МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

✓ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

✓ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

✓ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

✓ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

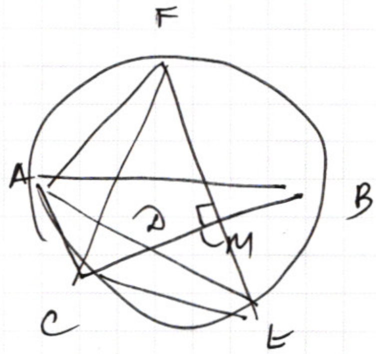
$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cdot\cos y$



$x+y=\alpha$
$x-y=\beta$

$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\qquad 2\alpha+4\beta-2$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\qquad \underline{BM}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \frac{BM}{BE} = \frac{BE}{BD}$

$\frac{AC}{CD} = 4 \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{1}{4}$ $\qquad BM = \frac{BE^2}{BD} = \frac{4\cdot\cancel{17}}{\cancel{17}}\cdot 2 = 2\sqrt2$

$DE^2 = BD^2 - BE^2 = \frac{17^2}{4} - 4\cdot17 = 17\cdot\left(\frac{17}{4}-4\right) = \frac{17}{4}$

$DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$MB^2 = 4\cdot17 - 8 = 4(17-2) = 2\sqrt{15}$

$\frac{-\sqrt5+2}{\sqrt5+2} = -\frac{(\sqrt5-2)^2}{}$

$CM = CD + BD - BM = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} - 2\sqrt{15} =$

$\frac{2-\sqrt5}{\sqrt5+2} = \frac{4+5-2\cdot4\sqrt5}{4} = 9$

$= 15 - 2\sqrt{15} = \sqrt{15}\,(\sqrt{15}-2)$

$32 + \frac{1}{2} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(10x-x^2)^{\log_3 3} + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x-x^2 = 9$

$3^2+4^2 \geq 5^2$ ✓

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha+2\beta)$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) =$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cos(2\alpha+2\beta)$

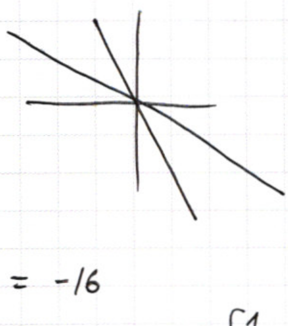
$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 2\beta$

$f'(1/4) = 4 + \cancel{\frac{4}{1-5} = 4 + -1 = 3}$

$f'(1/4) = -\frac{16}{16} = -1$

$f'(a)(x-1/4)+f(a)$ $\qquad \frac{3}{4}a = -4$

a



$f'(1) = -16$

$x \in \left[\frac14, 1\right] \quad f' \in [-16, -1]$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

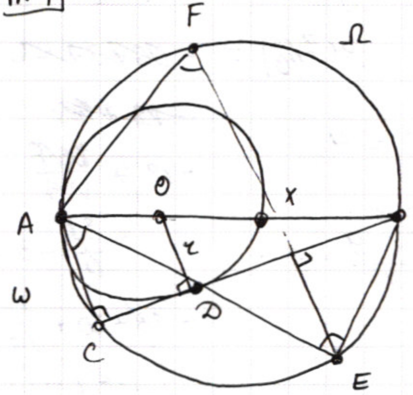
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



$\angle AFE$, r, R, $S_{\triangle AEF}$ — ?

$CD = 15/2 \quad BD = 17/2$

- $AC \parallel EF \quad (AC \perp BC)$
- $OD \perp BC$
- $\angle AFE = \angle CAD$

$\frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17/2}{16} = \frac{17}{32}$

$r = \frac{17}{32} AC \quad AC = \frac{32}{17} r$

$\triangle ABC: \; AC^2 + BC^2 = 4R^2$

$\left(\frac{32}{17}\right)^2 r^2 + 16^2 = 4R^2$

- $BX \cdot AB = BD^2 \Leftarrow$ св. т. B

$(2R - 2r) \cdot 2R = \frac{17^2}{4}$

$r^2 = \frac{4R^2 - 16^2}{32^2/17^2} = 17^2 \cdot \left(\frac{4R^2 - 16^2}{32^2}\right) = 289\left(\frac{R^2 - 8^2}{16^2}\right)$

$(R - r) R = \frac{289}{8} \quad R^2 - rR = \frac{289}{8} \quad r = \frac{R^2 - \frac{289}{8}}{R}$

$r^2 = 289 \cdot \frac{R^2 - 64}{256} = \frac{(8R^2 - 289)^2}{R^2}$

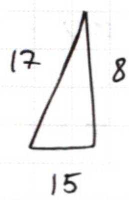
$289R^4 - 289 \cdot 64R^2 = 64R^4 \cdot 256 - 16 \cdot 289R^2 + 289^2 \cdot 256$

$4(R - r)R = 4 \cdot \frac{1}{16} R \cdot R$

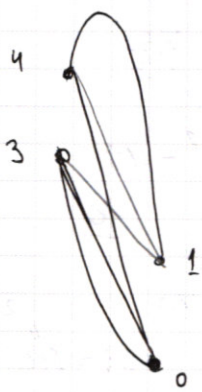
$30^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 15^2\left(4 + \frac{1}{4}\right)$

$\frac{17}{15}$

$170 + 85$
85
255



$\frac{17}{2}$



$\begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a + b = 3 \end{cases}$

$\frac{3}{4}a = -3 \quad a = -1$

$b = 1$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$

$\frac{3}{4}a = -4 \quad a = -\frac{16}{3}$

$b =$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a + b \in [3, 4] \end{cases}$

$\triangle AFE: \; \frac{AE}{2\sin\alpha} = R$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6 $\dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$= g(x)$

$= 4 + \dfrac{4}{4x-5} = f(x)$

$g'(x) = -64x + 36 = -4(16x-9)$

$x = 9/16$

$f'(x) = 4\cdot\left(\dfrac{0-4}{4x-5}\right) = -\dfrac{16}{4x-5}$

$g(\tfrac{1}{4}) = -2+9-3 = 4$

$f(1/4) = \dfrac{4-16}{1-5} = \dfrac{-12}{-4} = 3$

$g(1) = -32+36-3 = 1$

$f(1) = \dfrac{16-16}{\dots} = 0$

$g(9/16) = \cancel{-36\,238 = 0}$

$g(1/4) = -2+9-3 = 4$

$g(1) = -32+36-3 = 1$

$g(9/16) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{81}{16} + \dfrac{36\cdot 9}{16} - 3 =$

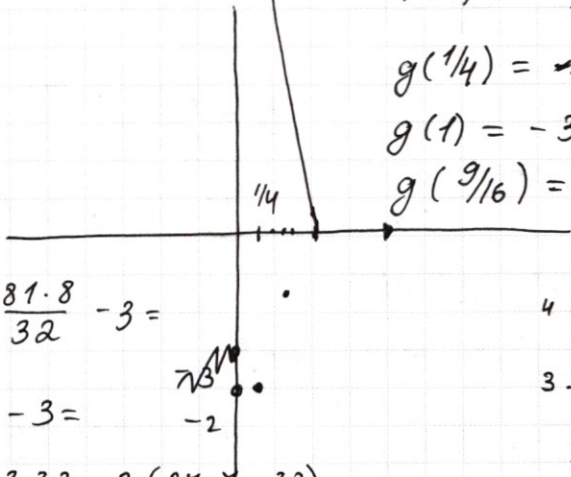
$-18 + \dfrac{36\cdot 9}{16}$

$\times \dfrac{81}{4} - 3 =$

$-18+20+1/4-3$

$-1+1/4$

$-3/4$



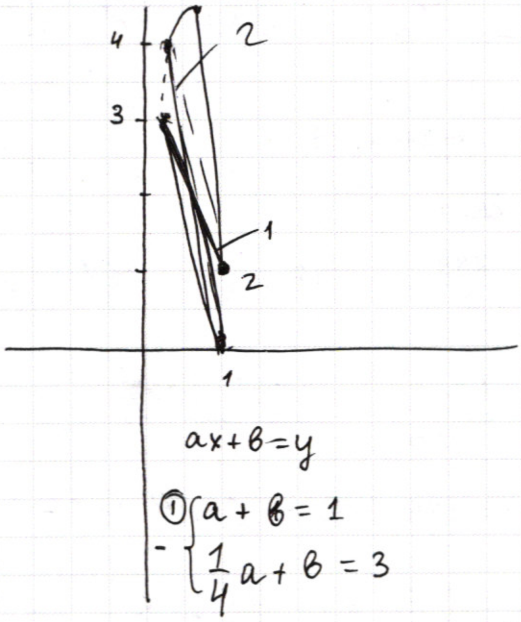
$= -\dfrac{81}{32} + \dfrac{81\cdot 8}{32} - 3 =$

$= +\dfrac{81\cdot 7}{32} - 3 =$

$= \dfrac{81\cdot 7 - 3\cdot 32}{32} = \dfrac{3(27\cdot 7 - 32)}{32}$

$f(9/16) = \dfrac{9-16}{\frac{9}{4}-5} =$

$= \dfrac{-7}{-\frac{11}{4}} = \dfrac{28}{11}$



$ax+b=y$

① $\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{1}{4}a+b=3 \end{cases}$

$\frac{3}{4}a = -2 \quad a = -\frac{8}{3}$

$b = \frac{11}{3}$

②

$g(9/16) = -2\cdot 9 + \frac{81}{4} - 3 = -21+20+1/4 = \frac{-20}{-4} = 5$ $-3/4$

$g(1/4) = -8+9-3 = -2$

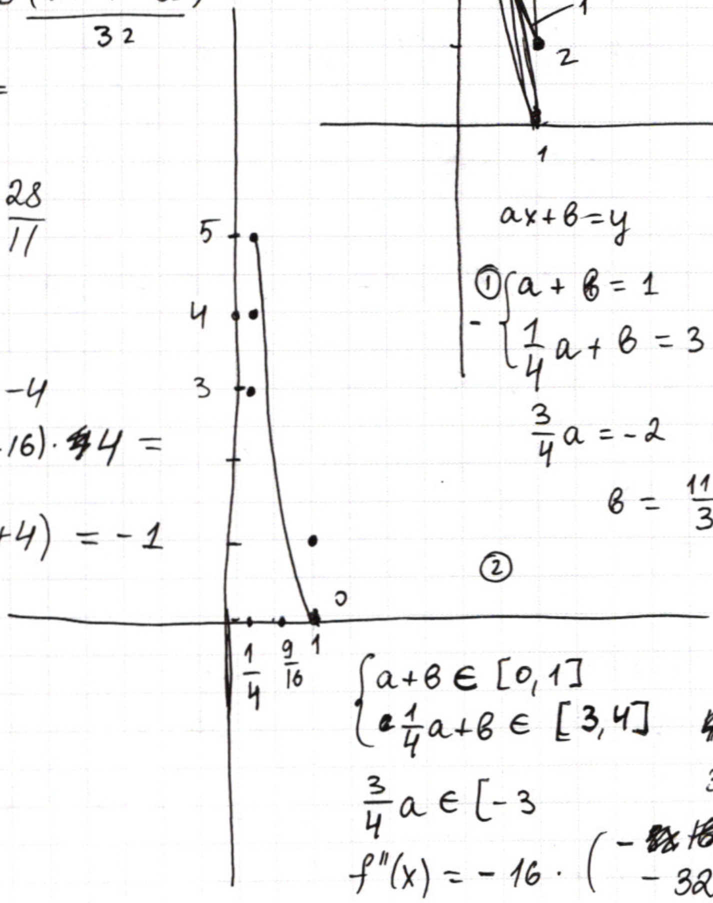
$g(1) = -32+36-3 = 1$

$g-$

$4x-4$

$16(4x-5) - (16x-16)\cdot 4 =$

$= 16(4x-5-4x+4) = -1$



8/5

$\begin{cases} a+b \in [0,1] \\ \frac{1}{4}a+b \in [3,4] \end{cases}$

$16x^2 - 40$

$32x$ 40

$\frac{3}{4}a \in [-3$

$f''(x) = -16\cdot\big(-32x+40$

140 + 49 = 189

189 + 17 = 206

10 14

$2f(a)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(-a) = f(-1) + f(a)$

$f(a) = f(a^2) + f(\frac{1}{a})$

$f(a) = f(-1) + f(-a)$

$\boxed{f(\frac{1}{a}) = -f(a)}$

$f(-a) = f(a)$

$f(a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(a^2) = 2f(a)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N2}$

$$\begin{cases} x^2+36y^2-12x-36y=45 \quad (1) \\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \quad (2) \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6 = 2y(x-6)-(x-6)=(2y-1)(x-6)$

$x^2-12x+36+9(4y^2-4y+1)-36-9=45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$(x-6)-12y+6$, $\quad -12y+6 = 6(2y-1)$

$(2y-1)^2=4y^2-4y+1$

$$\begin{cases} (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \\ (x-6)+6(2y-1)=\sqrt{(x-6)}\cdot\sqrt{2y-1} \end{cases}$$

$\sqrt{x-6} = m$, $\quad \sqrt{2y-1} = t$

$m^2-mt+6t^2=0 \qquad (m-3t)(m+2t)=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} m=3t \\ m=-2t \leftarrow \text{нет реш. кроме} \end{array}\right.$

$m=t=0 \rightarrow x=6,\ y=1/2$ не подх. в (1)

• $\sqrt{x-6}=3\sqrt{2y-1}$

$x-6=9(2y-1)$

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$(2y-1)^2=1 \qquad \left[\begin{array}{ll} 2y-1=1 & (1*) \\ 2y-1=-1 & (2*) \end{array}\right.$

$(1*) \longrightarrow y=1 \qquad x=3\cdot1-6=-3 \qquad \sqrt{-3\cdot1}$?

$(2*) \longrightarrow y=0 \qquad x=3\cdot(-1)-6 = -9$ подх.

$\boxed{N3}$ $\quad 10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

~~$x^2-10x>0$~~ $\qquad 10x-x^2>0$

~~$(x^2-10x)^{\log_3 4} \geq (x^2-10x)+5^{\log_3(}$~~

$a^{\log_b c} = b^{\log_b a\cdot\log_b c} = c^{\log_b a}$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)=t$

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

~~$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \mid :t$~~

~~$1+t^{\log_3 4-\log_3 3} \geq t^{\log_3 5-\log_3 3}$~~

~~$t+t^{\log_3 4} \geq 2t = t^{1+\log_2 t}$~~

$3^{\log_3 t}+3^{\log_3 t\cdot\log_3 4}$

$(10x-x^2)+(10-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t+t^{\log_3 4}=t^{\log_3 5}$

$f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3 4/3}$

$g'(t)=\log_3 5\cdot t^{\log_3 5/3}$

$1+\log_3 4 t^{\log_3 4/3}-\log_3 5\cdot t^{\log_3 5/3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = 2/5$

$\sin 2\alpha \cdot \cancel{\cos}\, 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -2/5$

$\parallel$

$\boxed{N1}$ $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad tg\,\alpha\,?$

$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

① $\cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ ② $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$

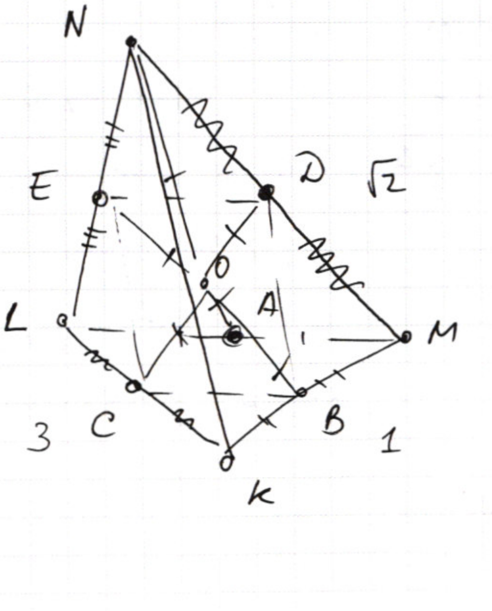
$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \frac{2}{5} + 2\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\cos 2\beta + 2\sin 2\beta + 5\sin 2\alpha = -2$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

EDBC – п/ш



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

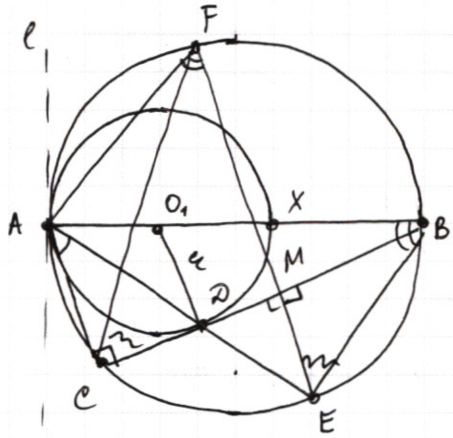
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$ Дано:

Ω и ω кас. в (·) A
AB - диам. Ω
BC - хорда Ω
BD - кас. ω
$AD \cap \Omega = E$
EF - хорда Ω
$EF \perp BC$
$CD = 15/2$
$BD = 17/2$

Найти: r, R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

Решение:
R - рад. Ω, r - рад. ω



1. AB - диам., пров. в общ. (·) кас => $AB \perp l$ (l - общ. кас. окр-тей) тогда AO_1 (O_1 - ц. ω) $\perp l$ => $AO_1 \subset AB$
2. BCA - $\angle$ впис. опир. на диам. Ω => $\angle BCA = 90°$
3. O_1D - r, пров в (·) кас. D => $O_1D \perp BC$

4. $\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ по двум $\angle$ ($\angle ABC$ общ и $\angle O_1DB = \angle ACB = 90°$) => $\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17/2}{16}$; $BC = BD + DC$

тогда $O_1D = r = AC \cdot \frac{17}{32} \Rightarrow AC = \frac{32}{17}r$

из подобия: $\frac{O_1B}{AB} = \cancel{\frac{BD}{BC}}\ \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32} = \frac{2R - r}{2R}$ — т.к. $O_1B = AB - AO_1$, а AB - диам. $\Rightarrow 34R = 64R - 32r$

$30R = 32r \quad R = \frac{16}{15}r$

5. ~~отн. (·) B относ. окр-ти ω:~~
по св-ву кас и сек., пров. из (·) B к ω: $BD^2 = BX \cdot AB = (2R - 2r)2R$
$R = \frac{16}{15}r$, $r = \frac{15}{16}R$ | =>

$\Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} R \cdot R$, $\frac{1}{4}R^2 = \frac{17^2}{4}$ $\quad R^2 = 17^2 \Rightarrow R = 17$

$R > 0$ (т.к. R - длина рад.)

тогда $r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

6. $\angle AFE = \angle CBE$ (впис. $\angle$ опир. на 1 дугу)

7. в прямоуг. $\triangle ADC$: $AC = \frac{32}{17}r = \frac{\cancel{32}^{2} \cdot 15 \cdot \cancel{17}}{\cancel{17} \cdot \cancel{16}} = 30$; $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 15^2 \cdot \frac{17}{4}$ (th Пиф; $30^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$)

~~$tg\angle CAE = \frac{CD}{AC} = \frac{30}{15/2} = 4 \Rightarrow \angle AFE = \angle CAE = arctg\, 4$~~ $\quad AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

8. $\triangle ADC \sim \triangle BED$ по 2 угл. ($\angle ACD = \angle DEB = 90°$ ($\angle DEB$ впис. опир на диам AB), $\angle ADC = \angle BDE$ - верт.):

$\frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BD} \rightarrow BE = \frac{BD \cdot AC}{AD} = \frac{17/\cancel{2} \cdot 30^{2}}{\cancel{15}\sqrt{17}/\cancel{2}} = 2\sqrt{17}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

9. в $\overset{\text{прямоуг}}{\triangle} ABE$: $\cos \angle ABE = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{2\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

тогда $\angle AFE = \angle ABE = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

10. $\triangle ADC \sim \triangle DME$ по 2∠: $\dfrac{DM}{CD} = \dfrac{DE}{AD}$

th Пиф $\triangle BDE$

$$DE^2 = BD^2 - BE^2 = \frac{17^2}{4} - 4\cdot 17 = 17\left(\frac{17}{4} - 4\right) = \frac{17}{4}$$

$$DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{DE\cdot CD}{AD} = \frac{\sqrt{17}/2 \cdot 15/2}{15/2\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{2}$$

11. th Пиф $\triangle DEM$: $ME^2 = DE^2 - DM^2 = \dfrac{17}{4} - \dfrac{1}{4} = 4$

$ME = 2$

12. $BM = BD - DM = \dfrac{17}{2} - \dfrac{1}{2} = 8$

$CM = CD + DM = \dfrac{15}{2} + \dfrac{1}{2} = 8$

13. $\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ EF \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow CM$ − выс $\triangle AFE$

14. $\triangle FMC \sim \triangle BME$ по 2 угл. (опир. на дугу BF и прямые):

$$\frac{FM}{BM} = \frac{CM}{ME} \Rightarrow FM = \frac{BM\cdot CM}{ME} = \frac{8\cdot 8}{2} = 32$$

15. $S_{\triangle AFE} = \dfrac{1}{2} CM\cdot FE = \dfrac{1}{2} CM\cdot(FM+ME) = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\dfrac{65}{2} = 130$

Ответ: $r = \dfrac{255}{16}$, $R = 17$, $\angle AFE = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $S_{AFE} = 130$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N5}$ $f(a^2) = f(a) + f(a) = 2f(a)$ (1) (по усл. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\forall a, b$)

$f(a) = f(a^2) + f\left(\frac{1}{a}\right) \overset{\text{из } (1)}{=} 2f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

найдём знач. f для нат. чисел от 2 до 25:

N	2	3	4*	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f(N)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

по св-ву $f(p) = [p/4]$ и так для всех простых

N	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(N)	4	0	4	1	1	2	5	0	2

* $f(4) = f(2) + f(2)$

$f(6) = f(2) + f(3)$ и так представляем все числа через уже посчит. значения простых

$f(x/y) = f(x) - f(y)$, где $x, y \in \mathbb{N}$

чтобы $f(x/y)$ было < 0 необх., чтобы $f(x) < f(y)$

осталось перебрать значения x и соотв. им y

$f(x) = 0$: $10 \cdot 14^* = 140$

таких x, что $f(x) = 0$

* подойдет $\forall$ y, такой, что $f(y) > 0$ (т.е. все ост. числа, где $f(y) \neq 0$)

$f(x) = 1$: $7 \cdot 7 = 49$

к-во таких x к-во y, таких, что $f(y) > 1$

$f(x) = 2$: $3 \cdot 4 = 12$ (принцип аналогичен предыдущ.: выбираем x из таблицы и подбираем к ним подх. y, считаем к-во пар)

$f(x) = 3$: $1 \cdot 3 = 3$

$f(x) = 4$: $2 \cdot 1 = 2$

$f(x) = 5$ нет смысла рассматривать, т.к. при $x \in \mathbb{N}$ и $x \in [2, 25]$ максим. знач. $= 5 \Rightarrow \nexists y : f(y) > 5$

итоговое кол-во пар: $140+49+12+3+2=206$

Ответ: всего $\exists$ 206 удовл. условие пар чисел (x,y)

$\boxed{N2}$ $\begin{cases} x^2+36y^2-12x-36y=45 \\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-12x+36+9(4y^2-4y+1)-36-9=45 \\ x-6-12y+6=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \quad (1) \\ (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \quad (2) \end{cases}$ $\rightarrow$ должно выполн.: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-1\geq 0 \\ x-6\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-1\leq 0 \\ x-6\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$!

(2) $\exists\ \sqrt{|x-6|}=m,\ \sqrt{|2y-1|}=t$

$m^2-6t^2-mt=0 \qquad (m-3t)(m+2t)=0 \qquad \left[\begin{array}{l} m=3t \\ m=-2t \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{|x-6|}=3\sqrt{|2y-1|} \quad (*) \\ \underbrace{\sqrt{|x-6|}}_{\geq 0}=\underbrace{-2\sqrt{|2y-1|}}_{\leq 0} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \\ 2y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=1/2 \end{cases}$ подставим в (1): $0+0=90$? не подх.

$(*)$ $\left[\begin{array}{ll} x-6=9(2y-1) & (3) \\ x-6=-9(2y-1) & (4) \end{array}\right.$

$(3)\rightarrow(1)$

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$(2y-1)^2=1 \quad \left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

$y=1 \rightarrow x-6=9,\ x=15$ подх. под ! $\left(\begin{cases} x-6\geq 0 \\ 2y-1\geq 0 \end{cases}\right)$

$y=0 \rightarrow x-6=-9,\ x=-3$ подх. под ! $\left(\begin{cases} x-6\leq 0 \\ 2y-1\leq 0 \end{cases}\right)$

$(4)\rightarrow(1)$

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$(2y-1)^2=1 \quad \left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

$y=1 \rightarrow x-6=-9,\ x=-3$ не подх. под !

$y=0 \rightarrow x-6=9,\ x=15$ не подх. под !

Ответ: $(15,1);\ (-3,0)$

$\boxed{N6}$ $\underbrace{\dfrac{16x-16}{4x-5}}_{f(x)} \leq ax+b \leq \underbrace{-32x^2+36x-3}_{g(x)}$

$g'(x)=-32\cdot 2x+36=-4(16x-9)$ $\quad g\uparrow\ (-\infty,\ 9/16]$; $g\downarrow\ [9/16,\ +\infty)$

$f(x)=4+\dfrac{4}{4x-5} \quad f\downarrow\ (-\infty,\ 5/4);\ (5/4,\ +\infty)$

$f'(x)=-\dfrac{16}{(4x-5)^2} \quad f''(x)=-16\cdot\left(\dfrac{-32x+40}{(4x-5)^4}\right)=16\cdot 8\cdot\dfrac{1}{(4x-5)^3}$

Γ_f вып. вверх на пром. $[1/4,1]$ $(f''(x)<0)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

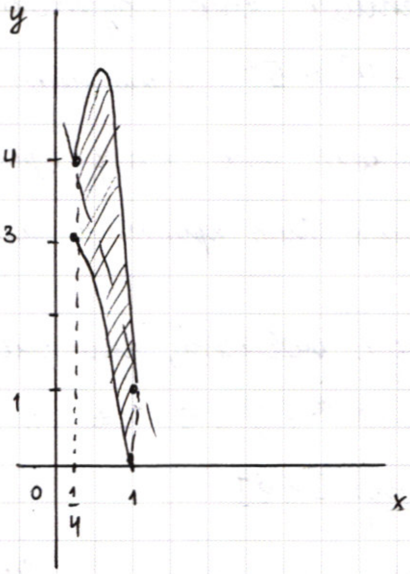
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

построим график ф-й:

$f(1) = 0$
$f(1/4) = 3$

$g(1) = -32+36-3 = 1$
$g(1/4) = -2+9-3 = 4$

чтобы нер-во было выполнено для всех $x \in [1/4, 1]$, $y = ax+b$ должен лежать внутри заштрихованной области

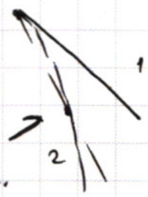


① $\exists$ $y = ax+b$ прох. через (·) $(1/4, 3)$ и $(1,1)$:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 1/4\, a+b=3 \end{cases}$$

$\frac{3}{4}a = -2 \quad a = -\frac{8}{3} \quad b = \frac{11}{3}$

но: ~~ур-е кас к Γ_f в (·) $(1/4, 3)$~~ $y = x - 1/4 + 3$
коэф. наклона кас к Γf в (·) $(1/4, 3)$ равен $f'(1/4) = -1$, а значит, что любой Γ с коэф. накл. по модулю > 1 будет пересекать Γf:



$|k_1| < |k_2|$

пересеч.

при этом была выбрана крайняя точка с коэф. накл. min по модулю:

$|k_1| < |k_2|$

а значит так не могло быть

② $\exists$ $y = ax+b$ прох. через (·) $(1/4, 4)$ и $(1, 0)$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 1/4\, a+b=4 \end{cases} \quad a = -\frac{16}{3} \quad b = \frac{16}{3}$$

а может $\in \left[-\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right]$; произв. $f' \in [-16, -1]$ => для a $\exists$ b:

совп. с кас. (и могут не удовл. утв. $x \in [1/4, 1]$)

$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ a+b \leq 1 \\ \frac{1}{4}a+b \geq 3 \\ \frac{1}{4}a+b \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b \geq -a \\ b \leq 1-a \\ b \geq 3 - 1/4\, a \\ b \leq 4 - 1/4\, a \end{cases} \qquad + \qquad a = -\frac{16}{(4x_0-5)^2} \to \cancel{4x_0 - 5 = \sqrt{\frac{16}{a}} - \frac{16}{a}}$$

$b \geq -ax_0 + f(x_0)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\boxed{N3}$ $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

применим св-во $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ и раскроем модуль, т.к. из ОДЗ логарифма $10x - x^2 > 0$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

заметим, что подставив $10x - x^2 = 3^2$, получим:

$3^2 + 4^2 \geq 5^2$, а именно равенство $3^2+4^2=5^2$

а значит л.ч. > п.ч при $10x - x^2 \geq 3^2$ (нер-во Δ)

(можно было привести нер-во к виду $3^{\log_3(10x-x^2)} + 4^{\log_3(10x-x^2)} \geq$

$\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$,

тогда очевидно, что оно верно при $\log_3(10x-x^2) \geq 2$)

$x^2 - 10x + 9 \leq 0 \iff x \in [1, 9]$

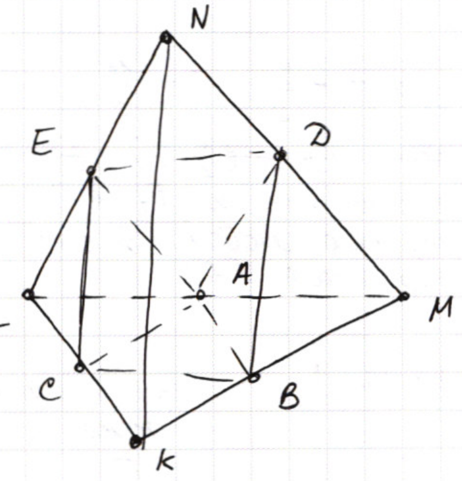
Ответ: $[1, 9]$

$\boxed{N7}$ Дано:
пир. $KLMN$
N, A, B, C, D, E леж. на сф.
A, B, C, D, E – сер. реб.

$KL = 3$
$M\cancel{K} = 1$
$MN = \sqrt{2}$

Найти: LM
$\min r$
(r – рад. сф.

Решение:



1) $ED \parallel LM$ (ср. лин) ; $CB = \frac{1}{2} LM$ (ср.лин.) $\Rightarrow$ $EDBC$ – п/м
$ED = \frac{1}{2} LM$; $CB \parallel ED$

2) вокруг $EDBC$ можно опис. окр-ть (если (.) леж. на сфере, то есть (о), рав. от вершин $\Rightarrow$ можно провести $\perp$ к $(EDBC)$ $\Rightarrow$ $\exists$ ц. опис. окр-ти) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $EDBC$ – ~~прямоуг~~. ромб

3) $ND \parallel EA$ (ср.лин.) $\Big| \Rightarrow NDAE$ п/м
$NE \parallel AD$ (ср. лин)

4) аналогично п. 2 $NDAE$ ~~прямоуг~~. ромб

5) аналогично п. 1 и п. 2 ~~EA~~

$\boxed{N1}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \Longrightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

подст. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

① $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = \frac{2}{5}$ (из основн. тригонометр. тожд.-ва)

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -1$

$2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sqrt5\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\sqrt5$

$\cancel{3\cos^2\alpha + 2\sqrt5\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0}$

$\cancel{D/4 = 5+3 = 8 \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt5\pm2\sqrt2}{3}\sin\alpha}$

$(2+\sqrt5)\cos^2\alpha + 2\sqrt5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + (\sqrt5-2)\sin^2\alpha = 0$

$D/4 = 5-(\sqrt5-2)(\sqrt5+2) = 5-1 = 4$

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt5\pm2}{\sqrt5+2}\sin\alpha \quad \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = -\sin\alpha\\ \cos\alpha = \frac{2-\sqrt5}{2+\sqrt5}\sin\alpha\end{array}\right.$

тогда $\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = -1\\ tg\,\alpha = \frac{2+\sqrt5}{2-\sqrt5}\end{array}\right.$

② $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = -\frac{2}{5}$

–II–

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{2}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sqrt5\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sqrt5$

$(2+\sqrt5)\sin^2\alpha + 2\sqrt5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + (\sqrt5-2)\cos^2\alpha = 0$

ур-е аналог. ① по коэф.

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = -\cos\alpha\\ \sin\alpha = \frac{2-\sqrt5}{2+\sqrt5}\cos\alpha\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = -1\\ tg\,\alpha = \frac{2-\sqrt5}{2+\sqrt5}\end{array}\right.$

Ответ: $tg\,\alpha = -1$, $tg\,\alpha = \frac{2-\sqrt5}{2+\sqrt5}$ или $tg\,\alpha = \frac{2+\sqrt5}{2-\sqrt5}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА