdot 4\sqrt{17} = 16 \cdot 17 = 272$. Пусть $BA \cap \omega = X$. По теор. о касат. и секущей:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BD^2 = BX\cdot BA$; $\left(\frac{17}{2}\right)^2 = BX\cdot 4\sqrt{85}$; $BX = \frac{17^2}{16\sqrt{5\cdot 17}} = \frac{17\sqrt{17}}{16\sqrt{5}}$. $XA = BA - BX =$
$= 2\sqrt{85} - \frac{17\sqrt{17}}{16\sqrt{5}} = 2\sqrt{85} - \frac{17\sqrt{85}}{80} = \frac{143}{80}\sqrt{85} \Rightarrow r = \frac{XA}{2} = \frac{143}{160}\sqrt{85}$ – радиус ω.

Ответ: $R = 2\sqrt{85}$; $r = \frac{143}{160}\sqrt{85}$; $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $S_{AFE} = 272$.

Задача 2.

Сделаем замену $\begin{cases} x-6=a \\ 2y-1=b. \end{cases}$ Тогда $2xy - 12y - x + 6 =$
$= 2y(x-6) - (x-6) = (2y-1)(x-6) = ab$; $x = a+6$; $2y = b+1$;
$12y = 6b+6$; $x - 12y = a + 6 - 6b - 6 = a - 6b$.

$a^2 = x^2 - 12x + 36$, $9b^2 = 36y^2 - 36y + 9$, поэтому система примет вид.

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geq 0. \end{cases}$$

Если $a=9b$, то $(9b)^2+9b^2=90$; $90b^2=90$; $\left[\begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=9 \\ b=-1 \Rightarrow a=-9 \end{array}\right.$
$a=9, b=1$ подходит, т.к. $9-6\geq 0$; $a=-9, b=-1$ – не подх., т.к. $-9+6<0$. Если $a=4b$, то $(4b)^2+9b^2=90$; $45b^2=90$.
$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{2} \Rightarrow a=4\sqrt{2} \\ b=-\sqrt{2} \Rightarrow a=-4\sqrt{2} \end{array}\right.$ $a=4\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$ не подх., т.к. $4\sqrt{2}-6\sqrt{2}<0$.

$a=-4\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$ – подх., т.к. $-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}\geq 0$. В итоге получаем два решения: $(a=9, b=1)$ и $(a=-4\sqrt{2}, b=-\sqrt{2})$. Вернёмся к замене.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-4\sqrt{2} \\ 2y-1=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-4\sqrt{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(15;1)$; $\left(6-4\sqrt{2}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задача 3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $\begin{cases}|x^2-10x|>0\\ 10x-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 10\\ x(x-10)<0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x\in(0;10)}$

Будем выполнять равносильные на ОДЗ преобразования. Так как $x^2-10x<0$, то $|x^2-10x|=10x-x^2$.

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)\leq 0.$$

Так как $10x-x^2>0$, то можно разделить на $10x-x^2$:

$$(10x-x^2)^{\log_3 5-1}-(10x-x^2)^{\log_3 4-1}-1\leq 0.$$

$$(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}-1\leq 0$$

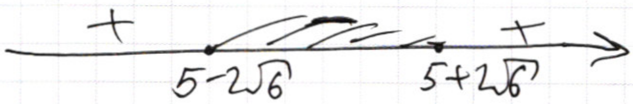
$$(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}\left((10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}-\log_3\frac{4}{3}}-1\right)-1\leq 0$$

$$(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{4}}-1\leq 0;\quad (10x-x^2)^{\log_3\left(\frac{5}{4}\right)}\leq(10x-x^2)^1$$

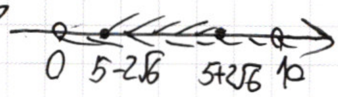
По методу рационализации: $(10x-x^2-1)\left(\log_3\frac{5}{4}-1\right)\leq 0$

$(x^2-10x+1)\left(\log_3\frac{5}{12}\right)\geq 0$; $\log_3\frac{5}{12}<0$, поэтому:

$x^2-10x+1\leq 0$; $(x-(5+2\sqrt6))(x-(5-2\sqrt6))\leq 0$



Пересечём с ОДЗ:



$0<5-2\sqrt6$; $2\sqrt6<5$; $24<25$

$5+2\sqrt6<10$; $2\sqrt6<5$; $24<25$.

Ответ: $x\in[5-2\sqrt6;\ 5+2\sqrt6]$.

Задача 5.

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)\Rightarrow \boxed{f(1)=0.}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow \boxed{f(\frac{1}{x}) = -f(x)}$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

Посчитаем $f(x)$ для простых x от 2 до 25.

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$, $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$, $f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$, $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$, $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$, $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$, $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$, $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$. Теперь посчитаем $f(x)$ для оставшихся x от 1 до 25. $f(4) = f(2) + f(2) = 0$, $f(6) = f(2) + f(3) = 0$ и т.д.

Результаты занесём в таблицу.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

Задачу можно переформулировать (с учётом полученной ранее формулы $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$) следующим образом: найти кол-во пар $(x;y)$ таких, что $2 \le x, y \le 25$ и $f(x) < f(y)$.

1) Пусть $f(x) = 0$ (10 способов), тогда есть 14 вариантов для выбора y. Получаем 140 способов в этом случае.

2) $f(x) = 1$ (7 способов) $\Rightarrow$ для y 7 способов. Итого 49 способов.

3) $f(x) = 2$ (3 способа) $\Rightarrow$ для y 4 способа. Итого 12 способов.

4) $f(x) = 3$ (1 способ) $\Rightarrow$ для y 3 способа. Итого 3 способа.

4) $f(x) = 4$ (2 способа) $\Rightarrow$ для y 1 способ. Итого 2 способа.

5) $f(x) \ge 5$. $f(y) \le 5 \Rightarrow$ 0 способов.

Суммируя, получаем: $140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$ способов.

Ответ: 206.

Задача 6.

Рассмотрим правое неравенство.

$$32x^2+(a-36)x+(b+3)\le 0$$

Слева стоит парабола с ветвями вверх, поэтому, если в точках $\frac{1}{4}$ и 1 нер-во выполняется, то оно выполняется для всех $x\in[\frac{1}{4};1]$.

$$\begin{cases} 32\cdot\frac{1}{16}+\frac{(a-36)}{4}+b+3\le 0 \\ 32+a-36+b+3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+a-36+4b+12\le 0 \\ -1+a+b\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4b\le 16 \\ a+b\le 1 \end{cases} \quad (*).$$

Рассмотрим левое неравенство. На промежутке $[\frac{1}{4};1]$: $4x-5<0$. Домножим обе части на $4x-5$.

$$16x-16\ge 4ax^2+4bx-5ax-5b$$

$$4ax^2+x(4b-5a-16)+(16-5b)\le 0.$$

Если $a>0$, то аналогично рассм. выше нер-ву, необходимо и достаточно, чтобы при $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$ нер-во выполн.:

$$\begin{cases} \frac{a}{4}+b-\frac{5}{4}a-4+16-5b\le 0 \\ 4a+4b-5a-16+16-5b\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-4b+12\le 0 \\ -a-b\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b\ge 12 \\ a+b\ge 0 \end{cases} \quad (**)$$

Но мы ранее получили, что $a+b\le 1$, поэтому этот случай не (иначе $3b\ge 11$; $b\ge\frac{11}{3}\Rightarrow a+b\ge\frac{11}{3}$ — противоречие). возможен. Если $a=0$, то получаем: $x(4b-16)+(16-5b)\le 0$.

Так как слева стоит прямая, то нужно, чтобы при $x=\frac{1}{4}$ и при $x=1$ нер-во выполнялось: $\begin{cases} b-4+16-5b\le 0 \\ 4b-16+16-5b\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b\ge 12 \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\ge 3 \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow b\ge 3$. Из $(*)$ получаем: $b\le 1$, поэтому $a=0$ — не подходит. Пусть теперь $a<0$. Тогда, кроме системы $(**)$ нужно потребовать, ~~[illegible]~~ что если x-корд. верш. параболы

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

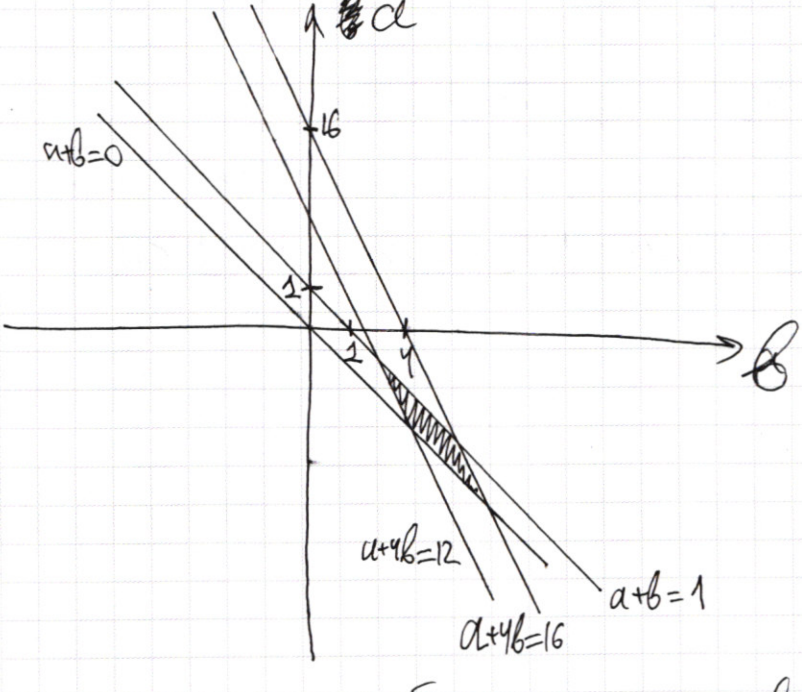
лежит на промежутке $[\frac{1}{4};1]$, то знач. в верш. параболы <0.

$x_0 = \frac{5a+16-4b}{8a}$ — x-коорд. вершины. $D=(4b-5a-16)^2-$
$-16a(16-5b)$; $y_0 = \frac{-D}{16a} < 0 \Leftrightarrow \frac{D}{a} > 0 \Leftrightarrow D<0$,
т.к. $a<0$.

$\frac{1}{4} \le \frac{5a+16-4b}{8a} \le 1$

$\begin{cases} 2a \ge 5a+16-4b \\ 8a \le 5a+16-4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4b+16 \le 0 \\ 3a+4b-16 \le 0 \end{cases}$ (***).

$D<0$; $(4b-5a-16)^2 < 16a(16-5b)$ (****)



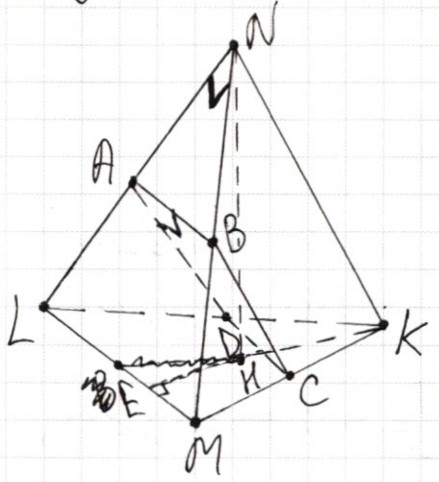
на рисунке изображено множество решений системы из (*) и (**).

Надо пересечь его с [системой из (***) и (****)] и [анти (***)]
совокупн. из
когда (***) не выпол.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

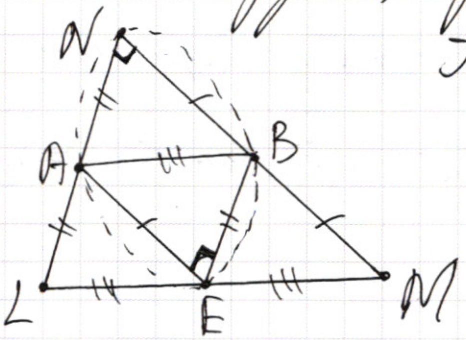
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача 7.



Обозначим середины сторон так, как показ. на рисунке. Посмотрим на сечение сферы плоскостью LNM.

Это окружн., прох. через A, N, B, E.



По св-вам ср. линий $AE = NB = MB$, $BE = LA = NA$ $\Rightarrow \Delta NAB = \Delta EBA$

$\Rightarrow$ ~~$\angle AN$~~ $\angle ANB = \angle AEB$. Но $ANBE$ – впис. $\Rightarrow \angle ANB + \angle AEB = 180° \Rightarrow \boxed{\angle ANB = \angle AEB = 90°}$.

$\begin{cases} AB \parallel LM,\ DC \parallel LM \Rightarrow AB \parallel DC \\ AD \parallel NK,\ BC \parallel NK \Rightarrow AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.

Но он вписан в окр-ть $\Rightarrow$ $\boxed{ABCD \text{ – прямоугольник}}$.

$\Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \boxed{LM \perp KN}$. Пусть H – проекция точки N на плоскость LKM. $LM \perp NK$, $LM \perp NH \Rightarrow LM \perp (NHK) \Rightarrow LM \perp KH$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \qquad tg\alpha - ?$$

$$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta$$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ (\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta)\cos2\beta + \cos2\alpha\cos2\beta-\sin \end{cases}$$

$2\alpha = x$
$2\beta = y$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$2\sin\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2y}{2} = -\frac{2}{5} \qquad tg\frac{x}{2} - ?$$

$$\boxed{\sin(x+y)\cos y = -\frac{1}{5}}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \sin x\cos y+\cos x\sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin y = \pm\frac{2}{\sqrt5} \qquad \frac{1}{\sqrt5}\sin x \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin x \pm 2\cos x = -1$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \pm 2(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}) = \underline{-1}$$

$$-\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$$

$$+: \sin^2\frac{x}{2}-3\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \ \Big|:\cos^2\frac{x}{2}$$

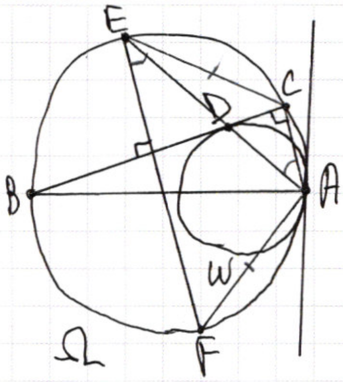
$$tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}-3=0 \qquad -: 3\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=-1 \\ tg\frac{x}{2}=3 \end{array}\right. \qquad 3tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-1=0$$

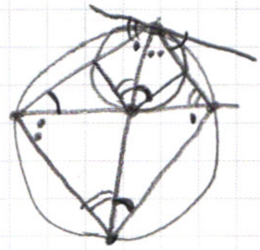
$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=-1 \\ tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

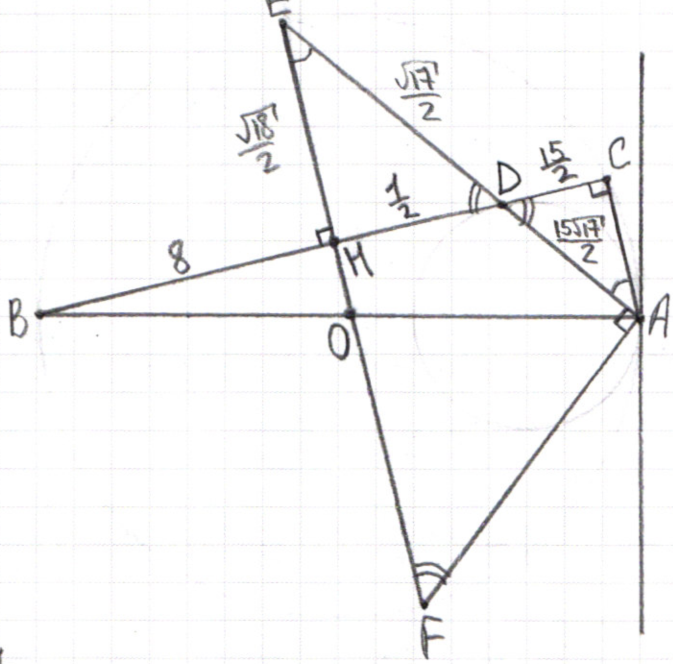
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\boxed{CD=\frac{15}{2},\ BD=\frac{17}{2}}$





Л. Архимеда

$$\begin{cases} ED\cdot DA=\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2} \\ \frac{ED}{DA}=\frac{1}{2}:\frac{15}{2}=\frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow ED^2=\frac{17}{4};\ ED=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$DA=\frac{15\sqrt{17}}{2}$$

$\frac{17}{4}+\frac{1}{4}=\frac{18}{4}$

$$\Delta EFA \sim \Delta EDH \Rightarrow \frac{EF}{\sqrt{17}/2}=\frac{8\sqrt{17}}{\sqrt{18}/2};\ EF=\frac{17\cdot 8}{\sqrt{18}}=\frac{17\cdot 8}{3\sqrt{2}}$$

$$R=\frac{17\cdot 4}{3\sqrt{2}}$$

$tg=4$ $\quad tg^2+1=\frac{1}{\cos^2}$

$\cos=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 17=17$

$256+16=272$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$\frac{160}{80}-\frac{17}{80}=\frac{143}{80}$

$$x^2-12x+(36y^2-36y-45)=0$$

$$\frac{D}{4}=36-36y^2+36y+45=9(4-4y^2+4y+5)=$$
$$=9(-4y^2+4y+9)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

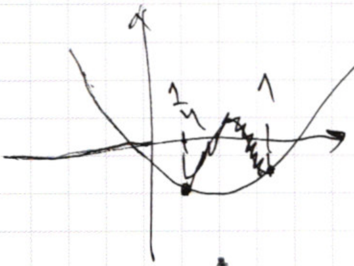
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b\le -32x^2+36x-3$ $\qquad [\frac{1}{4};1]$.

$32x^2+x(a-36)+(b+3)\le 0$

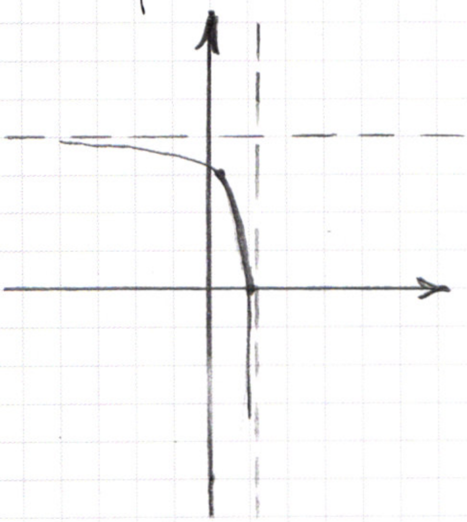


max при $x=\frac{1}{4}$

$4+\frac{4}{4x-5}\le ax+b$

$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$3\le\frac{1}{4}a+b$ | если $a\ge 0$.



$4x-5<0$; $x<\frac{5}{4}$

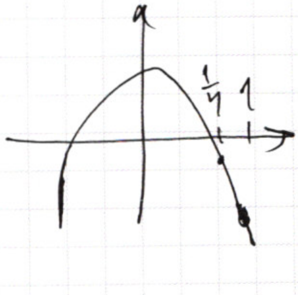
$16x-16\ge(ax+b)(4x-5)$

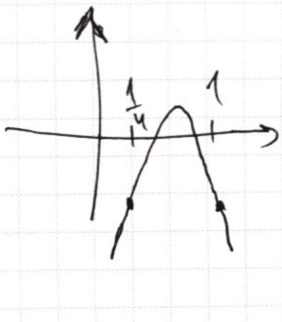
$16x-16\ge 4ax^2-5ax+4bx-5b$

$[\frac{1}{4};1]$. $\qquad 4ax^2+x(4b-5a-16)+(16-5b)\le 0$.

$a>0$: на концах.

$a<0$:





$\left\{\begin{array}{l} D<0 \\ \text{~~или } D>0\text{~~} \\ x_{\text{верш}}\notin[\frac{1}{4};1] \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23	...
$f(x)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5	...

$f(ab)=f(a)+f(b)$ || $f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$

$\boxed{2\le x,y\le 25 \quad f(\frac{x}{y})<0}$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(a)=f(a\cdot 1)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0$

$0=f(1)=f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+f(2)=f(\frac{1}{2})+0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$

$0=f(1)=f(\frac{1}{3})+f(3)\Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$

$f(\frac{1}{4})=-f(4)$ $\qquad$ $0=f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$\boxed{f(\frac{1}{x})=-f(x)}$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1.$

$f(12)=0$

$f(15)=1$

$f(16)=0;$ $f(18)=0;$ $f(20)=1;$ $f(21)=1;$ $f(22)=2$

$f(24)=0;$ $f(25)=2.$

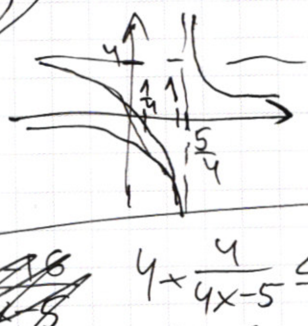
$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=\boxed{f(x)-f(y)}$

$\boxed{(x;y): \; f(x)-f(y)<0}$

$f(x)<f(y)$

$189+17=206$

$$\begin{array}{r} 189 \\ +\;17 \\ \hline 206 \end{array}$$



$[\frac{1}{4};1].$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b$

$\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

$\cancel{\frac{16x-16}{4x-5}}$ $\qquad 4+\frac{4}{4x-5}\le ax+b \quad | \cdot 4x-5$

$\frac{4ax^2-5ax+4bx-5b-4}{4x-5}\ge 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2y(x-6)-(x-6)=\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(2y-1)}_{b}$

$\begin{cases} x-6=a \\ 2y-1=b \end{cases}$ $\quad x=6+a$, $\quad 2y=b+1$

$a^2=x^2-12x+36$

$9b^2=36y^2-36y+9$

$x-12y=6+a-6b-6=$
$=a-6b$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=(5b)^2$

$a=\frac{13b\pm5b}{2};\ 9b;\ 4b$

$(a-9b)(a-4b)$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

ОДЗ: $\begin{cases} 10x-x^2>0; & x^2-10x<0 \\ x^2-10x\neq0 \end{cases}$ $\quad x(x-10)<0$, $\quad x\in(0;10)$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4}\left((10x-x^2)^{\log_3 5-\log_3 4}-1\right)+$
$+x^2-10x\leq0$

$x^2-10x+1$

$D=100-4=96$

$\frac{10\pm4\sqrt6}{2}=$ $\quad 96$ $\quad 96=16\cdot6$

$=5\pm2\sqrt6$

$5-2\sqrt6>0$
$5>2\sqrt6$
$25>4\cdot6$

$5+2\sqrt6<10$
$2\sqrt6<5;\ 24<25$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$\frac{p}{q}>0$

$2\leq x\leq25$
$2\leq y\leq25$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$
$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$

$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23
f(x)	0	0	1	1	2	3	4	4	5

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$D=(4b-5a-16)^2-16a(16-5b)$; $y_{верш}=\frac{-D}{16a}$; $y_{верш}<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-D}{4a}<0 \Leftrightarrow \frac{D}{4a}>0 \Leftrightarrow D<0$, т.к. $a<0$. Поэтому остаётся одно условие~~

~~$a=16-4b$~~

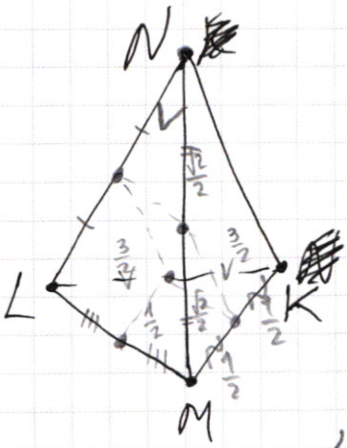
~~$a=16-4b$~~

$\xi=4b-5a-16$

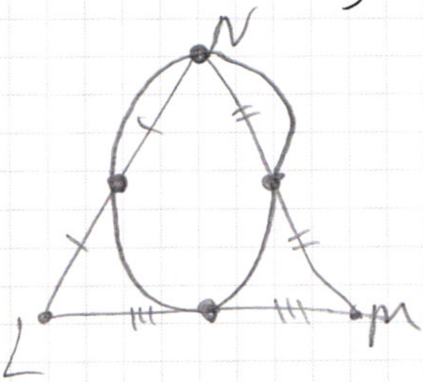
$\eta=(16-5b)4a$

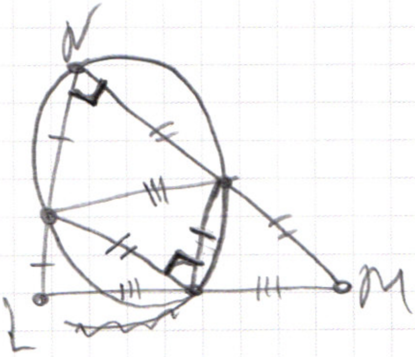
$a=\frac{4}{3}b-16$

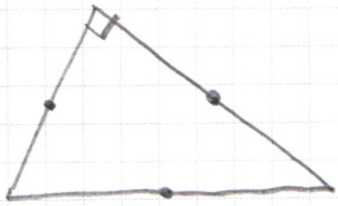
$a=-\frac{4}{3}b+16$



$\angle LNM=90°$







☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)