МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\overset{?}{\leqslant} ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

ОДЗ: $x \geq 12y$ (1)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x-6=a \\ 2y-1=b \end{matrix} \Rightarrow$$

ОДЗ: $a \geq 6b$ (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \ (*) \\ a^2+9b^2=90 \ (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} a=4b \\ a=9b \end{matrix}\right. \\ a^2+9b^2=90 \ (**) \end{cases}$$

$(*)$: $a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13b\cdot a+36b^2=0$

$D=169b^2-36\cdot 4b^2=25b^2=(5b)^2$.

$a_1=\frac{13b-5b}{2}=4b$

$a_2=\frac{13b+5b}{2}=9b$;

1) $a=4b \Rightarrow a^2=16b^2$

$25b^2=90$

$b^2=90/25=\frac{18}{5}$;

$b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$;

$a=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$;

2) $a=9b \Rightarrow a^2=81b^2$

$90b^2=90$

$b^2=1$

$b=\pm 1 \Rightarrow a=\pm 9$

С учетом ОДЗ (2): $b=1$; $a=9$ и $b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$ и $a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$;

$\boxed{1}$ $\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=1 \\ x=15 \end{matrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} 2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \\ x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{matrix}$;

Ответ: $(15;1)$, $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$.

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -1/\sqrt{5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$;

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}};$$

I) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; тогда подставляем:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1;$$

$tg\,\alpha = t$, тогда $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2-2t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 2t+2-2t^2 = -1-t^2$

$t^2-2t-3=0$

$t_1 = -1 \Leftrightarrow tg\,\alpha = -1$

$t_2 = 3 \qquad tg\,\alpha = 3$

II) $\sin 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$; тогда аналогично I:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t^2-2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 2t+2t^2-2 = -1-t^2$$

$3t^2+2t-1=0$

$t_1 = -1 \Leftrightarrow tg\,\alpha = -1$

$t_2 = \frac{1}{3} \qquad tg\,\alpha = 1/3.$

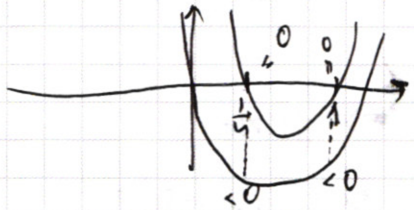
Ответ: $tg\,\alpha = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ для $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$

1) $ax+b \le -32x^2+36x-3$

$32x^2+(a-36)x+b+3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{4}) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\frac{a}{4}-9+b+3 \le 0 \\ 32+a-36+b+3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}+b-4 \le 0 \\ a+b-1 \le 0 \end{cases}$

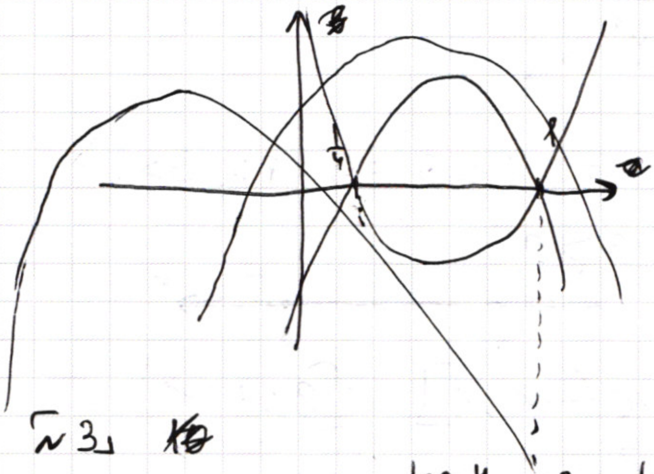
2) $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \Leftrightarrow \frac{16x-16-4ax^2+5ax-4bx+5b}{4x-5} \le 0$

на $[\frac{1}{4}; 1]$ $4x-5<0$ для $\forall x \Rightarrow -4ax^2+5ax-4bx+16x+5b-16 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4ax^2-5ax+4bx-16x-5b+16 \le 0 \Leftrightarrow 4ax^2+(4b-5a-16)x-5b+16 \le 0$

если $a>0$, то $f(\frac{1}{4}), f(1) \le 0$

если $a<0$, то $f(\frac{1}{4}), f(1)$



№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

Из ОДЗ следует, что $10x-x^2>0 \Rightarrow x^2-10x<0 \Rightarrow$ модуль раскрывается однозначно, делая замену $10x-x^2=t$ получим

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \ge 0 \Leftrightarrow 3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t} \ge 0$

($t^{\log_3 4}=4^{\log_3 t}$ по св-ву лог-ов). Делая ещё одну замену $\log_3 t = a$

получим

$3^a+4^a-5^a \geqslant 0 \quad \Big| : 5^a > 0$

$\dfrac{3^a+4^a}{5^a} \geqslant 1$; Рассмотрим ф-цию $f(x) = \dfrac{3^x+4^x}{5^x}$.

По индукции докажем ее ~~возрастание~~ убывание:

База: $x=0$: $\dfrac{3^0+4^0}{5^0}=2$; $\dfrac{3^1+4^1}{5^1}=\dfrac{7}{5}$

$$f(0) > f(1)$$

Пусть верно для $n=k$. Докажем для $k+1$.

$$\frac{3^{k+1}+4^{k+1}}{5^{k+1}} \vee \frac{3^k+4^k}{5^k} \quad \Big| \cdot 5^{k+1} > 0$$

$3\cdot 3^k+4\cdot 4^k \vee 5\cdot 3^k+5\cdot 4^k \Rightarrow$ знак $<$

Последнее нер-во, очевидно, выполняется.

Значит, такая ф-ция убывающая. Вернёмся к нашей задаче:

$a=2$: $\dfrac{3^2+4^2}{5^2}=1$ Значит по вышедоказанному

при $a>2$: $\dfrac{3^a+4^a}{5^a}<1$

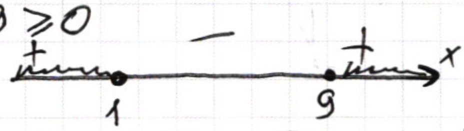
при $a<2$: $\dfrac{3^a+4^a}{5^a}>1$

Отсюда $a \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 3^2=9$ (т.к. $3>1$)

Вернём t : $10x-x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2-10x+9 \geqslant 0$

$x_1=1$

$x_2=9$



$x \in (-\infty;1] \cup [9;+\infty)$

При этом ОДЗ: $10x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-10x<0$

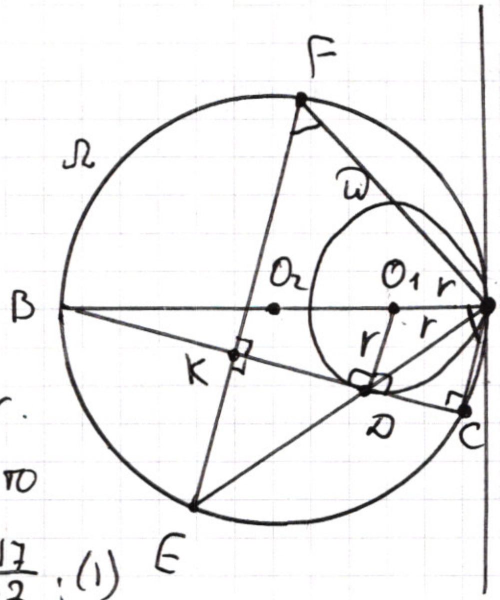
$x(x-10)<0 \Rightarrow x \in (0;10)$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[№4]



а) Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей ω и Ω соответственно, а r и R - их радиусы. $BC = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$\triangle ACB$ - прямоуг ($\angle C = 90°$) т.к. AB - диам

$O_1D \perp BC$ т.к. D - точка касания, $O_1D = r$.

Таким образом, т.к. $\angle ABC$ - общий ($= \angle O_1BD$) то

$\triangle O_1BD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17/2}{16} = \frac{17}{32}$; (1)

т.к. $O_1D \perp BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow O_1D \parallel AC \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{AO_1}{O_1B} = \frac{CD}{DB} = \frac{15}{17} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{r}{2R - r} = \frac{15}{17} \Leftrightarrow R = \frac{16}{15} r$;

Из (1) получим $\frac{r}{AC} = \frac{17}{32} \Rightarrow AC = \frac{32}{17} r$.

Теорема Пифагора для $\triangle ABC$: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$\left(\frac{32}{17} r\right)^2 + 16^2 = 4R^2 = 4 \cdot \left(\frac{16}{15} r\right)^2$$

Отсюда $r = 255/16 \Rightarrow R = \frac{16}{15} \cdot \frac{255}{16} = \frac{255}{15} = 17$.

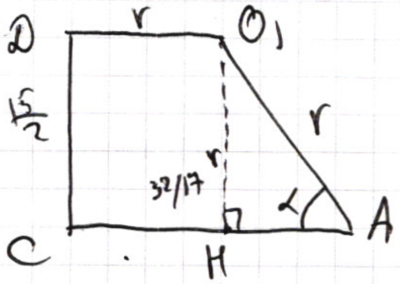
[№5] т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$, то при $a = b = 1$ имеем: $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1) = 0$.

[№4] (продолжение) т.к. $EF \perp BC$, $O_1D \perp BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow EF \parallel O_1D \parallel AC$

$\Rightarrow$ в силу равенства углов между парал. прямыми (разных) получим, что трапеция CAFK подобна трапеции DO_1AC

Р-м трапецию DO_1AC



Опустим $O_1H \perp AC$, тогда $CH = DO_1 = r$

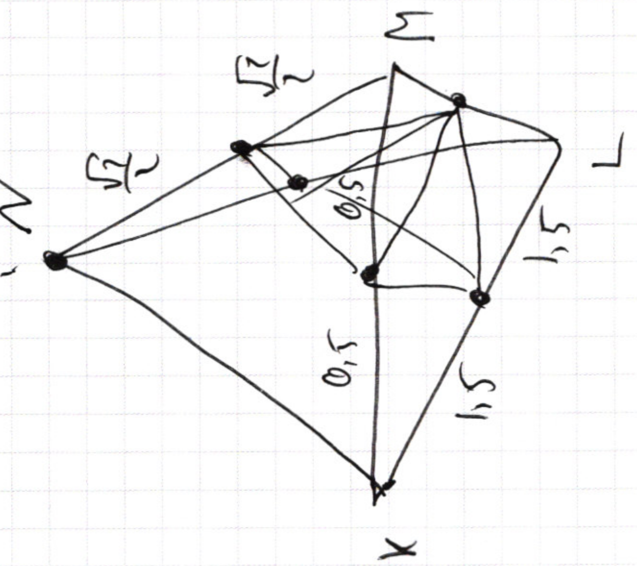
и $AH = AC - CH = \frac{32}{17}r - r = \frac{15}{17}r$;

$\triangle O_1HA$: $\cos\alpha = \frac{AH}{AO_1} = \frac{15}{17}r \cdot \frac{1}{r} = \frac{15}{17}$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{15}{17}$; $= \angle AFE$ из подобия трапеций.

Ответ: ~~NB~~ радиусы $^{255}/_{16}$ и 17; угол $= \arccos {}^{15}/_{17}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)


M
√2/2
√2/2
N
L
0,5
1,5
0,5
1,5
K

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \boxed{x-12y} = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2-12x+36+36y^2-36y \Rightarrow (x-6)^2+(6y-3)^2=90$

26 $(6y)^2$ $2\cdot 18y$ $+9$

$2\cdot 6\cdot 3y$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x \geq 12y$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

x^2+36y^2

$-12(x+3y)=45$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cos\alpha \neq 0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\Downarrow$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta))$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+$

$+\sin 2\alpha = -2/5$

36^2

$\times 4$

144

$2xy-12y-x+6=2y(x-6)-(x-6)=$

$=(2y-1)(x-6)$

$$\boxed{\begin{aligned} x-6&=a \\ 2y-1&=b \end{aligned}}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$x-6-6(2y-1)=$

$=x-6-12y+6=x-12y$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$2a^2-13ab+45b^2-90=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2=(5b)^2$

$\Leftarrow$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$a^2+9b^2-90=0$

$D=189b^2$

$2y-1=\frac{-3\sqrt{10}}{5}$

$2y=\frac{-3\sqrt{10}}{5}+1=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}$

$\frac{-12\sqrt{10}}{5}+6=+\frac{30}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{32^2}{17^2} \cdot r^2 + 16^2 = \frac{4 \cdot 11^2}{15^2} r^2$

$4 \cdot 256 = 1024$

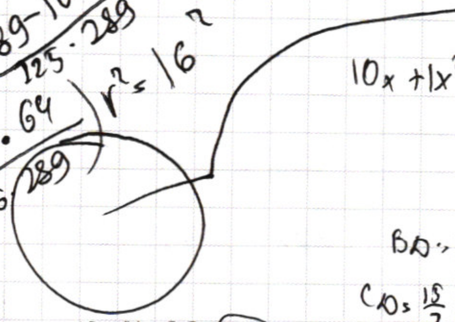
$\left(\frac{4 \cdot 11^2}{15^2} - \frac{32^2}{17^2}\right) r^2 = 16^2$

1024

$\frac{\cancel{484} \cdot 289 - 1024 \cdot 225}{225 \cdot 289}$

$\frac{484}{225} - \frac{1024}{289}$

$\left(\frac{1024 \cdot 64}{225 \cdot 289}\right) r^2 = 16^2$



$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$15 \times 15 = 75, 15, 225$

$16 \times 16 = 96, 16, 256$

$121 \times 4 = 484$

$32 \times 32 = 64, 96, 1024$

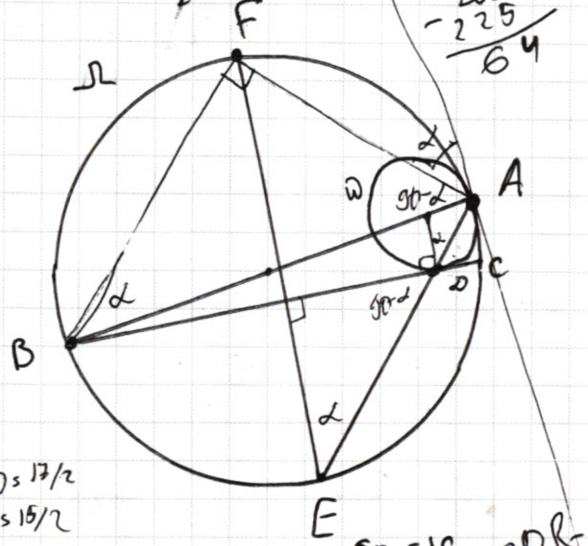
$BD = \frac{17}{2}$

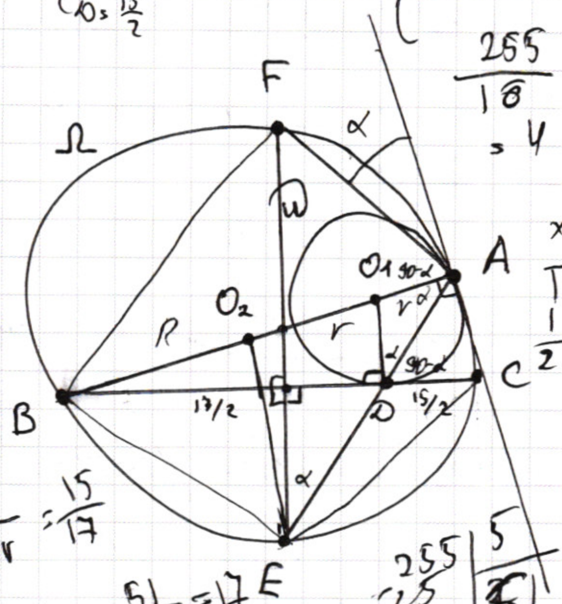
$CD = \frac{15}{2}$

$\frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = \boxed{16}$

$289 - 225 = 64$

$\frac{255}{18} \cdot 2 = 4\ 3$





$15 \times 17 = 105, 15, 255$

$\frac{r}{2R-r} = \frac{15}{17}$

$\frac{51}{3} = 17$

$255 \mid 5$, -25, 51, 3

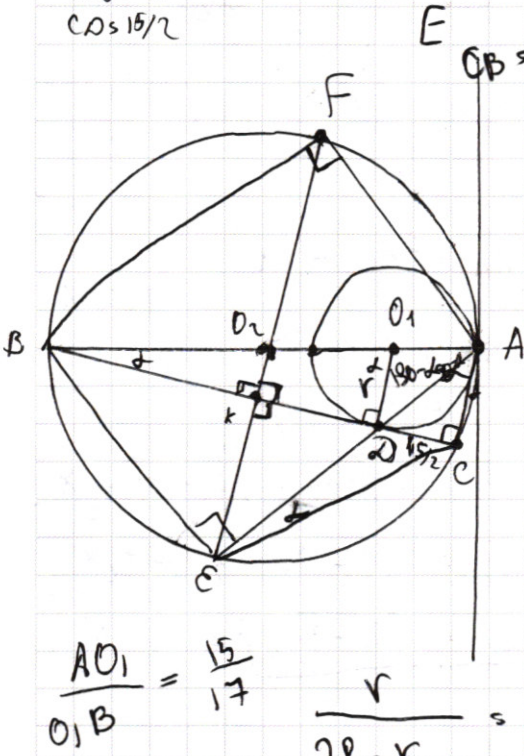
$BD = 17/2$

$CD = 15/2$

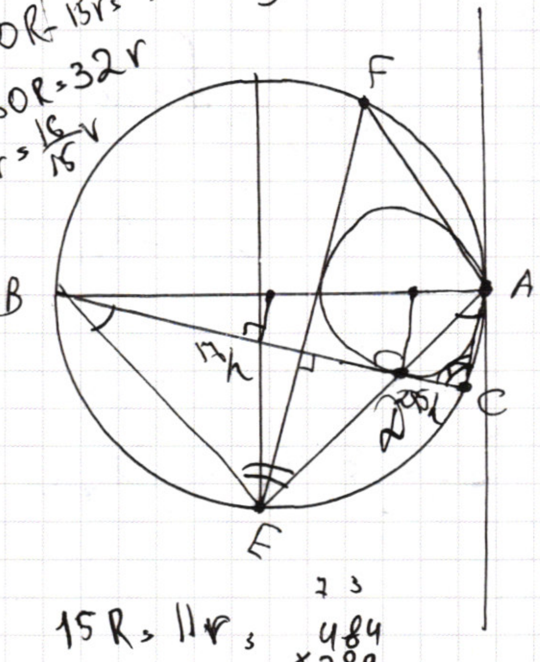
$CB = 16$ $30R - 15r = 17r$

$30R = 32r$

$R = \frac{32}{30} r = \frac{16}{15} r$



$\frac{AD}{DE} =$



ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0$

$x^2 - 10x + 5^{\log_3 (10x - x^2)} - |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \leq 0$

$\frac{AO_1}{O_1B} = \frac{15}{17}$

4

$AB =$

$\frac{r}{2R - r} = \frac{15}{7}$

$30R - 15R = 7r$

$30R = 22r$

$15R = 11r$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{BD}$

$AD \cdot DE = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$484 \times 289 = 4356, 3872, 968, 139876$

139876

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{9}{16}-\frac{1}{4}=$

$\frac{9}{16}-\frac{4}{16}=\frac{5}{16}$

$1-\frac{9}{16}=\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=7/16$

$r^2=\frac{16^2\cdot 15^2\cdot 17}{32^2\cdot 8^2}$

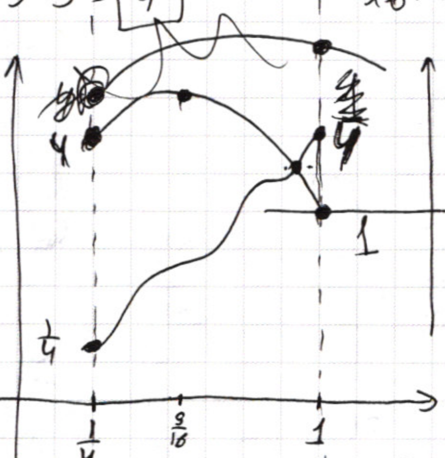
$r=\frac{\cancel{16}\cdot 15\cdot 17}{\cancel{32}_2\cdot 8}$ $\qquad \frac{15\cdot 17}{16}$

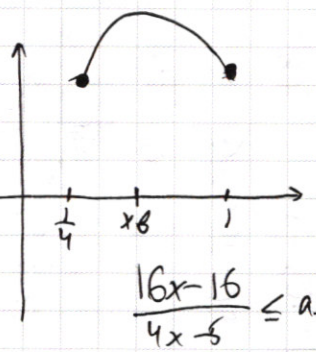
$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=$

$=-2+9-3=\boxed{4}$

$-32x^2+36x-3$

$x_в=\frac{9}{16}$





$\frac{16x-16}{4x-6}\le ax+b$

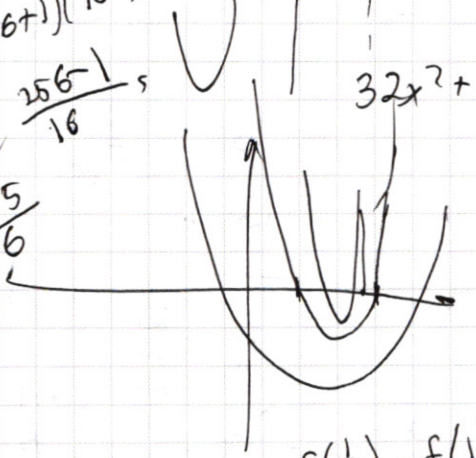
$-32+36-3=1$

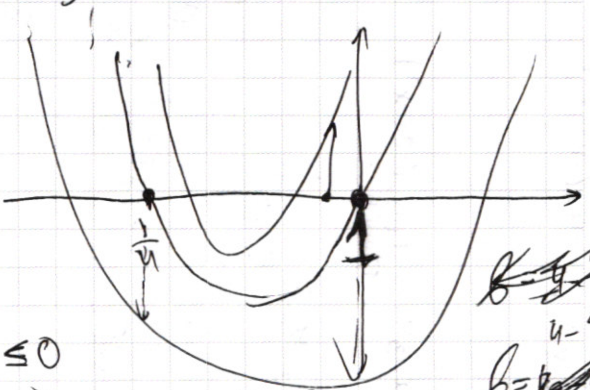
1×1024
225
5120
2048
2048
230400

$(16+1)(16-1)$

$\frac{256-1}{16}=\frac{255}{16}$

$32x^2+(a-36)x+b+3\le 0$





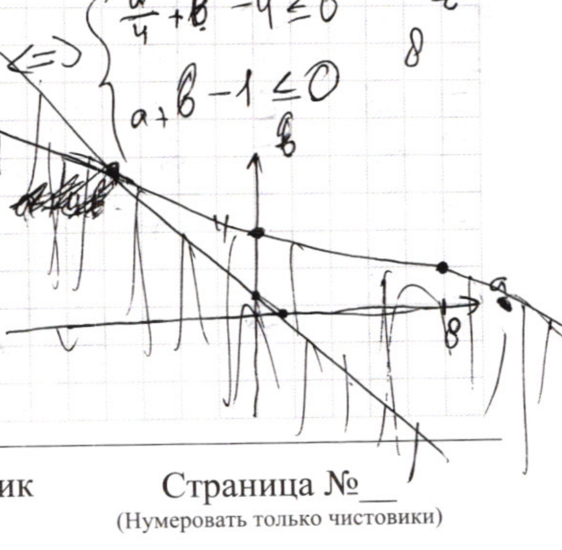
$f(\frac{1}{4})$ и $f(1)\le 0$

$a+b-1\le 0$
$b=1-a$

$$\begin{cases}2+\frac{a}{4}-9+b+3\le 0\\ 32+a-36+b+3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{4}+b-4\le 0\\ a+b-1\le 0\end{cases}$$

$b=4-a/4$

8



$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ ОДЗ: $10x-x^2>0$

из ОДЗ $\Rightarrow$ $x^2-10x<0$:

$f(x)=10x-x^2$ $x_B = \frac{-10}{-2} = 5$

$10x-x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geqslant 0$

$50-25=25$

$\downarrow \Rightarrow f(x) = t \leq 25$

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geqslant 0$

$a^{\log_a a}$

$\log_3 25 =$

$\boxed{\max t}$

$25 + 25^{\log_3 4} - 5^{\log_3 25}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$2\log_3 5 = \frac{2}{\log_5 3}$

$10x-x^2=t$

5

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geqslant 0$

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$t + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t}$

$2^{\log_4 16} = 16^{\log_4 2} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

$3^x + 4^x - 5^x \geqslant 0 \quad | : 5^x > 0$

$2^2 = 4$

$(a^x)' = a\ln x$

$\log_3 t =$ $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 \geqslant 0$

$3^{\log_3 t}$ $3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_5 t} \geqslant 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \geqslant 1$

$\frac{3^x + 4^x}{5^x} \geqslant 1$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow x^2-10x<0$: $\quad 10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$$\frac{3^{a+1}+4^{a+1}}{5^{a+1}} > \frac{3^a+4^a}{5^a}$$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3 10x-x^2}$

$10x-x^2=t,\ t>0$

$5^{\log_3 t}$

$\log_3 x \leq 2$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \geq 0$

$5=2+3$

$x \leq 9$

$t^{2\log_3 2}+t-5^{\log_3 t} \geq 0$

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos x=\cos(-x)$

$(\cancel{2+3})^{\log_3 t}=$

$\log_3 1=0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$$\frac{3\cdot3^a+4\cdot4^a}{5\cdot5^a} > \frac{3^a+4^a}{5^a}$$

$$\frac{3^3+4^3}{5^3}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$$\frac{27+64}{125}$$

$\sin(\alpha)+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=$

$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=f(1)+f(1)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\boxed{f(1)=0}$

$a=2 \quad 2>1$

$a=1 \quad \frac{\frac13+\frac14}{\frac15}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac15}=$

$\frac{-2}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\cancel{\frac{2}{5}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{3+4}{5}>1$

$\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=\frac15$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)+\cos(2\beta)=0$

$=\frac{7}{12}\cdot5>1 \quad f(4)=f(2)+f(2)=$

$f(6)=f(1)+f(3)$

$f(3)=f(3)$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$3\cdot3^a+4\cdot4^a \gtrless 5\cdot3^a+5\cdot4^a$

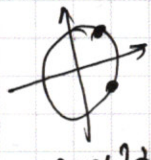
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos x = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cos 2\alpha$



$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\quad 2\beta = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\pi n$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = t$ $\quad 2\beta = -\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\pi n$

$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2-2t^2}{1+t^2} = -1$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

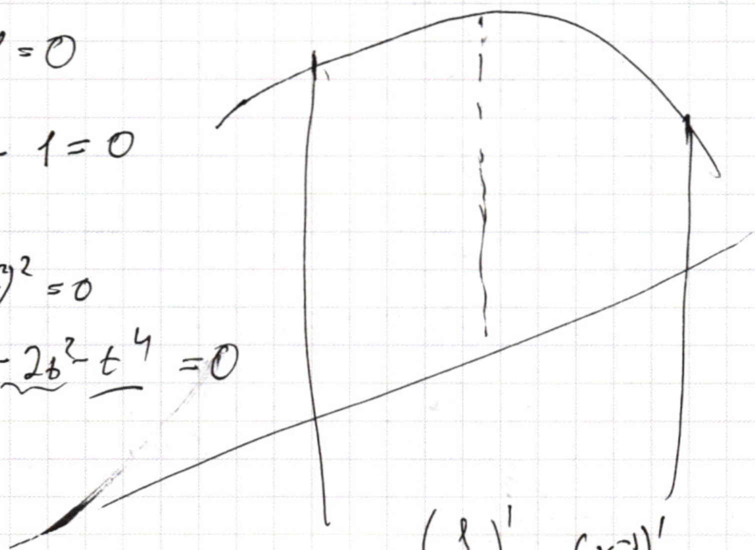
$-32x^2 + 36x - 3$

$x_B = \frac{-36}{-64} = \frac{+18}{32} = \frac{9}{16}$

$2(2\cos^2\alpha - 1) + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0$

$4\cos^2\alpha - 2 + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$



$\frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2\cdot 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - 1 = 0$

$\neq 0$

$4(1-t^2)^2 + 4t(1-t^2) - (1+t^2)^2 = 0$

$4 - 8t^2 + 4t^4 + 4t - 4t^3 - 1 - 2t^2 - t^4 = 0$

$3t^4 - 4t^3 - 10t^2 + 4t + 3 = 0$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' =$

$= -\frac{1}{x^2}$

$\cancel{\frac{16x+16}{4x-5}}$

$\left(4 + \frac{4}{4x-5}\right)' =$

$\begin{array}{r|l} -\ 16x-16 & 4x-5 \\ 16x-20 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$

$= -\frac{4}{(4x-5)^2} \neq 0$

$2t + 2 - 2t^2 = -1 - t^2$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t_1 = -1$

$t_2 =$

$x \neq \frac{5}{4}$

4

$\frac{1}{4}$