МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) $f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = f(a) - f(a) = 0$

$f(1) = f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$, $\forall a \in Q \setminus (-\infty; 0]$ $\Rightarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, значит:

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$.

2) Составим таблицу значений $f(x)$ для $x \in N \cap [2;25]$:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(x)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

x	24	25
$f(x)$	0	2

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0 \Rightarrow f(2\cdot k) = f(2) + f(k) = f(k)$ $\forall k \in Q \setminus (-\infty; 0]$;

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0 \Rightarrow f(3\cdot k) = f(3) + f(k) = f(k)$ $\forall k \in Q \setminus (-\infty; 0]$;

$f(4) = f(2\cdot 2) = \cancel{f(2)}\, 0$; $f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(8) = f(2\cdot 4) = f(2) + f(4) = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(6) = f(2\cdot 3) = \cancel{0+0}\, f(2) + f(3) = 0$; $f(9) = f(3\cdot 3) \cancel{f} = f(3) + f(3) = 0$.

$f(10)=f(2\cdot 5)=f(2)+f(5)=1$; $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$; $f(12)=f(3\cdot 4)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$; $f(14)=f(2\cdot 7)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(5\cdot 3)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(8\cdot 2)=f(8)+f(2)=0$; $f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$; $f(18)=f(9\cdot 2)=$

$=f(9)+f(2)=0$; $f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$; $f(20)=f(5\cdot 4)=f(5)+f(4)=1$;

$f(21)=f(7\cdot 3)=f(7)+f(3)=1$; $f(22)=f(2\cdot 11)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$; $f(24)=f(4\cdot 6)=f(4)+f(6)=0$; $f(25)=f(5\cdot 5)=$

$=f(5)+f(5)=2$;

3) Пусть N - кол-во пар $(x;y)$, таких, что $x\in\mathbb{N}$; $y\in\mathbb{N}$;
$2\le x\le 25$; $2\le y\le 25$; $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$,

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$ (по п.1)~~

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$ (по п.1)

$\Rightarrow N=\sum\limits_{k=0}^{5} N_k$ (т.к. наибольшее значение $f(x)$, для $x\in\mathbb{N}\cap[2;25]$ это 5)

Пусть N_k - кол-во пар $(x;y)$, ~~которые~~ таких, что:
$x, y\in\mathbb{N}$; $2\le x\le 25$; $2\le y\le 25$; $f(x)<f(y)$; $f(x)=k$;

Пусть n_k - кол-во чисел x, $x\in\mathbb{N}$; $2\le x\le 25$,
таких, что $f(x)=k$, тогда, исходя из таблицы значений в п.2:

$n_0=10$

$n_1=7$

$n_2=3$

$n_3=1$

$n_4=2$

$n_5=1$. ~~$\forall i\ne 0,1,2,3,4,5: n_i=0$~~;

$N=\sum\limits_{k=0}^{5} N_k$ (см. выше)

$N_0=10\cdot 14=140$.

$N_1=7\cdot 7=49$

$N_2=3\cdot 4=12$

$N_3=1\cdot 3=3$

$N_4=2$

$N_5=0$; ~~$\forall i\ne 0,1,2,3,4: N_i=0$~~.

$\Rightarrow N=140+49+12+3+2+0=189+17=206$

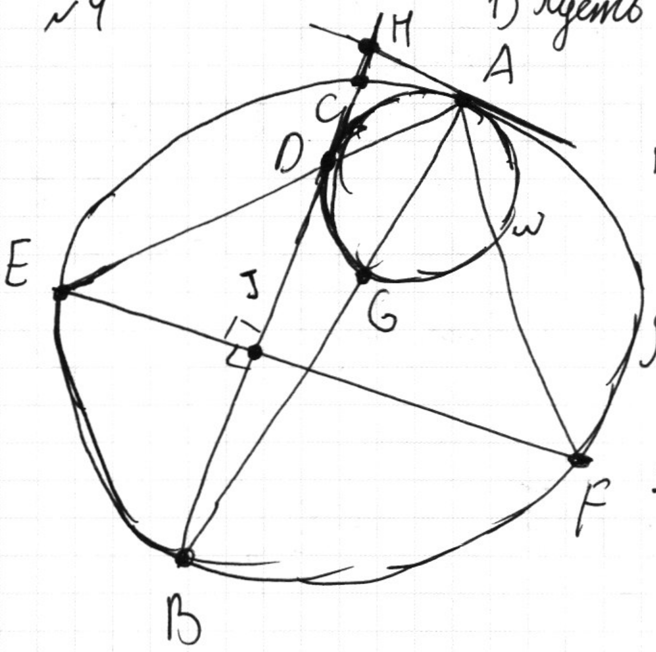
$N_k=n_k\cdot\left(\sum\limits_{i=k+1}^{5} n_i\right)$ (очевидно из определения N_k и n_k)

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть R-радиус Ω, r-радиус ω;

2) Продлим BC и касательную к ω, проходящую через т. A до пересечения в т. H.

Пусть $AB \cap \omega \ni G$, $G \neq A$.

Пусть $EF \cap BC = J$

2) AH-кас. к ω; DH-кас. к ω $\Rightarrow AH = DH = CD + CH$

A-т. ~~общего~~ касания ω и Ω; AH-кас к ω $\Rightarrow AH$-кас к $\Omega \Rightarrow AH^2 = BH \cdot BC = BC \cdot (BC + CH)$

$\Rightarrow (CD + CH)^2 = BC \cdot (BC + CH)$

$CH^2 + 2CH \cdot CD + CD^2 = BC^2 + BC \cdot CH$;

$CD = \frac{15}{2}$ (по усл.)
$BD = \frac{17}{2}$ (по усл.) $\Rightarrow BC = 16$;

$\Rightarrow CH^2 + 15CH + \frac{225}{4} = 256 + 16CH$.

$CH^2 - CH - \frac{799}{4} = 0$; $\mathcal{D} = 1 + \left(\frac{799}{4}\right) \cdot 4 = 800 = 2 \cdot 20^2$

Это дискриминант ур.

$CH = \frac{1 \pm \sqrt{800}}{2} = \frac{1 + 20\sqrt{2}}{2}$ (т.к. $CH > 0$).

$AH = DH = CD + DH$; $BH = BC + CH$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \frac{16+20\sqrt{2}}{2} = 8+10\sqrt{2}$ $\Rightarrow AH^2 = 64+200+160\sqrt{2} = 264+160\sqrt{2}$

$BH = \frac{33+20\sqrt{2}}{2}$; $\Rightarrow BH^2 = \frac{1089+800+1320\sqrt{2}}{4} = \frac{1889+1320\sqrt{2}}{4}$

3) AB - диаметр Ω; AH - кас к Ω (по п. 2) $\Rightarrow AB \perp AH \Rightarrow$ ~~$\triangle HAB$ прямоуг.~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AB^2~~ $= \Rightarrow \triangle HAB$ - прямоуг. $\Rightarrow \cos\angle AHC = \frac{AH}{BH}$; $AB^2 = BH^2 - AH^2$;

$AH = DH \Rightarrow \triangle AHD$ р/б $\Rightarrow \angle HAD = \angle ADH = \pi - 2\angle AHC \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle HAD = \cos(\pi - 2\angle AHC) = \overset{=-1}{\cos\pi}\cdot \cos 2\angle AHC + \overset{=0}{\sin\pi}\cdot\sin 2\angle AHC$

$= -\cos 2\angle AHC = -(2\cos^2\angle AHC - 1) = 1 - 2\cos^2\angle AHC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle HAD = 1 - 2\left(\frac{AH}{BH}\right)^2$

AH - кас к Ω; AE - хорда Ω $\Rightarrow \angle HAE = \frac{1}{2}$ ~~$\cup AE$~~ $= \angle AFE$; $\angle HAE = \angle HAD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \arccos\left(1 - 2\left(\frac{AH}{BH}\right)^2\right) = \arccos\left(1 + 2\cdot\frac{1056+640\sqrt{2}}{1889+1320\sqrt{2}}\right) =$ (см. п. 2)

$= \arccos\left(-\frac{1889 - 2112 + 1320\sqrt{2} - 1280\sqrt{2}}{1889+1320\sqrt{2}}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{-40\sqrt{2}+231}{1889+1320\sqrt{2}}\right)$;

4) $AB^2 = BH^2 - AH^2$ (по п. 3) $= \frac{1889+1320\sqrt{2}}{4} - 264 - 160\sqrt{2}$ (по п. 2) $=$

$= \frac{1889 - 1056 + 1320\sqrt{2} - 640\sqrt{2}}{4} = \frac{833+680\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}{2}$; AB - диаметр $\Omega \Rightarrow AB = 2R$ $\Rightarrow R = \frac{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}{4}$;

5) BD - касается $\omega \Rightarrow BD^2 = BG\cdot AB \Rightarrow BG = \frac{BD^2}{AB}$

~~BD~~ $BG + AG = AB \Rightarrow AG = AB - BG$ $\Rightarrow AG = \frac{AB^2 - BD^2}{AB} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \left(\frac{833+680\sqrt{2}}{4} - \frac{289}{4}\right) : \left(\sqrt{\frac{833+680\sqrt{2}}{4}}\right) =$

$= \left(\frac{544+680\sqrt{2}}{4}\right) : \left(\frac{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}{2}\right) = \left(\frac{267+340\sqrt{2}}{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}\right)$

AH - касательная к ω; AG ⊥ AH; G ∈ ω $\Rightarrow$ AG - диаметр $\omega \Rightarrow AG = 2r$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{267+340\sqrt{2}}{2\sqrt{833+680\sqrt{2}}}$.

б) ~~Пусть EF ∩ BC =~~

$\angle HDA = \angle AFE$ (по п. 3)

$\angle HDA = \angle EDJ$; (т.к. $\angle EJD = 90°$ по усл.)

$\angle AEF = 90° - \angle EDJ$

$\Rightarrow \angle AEF + \angle AFE = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow \Delta EAF$ - прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta EAF} = \frac{1}{2} AF \cdot EA$,

$AE = \sin\angle AFE \cdot EF$,

$AF = \cos\angle AFE \cdot EF$

$\Rightarrow S_{\Delta EAF} = \frac{1}{2} EF^2 \cdot \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE$.

$\angle AFE = \arccos\left(\frac{-40\sqrt{2}+231}{1889+1320\sqrt{2}}\right)$ (по п. 3)

$\angle EAF = 90° \Rightarrow EF$ - диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 2R$,

$R = \frac{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}{4}$

$\Rightarrow S_{\Delta EAF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{833+680\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{-40\sqrt{2}+231}{1889+1320\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{-40\sqrt{2}+231}{1889+1320\sqrt{2}}\right)^2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{833+680\sqrt{2}}}{4}$; $\frac{267+340\sqrt{2}}{2\sqrt{833+680\sqrt{2}}}$; $\arccos\frac{231-40\sqrt{2}}{1889+1320\sqrt{2}}$;

$\frac{(833+680\sqrt{2})(231-40\sqrt{2})}{8(1889+1320\sqrt{2})} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{231-40\sqrt{2}}{1889+1320\sqrt{2}}\right)^2}$.

№3

$10x + (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $t = 10x - x^2$, заметим, что $t > 0$ (т.к. $\log_3 t$ ∃), значит:

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $|:t$;

$5^{\log_5(t + t^{\log_3 4})} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_5(t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t$ (т.к. $f(x) = 5^x$ ↑)

$\log_t 5 - \log_t 3 =$

$\log_5 t + \log_5(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \log_3 t$;

$\log_5(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \frac{1}{\log_t 3} - \log_5 t$

$= \frac{1}{\log_t 3} - \frac{1}{\log_t 5} = \frac{\log_t \frac{5}{3}}{\log_t 3 \cdot \log_t 5} =$

$\log_5(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \frac{1 - \log_5 t \cdot \log_t 3}{\log_t 3}$

$= \frac{\log_3 \frac{5}{3}}{\log_t 5} = 1 \cdot \log_t t$

$\log_5(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \frac{1 - \log_5 3}{\log_t 3}$

$= \log_3 \frac{5}{3} \cdot \log_5 t$

$1 + 1 \geq 5^{\log_3 1} = 3^{(\log_3 5) \log_3 1}$;

$\log_3 t - \log_5 t = \log_3 \frac{5}{3} \cdot \log_5 t$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}$; $1+0>0$; $10 + 9^{\log_3 4}$ $1 + 4 - 5 = 0$;

$\log_5(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq$ $1+1-1$ $1 + 5^{\log_3 3}$ $1 + \frac{8}{3}$ $\frac{10}{3}$ $10 + 8 \vee 1 + 5^2$

$50 - 25$; $\frac{16}{9} - \frac{25}{9} =$ $t=3$: $1 + \frac{4}{3} \geq \frac{5}{3}$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$\frac{5}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{4}$ $10x - x^2 = 1$

$f(t) = 1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$ >0 $x^2 - 10x + 1 = 0$

$D/4 = 25 - 1 = 24$

$f'(t) = t^{\log_3 \frac{4}{9}} - t^{\log_3 \frac{5}{9}} = t^{\log_3 \frac{4}{9}}\left(1 - t^{\log_3 \frac{5}{4}}\right)$ $x =$

$t^{\log_3 \frac{5}{4}} < 1$; $t < 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $t = 10x - x^2$, заметим, что $t > 0$ (т.к $\log_3(10x - x^2)$ $\exists$), значит:

$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\log_5(t + t^{\log_3 4})} \geq 5^{\log_3 t}$.

$\log_5\left(t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right)\right) \geq \log_3 t$

$\log_5\left(t^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1\right) \geq \log_3 t - \log_5 t$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq \frac{1}{\log_t 3} - \frac{1}{\log_t 5} \\ t = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq \frac{\log_t \frac{5}{3}}{\log_t 3 \cdot \log_t 5} \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq \frac{\log_3 \frac{5}{3} \cdot \log_t t}{\log_t 5} \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$\log_5\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq \log_3 \frac{5}{3} \cdot \log_5 t$.

$1+t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geqslant t^{\log_3 \frac{5}{3}}$.

$1+t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geqslant 0$

Пусть $f(t) = 1+t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}$, тогда ~~$f'(t) = $~~

$f'(t) = \log_3 \frac{4}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{4}{9}} - \log_3 \frac{5}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{5}{9}} =$

$= t^{\log_3 \frac{4}{9}} \left(\log_3 \frac{4}{3} - \log_3 \frac{5}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{5}{4}}\right) =$

$t>0$ $\quad = \log_3 \frac{5}{3} t^{\log_3 \frac{4}{9}} \left(\log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3} - t^{\log_3 \frac{5}{4}}\right)$ $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow f'(t) > 0$, при $t \in (0;$~~ $\quad t>0$

$\Rightarrow f'(t) \geqslant 0$, при $t \in \left[0; \sqrt[\log_3 \frac{5}{4}]{\log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3}}\right)$,

а при $t \in \left(\sqrt[\log_3 \frac{5}{4}]{\log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3}}; +\infty\right)$ $f'(t) < 0$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ возрастает, при $t \in \left[0; \sqrt[\log_3 \frac{5}{4}]{\log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3}}\right)$, $f(t)$ убывает при

$t \in \left(\sqrt[\log_3 \frac{5}{4}]{\log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3}}; +\infty\right)$.

Заметим, что $f(0) = 1+0-0 = 1 > 0$;

~~$f(27) = f(3^3) = 1 + 3^{3\log_3 \frac{4}{3}} - 3^{3\log_3 \frac{5}{3}} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 =$~~

~~$= 1 + \frac{64}{27} - \frac{125}{27} = 1 - \frac{61}{27}$~~

$f(9) = 1 + 3^{2\log_3 \frac{4}{3}} - 3^{2\log_3 \frac{5}{3}} = 1 + \frac{16}{9} - \frac{25}{9} = 1-1 = 0$.

$\Rightarrow f(t) \geqslant 0$ только при $t \in [0; 9]$;

Вернёмся к x!

$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x(10-x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \end{cases}$ $\quad$ + 0 + 10 −

$D_{/4} = 25 - 9 = 4^2$

$x_{1,2} = 5 \pm 4 = 1; 9$

$\begin{cases} x \in (0; 10) \\ (x-1)(x-9) \geqslant 0 \end{cases}$ $\quad$ + 1 − 9 + $\quad \begin{cases} x \in (0; 10) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}$ Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

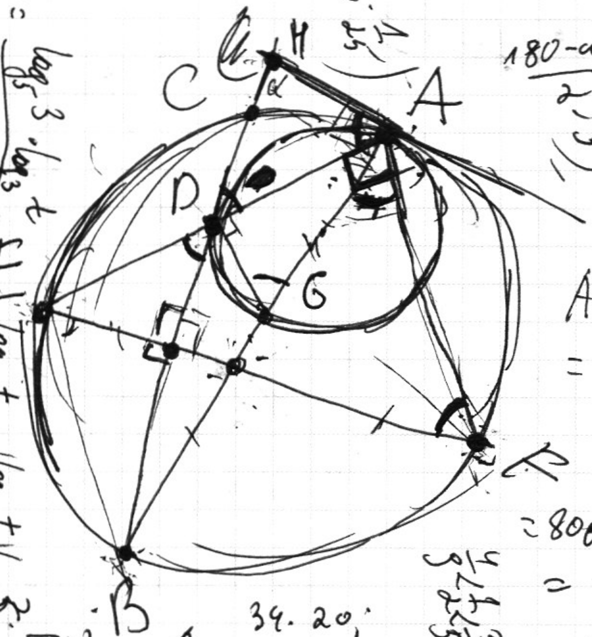
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

680 =
=2·340 =
2 = 20.17
$17^2 = 289$,

S_{AEF}



$BD \cdot CD = AD \cdot ED$,

$160 \cdot 4 = 640$.

$AG \cdot (AB - AG) = BD \cdot CD$.

$264 \cdot 4 =$
$= 800 + 240 + 16 =$
$= 1056$;

$BC = \frac{15+17}{2} = 16$;

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

$AB^2 = BH^2 - AH^2$
$= \left(\frac{33+20\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (8+10\sqrt{2})^2 =$

34·20,

$\angle EAH = \angle EFA$
$\angle CDA$

$34^2 = 33^2 + 33 + 34 =$
$= 1089 + 33 + 34 =$
$= 11$

$33^2 = 33 \cdot 30 + 33 \cdot 3 = 990 + 99 = 1089$

AH^2
$(CH + CD)^2 = BH \cdot BC = (BC + CH)BC$

$2112 - 1881 =$
$= 231$

$CH^2 + 2CH \cdot CD + CD^2 = BC^2 + BC \cdot CH$

$CH^2 + 15CH + \frac{225}{4} = 256 + 16CH$

$680 = 68 \cdot 10 =$
$= 34 \cdot 2 \cdot 10 =$
$= 17 \cdot 4 \cdot 10$;

$CH^2 - CH + \frac{225-1024}{4} = 0$

$CH^2 - CH - \frac{799}{4} = 0$

$D = 1 + 799 = 800 = 2 \cdot 400 = 2 \cdot 20^2$

$CH = \frac{1 \pm 20\sqrt{2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}+1}{2}$; $\Rightarrow AH = 8 + 10\sqrt{2}$;

$BH = \frac{33+20\sqrt{2}}{2}$

$\log_3 7 - \log_5 3 =$

$C \geq 3^{\log_3 5}$; $C \geq t^{\log_3 5}$, $t^{\log_3 \frac{4}{5}}$

$\frac{\log_5 3}{\log_3 5} = \log_5 3 \cdot \log_3 t$

$\log_5 t \cdot \log_5 t$

$t \in (0; \frac{1}{25})$

$t^{\log_3 3} \in (0; \frac{1}{9})$

$\frac{180-\alpha}{2}$

1) $t < 1$
$t \in (0; 10)$
$\log_3 C \geq \log_3 5$
$\log_3 t + \log_5 (1 + t + t^{\log_3 \frac{4}{5}}) \geq \log_3 t$

$\log_5 7 \cdot \log_7 3 = \log_5 3$

~~$CD + AF = 180°$~~

~~$2x + 180°$~~

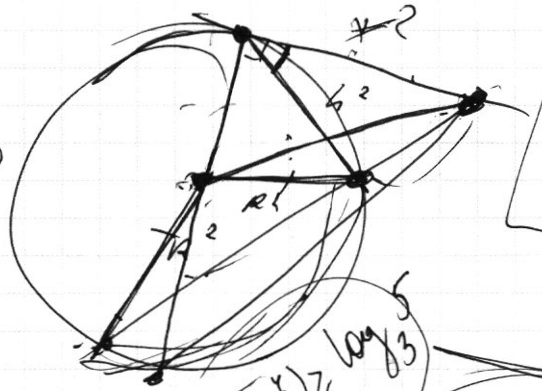
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$4 \le 16x \le 16$

$-12 \le 16x-16 \le 0$



$$\boxed{ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-15}} \qquad \frac{(ax+b)(16x-16)}{4x-15} \ge 0$$

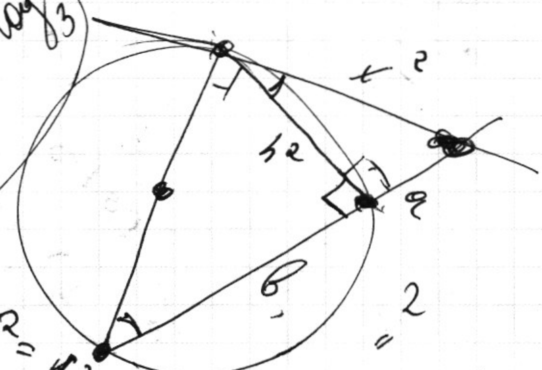
$1 \le 4x \le 4$

$-4 \le 4x-5 \le -1$

$-1 \le \frac{1}{4x-5} \le -\frac{1}{4}$ ~~$ax+b$~~

$\frac{1}{4} \le x \le 1$

$\log_5\left(1+t^{\log_3 4}\right) \ge \log_3 5$



$\frac{a}{4} \le ax \le a$ $\quad a>0;$

$x^2 = d^2 - (a+b)^2$

$\log_2 4 = \log_2 2 + \log_2 2;$

$x^2 = a^2 + h^2$

$ax+b \le$

$h^2 = d^2 - b^2 \Big\} \Rightarrow x^2 = a^2 + d^2 - b^2$

$0 \le \frac{16x-16}{4x-5} \le 12;$

~~$a^2+d^2-b^2 = d^2-(a+b)^2$~~

$D = (36-a)^2 + 128(3+b) = 6^4 - 72a + a^2 + 864 + 128b;$

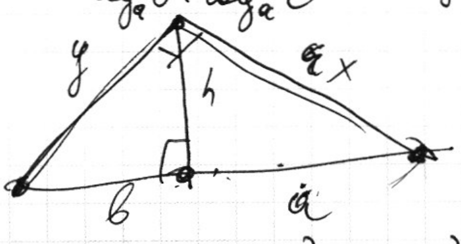
$\frac{a}{4} + b \ge 0;$

$x = a\sqrt{a+b}$

$-32x^2 + (36-a)x - 3 - b \ge 0;$

$\log_5\left(1+t^{\log_3 4}\right)$

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$



$h = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad h^2 = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2};$

~~$\log_5 t \ge \log_4 5$~~

$$a^2 = x^2 - h^2 = \frac{x^2y^2}{x^2}x^2 - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \cancel{\frac{x^4+x^2y^2-x^2y^2}{x^2+y^2}} = \cancel{\frac{x^4}{x^2+y^2}} \Rightarrow \cancel{a = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow x^2 = a(a+b)$$

$$\log_5 t + \log_5 t^{\log_3 4} \ge \log_3 t; \quad (\log_5 t)\cdot\log_3 4 \ge \cancel{\log_3 3}\ \frac{\log_3 t}{\log_5 t} = \log_3 5$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$, $a,b\in\mathbb{Q}^+$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, p - прост.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$
$=f(x)-f(y)$.

$2\le x\le 25$; $2\le y\le 25$; $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$
$x,y\in\mathbb{N}$;

~~$f(0)=f(0)+f(x)$, $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$~~

$f(x)=f(1)+f(x)\Rightarrow f(1)=0$;

$f(x^2)=2f(x)\Rightarrow f(x^n)=nf(x)$;
(по индукц.)

$f\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)=nf\left(\sqrt[n]{x}\right)\Rightarrow f\left(\sqrt[n]{x}\right)=\frac{1}{n}f(x)$;

$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}f(x)$, $m\in\mathbb{Z}$; $n\in\mathbb{N}$;

$f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$
$0=$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$; $\Rightarrow$ $f(2k)=f(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$;

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0\Rightarrow f(3k)=f(k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$;

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1=f(7)$ $\quad$ $f(4)=0=f(6)=f(8)=f(12)=$
$=f(16)=f(9)$

$f(14)$ $\quad$ $f(15)$

$f(11)=2$; $f(13)=3$

$f(17)=4=f(19)$

$f(23)=5$; $\quad$ $f(9)=3f(3)=$

$\log_3 1=0$; $t\in(1;25)$; $5^{\log_3 t}$

$t+t^{\log_3 4}\geq$

$t(1+t^{\log_3 4})=$

Пусть $10x-x^2=t$, $t>0$;

$10x-(x^2-10x)^{\log_3 4}$

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$;

$10x+(x^2-10x)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2=x(10-x)>0$, $x\in(0;10)$

$t\in(0;25]$;

$\log_5 t\in(-\infty;2]$;

$(10x-x^2)'=10-2x$

0 $+$ 5 $-$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4

x	20	21	22	23	24	25
f(x)	1	1	2	5	0	2

$f(\sqrt[n]{a^m}) = \frac{m}{n} f(a)$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $n \in \mathbb{N}$;

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$.

$2 \leq x \leq 25$

$f(2k) = f(k)$
$f(3k) = f(k)$ $k \in \mathbb{N}$;

0 – 10 раз
1 – 7 раз
2 – 3 раза
3 – 1 раз
4 – 2 раз; 5 – 1 раз

4; 7; 14

$0; 1; 2; 3; 4; 5;$

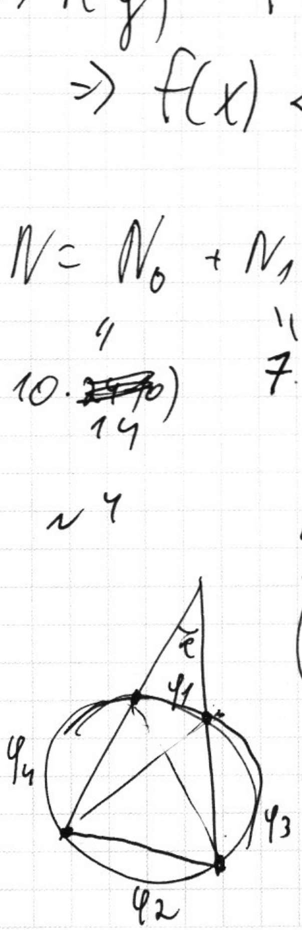
$0 > f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) - f(y) \Rightarrow$ 3

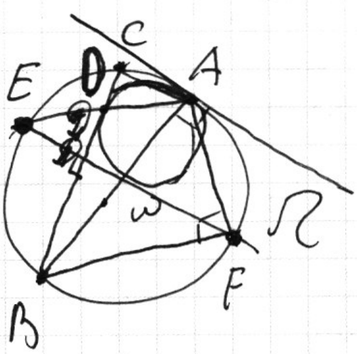
$\Rightarrow f(x) < f(y)$

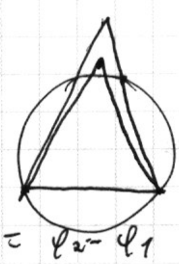
$N = \underset{10 \cdot 14}{N_0} + \underset{7 \cdot 7}{N_1} + \underset{3 \cdot 4}{N_2} + \underset{1 \cdot 3}{N_3} + \underset{2 \cdot 1}{N_4} = 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 189 + 17 =$
$= 206;$

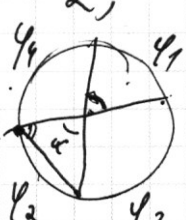
№ 4

$\angle AFE - ?$; S_{AEF}; $R_\omega : R_\Omega$;
$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$;









$\alpha = \pi - \varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_4 =$
$= \pi - \varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_4 + \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$

$\alpha = \pi - \varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_1 + \varphi_2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)