МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

$0; -\frac{1}{2}; 2$?

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

$\frac{1}{24}$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

ум. возведения в квадрат.

1. ~~из ОДЗ~~ $x-2y\geq 0 \Rightarrow$ возведём в ^2 1ур-ие

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$\Downarrow$

$x^2-5xy+x+2y+4y^2-2=0$

$\Downarrow$

$x^2+(1-5y)x+2y+4y^2-2=0$

$D=25y^2-10y+1-8y-16y^2+8=$

$=9y^2-18y+9=(3(y-1))^2$

$\Downarrow$

$x=\dfrac{5y-1\pm(3(y-1))}{2}=\left[\begin{array}{l}4y-2\\ y+1\end{array}\right.$

1) $x=y+1 \Rightarrow$ подставим во 2 ур-ие

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0$

$\Downarrow$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$D=16+48=64=8^2$

$y=\dfrac{4\pm8}{4}=\left[\begin{array}{l}-1\\ 3\end{array}\right. \Rightarrow$ 1) $y=-1 \Rightarrow x=0$; 2) $y=3 \Rightarrow x=4$ } - проверка условия: $x-2y\geq 0 \Rightarrow$

$(0;-1) - 2\geq 0$ ⊕

$4-6<0 \Rightarrow$

$(4;3)$ - не подх.

2) $x=4y-2$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$25y^2-32y-18y+12-12=0$

$25y^2-50y=0$

$y(y-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=0 \Rightarrow x=-2\\ y=2 \Rightarrow x=6\end{array}\right. \Rightarrow$ проверка ум.:

$(-2;0)$: $-2<0 \Rightarrow$ ⊖

$(6;2)$: $6-4\geq 0 \Rightarrow$ ⊕.

3) из п.1 и п.2 $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$ - удовл. условию возведения в ^2

Ответ: $(0;-1)$; $(6;2)$

№1.

$$\begin{cases} (1)\ \sin(2a+2B) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ (2)\ \sin(2a+4B) + \sin 2a = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Условие: $tg a = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \cos a \neq 0$

Условие: $\cos a \neq 0$

1. $\sin(2a+4B) + \sin 2a = 2\sin(2a+2B)\cdot\cos 2B = -\frac{4}{5}$

$\sin(2a+2B) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1) $\Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2B = -\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \cos 2B = \frac{2}{5}\cdot\sqrt5 = \frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \sin 2B = \pm\sqrt{1-\cos^2 2B} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

2. $\sin(2a+2B) = \cos 2B\cdot\sin 2a + \cos 2a\cdot\sin 2B = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Downarrow$

~~$\sin 2a$~~

1. $\sin 2B = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2a\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\cdot\sin 2a + \cos 2a = -1$

$\cos 2a + 1 = 2\cos^2 a$

$2\cdot 2\sin a\cdot\cos a + 2\cos^2 a = 0$

$2\cos a(2\sin a + \cos a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos a = 0 \text{ - не уд условие.} \\ \cancel{\sin a + \cos a = 0 \Rightarrow}\ 2\sin a + \cos a = 0 \Rightarrow 2\sin a = -\cos a \Rightarrow tg = \frac{\sin a}{-2\sin a} = -\frac{1}{2} \\ \cancel{\sin a = -\cos a \Rightarrow tg a = -1} \end{array}\right.$

2. $\sin 2B = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2a\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2a - \cos 2a = -1$

$4\sin a\cos a + 1 - \cos 2a = 0$

$1 - 2\sin^2 a = \cos 2a \Rightarrow 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$

$2\sin a(2\cos a + \sin a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin a = 0 \Rightarrow \text{уд. ус.} \Rightarrow tg a = 0 \\ 2\cos a + \sin a = 0 \Rightarrow \sin a = -2\cos a \Rightarrow tg a = \frac{-2\cos a}{\cos a} = -2. \end{array}\right.$

З.т.к мы делали равносильные преобразования и получили 3 ответа $\Rightarrow tg a = \left[\begin{array}{l} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right.$

Ответ: $tg a = \left[\begin{array}{l} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow x(x+18)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

1) на ОДЗ: ~~согласно~~ $|x^2+18x|>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

2) согласно св-ву логарифма $\Rightarrow$ $(x^2+18x)^{\log_{12}13} = (13)^{\log_{12}x^2+18x}$

3) Пусть $t=\log_{12}x^2+18x$, заметим, что $x^2+18x = 12^{\log_{12}x^2+18x}$ (на ОДЗ)

$\Updownarrow$

$$5^t+12^t \geq 13^t$$

$\Updownarrow$

$$5^t+12^t-13^t \geq 0$$

Введём $f(t)=5^t+12^t-13^t$, и исследуем её: при $t\geq 2 \Rightarrow$ ~~13^t всегда больше 5^t+12^t при $t=2 \Rightarrow$ $169=169$, а при $t<2 \Rightarrow 5^t+12^t$~~

~~$f'(t)=\ln 5\cdot 5^t+\ln 12\cdot 12^t-\ln 13\cdot 13^t$~~

1) рассмотрим $t\leq 0 \Rightarrow$

$5^t \geq 13^t$, т.к. 13^t и 5^t $\downarrow$, но $5<13 \Rightarrow$ 13 быстрей убывает $\Rightarrow$ при $t<0 \Rightarrow (+)$.

~~$\Rightarrow 5^t+12^t \geq 13^t,\ t\leq 0$~~

~~2). $t\in[0,2] \Rightarrow$ т.к. 0~~

~~$t\geq 2 \Rightarrow 13^t > 5^t+12^t$ (т.к. при $t=2$ - достигается равенство а дальше ф-ия 13^t растет быстрей)~~

~~3) $t\in[0,2] \Rightarrow 5^t$~~

$(13^2=12^2+5^2)=169$

2) при $t>0$: 1) при $t=2$ - достиг. равенство, а т.к. 13^t растет быстрей 12^t и 5^t, тогда $t>2$ - решений нет.

$\boxed{\text{см на др. странице}}$

№3. продолжение.

3) при $t \in [0;2] \Rightarrow$ 13^t и 5^t+12^t - возрастают,

а также макс. значения достигают при $t=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t \in [0;2]$ ~~$\Leftrightarrow$~~ $\Rightarrow \Sigma\ 5^t+12^t$ - возрастает быстрей,

чем 13^t (т.к они монотонно возрастают),

~~а также что при t... 2~~ $\Rightarrow$ $t \in [-\infty; 2]$

4) делаем обратную замену $\Rightarrow$ $\log_{12} x^2+18x \le 2 \Rightarrow$

воспользуемся методом рационализации

$\Rightarrow$ $\log_{12} x^2+18x \le \log_{12} 144 \Rightarrow$ $\overset{\text{т.к } 12>1}{\Rightarrow}$ $0 < x^2+18x \le 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $x^2+18x-144=0$

$D = \underset{10\cdot18}{180} + \overbrace{\underset{8\cdot10}{80}+\underset{8\cdot8}{64}}^{144} + 144\cdot4 = 180 + 144\cdot5 = 900 = 30^2$

$\underbrace{180+144\cdot5}_{720}$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} = \left[\begin{matrix} 6 \\ -24 \end{matrix}\right. \Rightarrow$ $(x+24)(x-6) \le 0 \Rightarrow$

$x \in [-24; 6]$

2) вспомним ОДЗ $x^2+18x>0 \Rightarrow$ $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$\Downarrow$

$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$, $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

1) Заметим, что $\frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ — ф-ия ~~возраст~~ убывающая на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

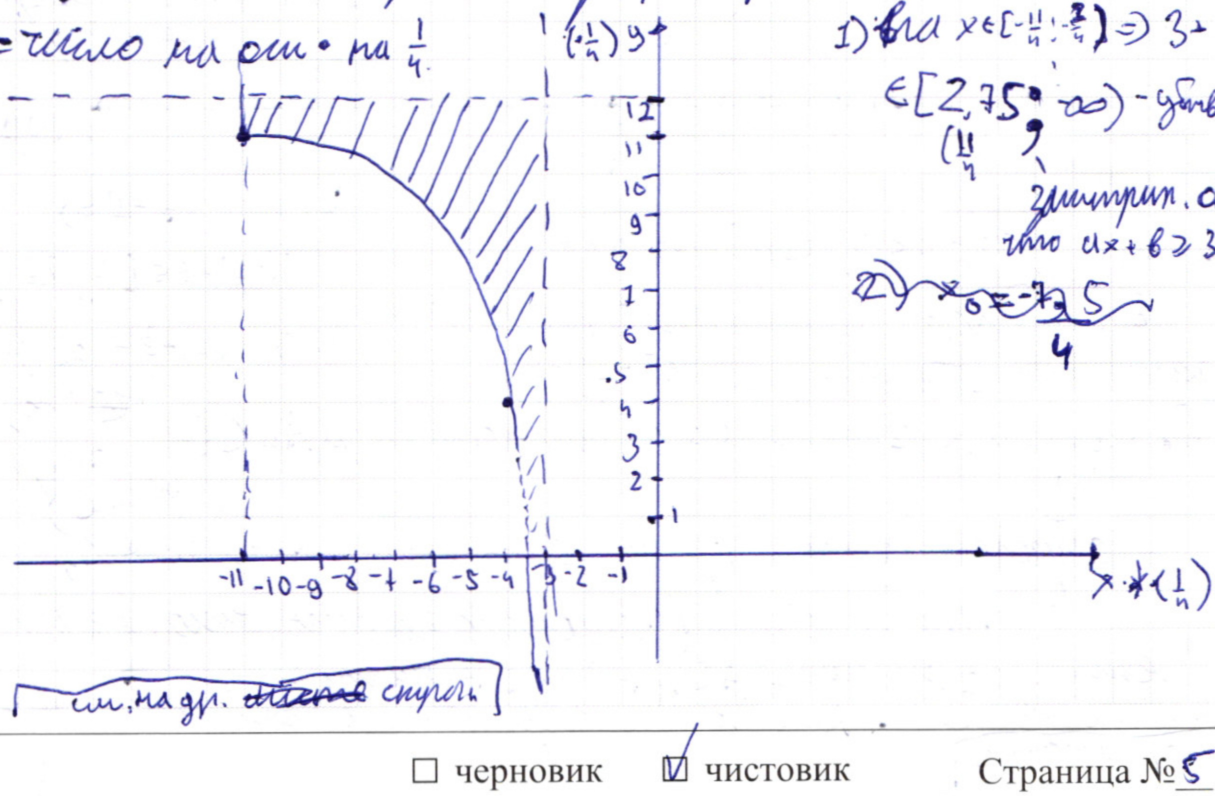
(т.к. $4x+3$ — отриц и при $\uparrow x \Rightarrow$ делим на меньшее отриц. число $\Rightarrow$ вычитаем большее)

2) $-8x^2-30x-17$ — парабола с ветвями вниз и вершиной в $x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} \Rightarrow y_0 = -\frac{15^2}{64}\cdot 8 + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} = \frac{64+25}{8} = \frac{89}{8} = \frac{44{,}5}{4}$

3) $ax+b$ — линейная ф-ия $\cap$ OY в точке b, и с углом наклона $= a$: $(-7{,}5; 44{,}5)$

~~Пост~~ Построим график ф-ии с масштабом (1кл.) $= \frac{1}{4}$ = числа на оси $\cdot$ на $\frac{1}{4}$.



1) для $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}] \Rightarrow 3+\frac{2}{4x+3} \in$
$\in [2{,}75; \infty)$ — убывает.
$(\frac{11}{4};$

заштрих. обл. задает, что $ax+b \ge 3+\frac{2}{4x+3}$

~~2) $x_0 = -\frac{7{,}5}{4}$~~

см. на др. ~~стор~~ сторон

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 продолжение.

построение графиков $y=-8x^2-30x-17$ ⇒ Вп.н парабола симметр отн. вершины ⇒ найдем знач в 2-ух крайних точках

$y=3+\frac{2}{4x+3}$

·

y (·1/4) - для реального знач. надо умн. на $\frac{1}{4}$.

$x=-\frac{11}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$

$(-\frac{3}{4}): -\frac{8\cdot9}{16}+\frac{90}{4}-17=$

$=\frac{360-72-128\cdot2-16}{16}=$

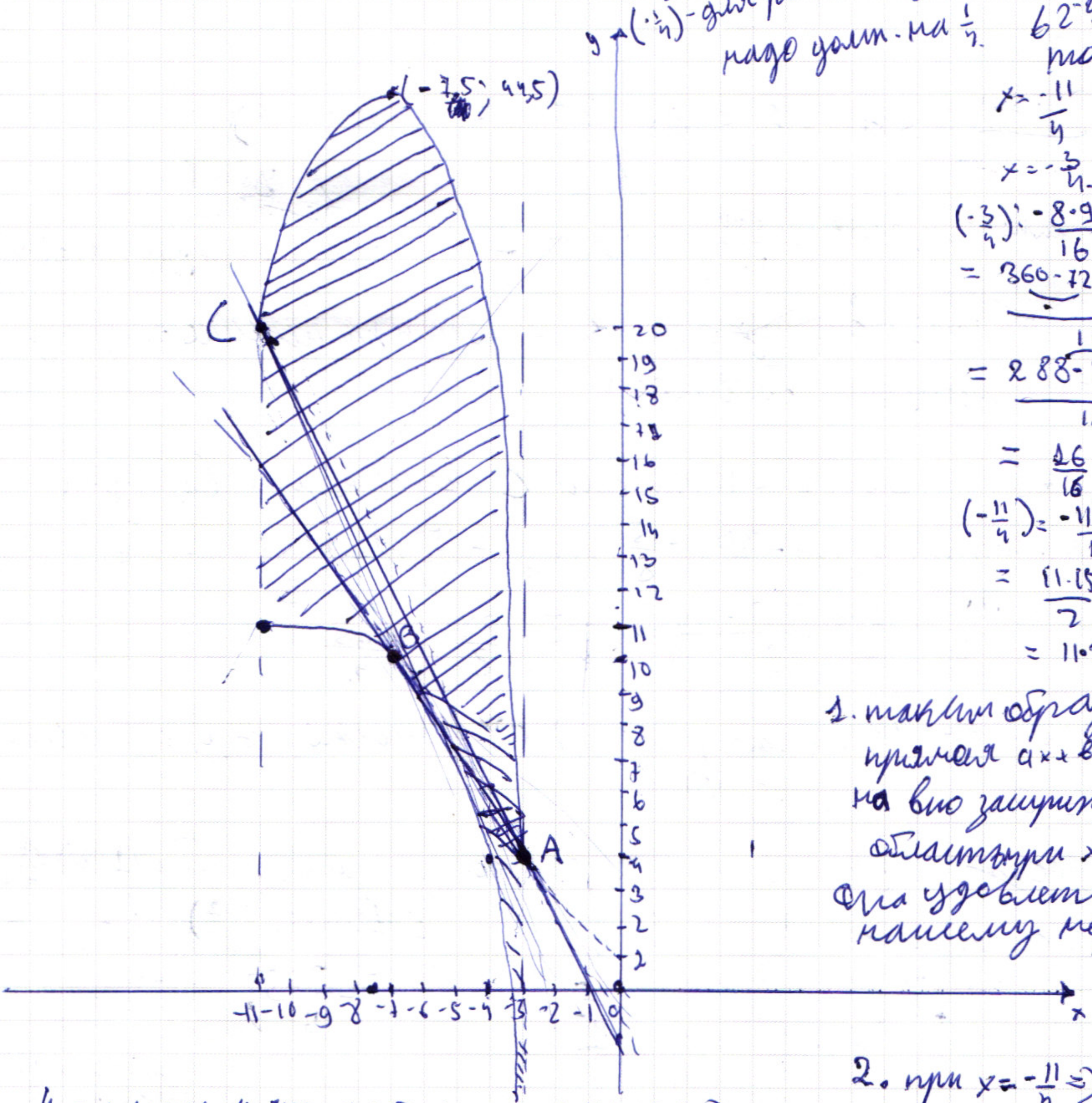
$=\frac{288-256-16}{16}=$

$=\frac{16}{16}=1\left(\frac{4}{4}\right)$

$(-\frac{11}{4})=-\frac{11^2\cdot8}{16}+\frac{11\cdot30}{4}-17=$

$=\frac{11\cdot15}{2}-\frac{11\cdot11}{2}-17=$

$=11\cdot2-17=5\left(\frac{20}{4}\right)$



1. таким образом если прямая $ax+b$ попадает на всю заштрихованную область при $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}]$ ⇒ она удовлетворяет нашему неравенству

2. при $x=-\frac{11}{4}$ ⇒ $a(-\frac{11}{4})+b\in[\frac{11}{4};\frac{20}{4}]$

3. при $x=-\frac{3}{4}$ ⇒ $a(-\frac{3}{4})+b\in(-\infty;4]$.

4. заметим, что $a<0$, иначе при $a\geq0$ ⇒ $ax+b$ не будет полностью пересекать заштрих. область для $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}]$

5. обозначим 2 крайние с областью точки за A и C (как показано на графике)

⇓

определим, когда прямая $ax+b$ - проходит через A и C, а также касат (нетрудно понять, что прямые лежащие между AC и AB где B - точка касания а также между BC и AC - тоже являются подходящими в ответ.

см на др. странице

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6
(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

1. $C\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$

$A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ $\Rightarrow$ ~~прямая~~ $l: \frac{x+\frac{11}{4}}{-\frac{11}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{y-5}{5-1}$

$\frac{4x+11}{-11+3} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow$

$4\left(x+\frac{11}{4}\right) = (y-5)(-8)$

$4x+11 = -8y+40$

$y = -0{,}5x + \frac{29}{8}$

$a = -0{,}5$

$b = \frac{29}{8}$ ~~$-0{,}5$~~

~~$\frac{4x+11}{-8} = \frac{y-5}{4}$~~

~~$4x+11 = -2y+10$~~

~~$\frac{4x+11}{-8} = \frac{y-5}{4}$~~

~~$16x-44 = -8y+40$~~

~~$8y = -16x+84$~~

~~$y = -2x+10{,}5 \Rightarrow$~~

~~$a = 2$~~

~~$b = 10{,}5$~~

1. касат. к графику $y = 3+\frac{2}{4x+3}$ через точку A:

$y' = -\frac{2\cdot(4)}{(4x+3)^2}$

$l_c: \; l = y'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$1 = -\frac{2\cdot 4}{(4x_0+3)^2}\left(-\frac{3}{4}-x_0\right)+3+\frac{2}{4x_0+3}$

$1 = \frac{8}{(4x_0+3)^2}\left(\frac{3}{4}+x_0\right)+3+\frac{2}{4x_0+3}$

$\frac{3}{4}+x_0 = \frac{3+4x_0}{4}$

$1 = \frac{2}{4x_0+3}+3+\frac{2}{4x_0+3} \Rightarrow -2 = \frac{4}{4x_0+3} \Rightarrow$

$(4x_0+3) = -2 \Rightarrow$

$4x_0 = -5 \quad x_0 = -\frac{5}{4}$

~~$x_0 = \ldots$~~ $\Rightarrow y_0$

3. т.к прямые l_c и l – совпадают, а исходя из графика наши прямые должны проходить через A(или ниже, касаясь гипербо, а также ниже (⇔ если 2 крайние прямые совпали ⇒ случай единствен.

$l_c: -\frac{8}{(-5+3)^2}\left(x+\frac{5}{4}\right)+3-\frac{1}{2}$

$a = -2$

$b = -\frac{1}{2}$

$l_c = -2\left(x+\frac{5}{4}\right)+2$

$l_c = -2x-\frac{5}{2}+2 = -2x-0{,}5$

$a = -2$

$b = -0{,}5$

$l_c = -2x-0{,}5 \Rightarrow$ т.к. l_c и l совпали $\Rightarrow$ единств. решение при $a=-2$, $b=-\frac{1}{2}$.

~~$\Rightarrow$ при $a\in[-2; -0{,}5] \Rightarrow$~~

~~$b\in\left[-0{,}5; \frac{29}{8}\right]$~~

2. $l: \frac{4x+11}{-11+3} = \frac{y-5}{4}$

$\frac{4x+11}{-8} = \frac{y-5}{4}$

$\frac{4x+11}{-2} = y-5$

$4x+11 = -2y+10$

$y = -2x-\frac{1}{2}$

$a = -2$

$b = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$

~~Ответ: все прямые лежащие м/у $y=-2x-0{,}5$ $y=-0{,}5x+\frac{29}{8}$, при $a\in[-2; -0{,}5]$ $b\in\left[-0{,}5; \frac{29}{8}\right]$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №7 (Нумеровать только чистовики)

№5. Выпишем значения всех ф-ий от простых чисел принадлежащих от [1;24]: $f(2)=0$ $f(7)=1$ $f(19)=4$

$f(3)=0$ $f(11)=2$ $f(23)=5$

$f(5)=1$ $f(13)=3$

$f(17)=4$

Заметим, что любое простое число (и 1) дают значение функции ≥ 0, то если данные x и y не взаимопросты, то значение их будет равно: $f(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{c})=f(1)+f(\frac{b}{c})$, таким образом нам интересно рассматривать только x и y взаимопростые, иначе если они не взаимопросты, то мы что их всегда можем свести к взаимопростым,

$f(9\cdot5)=f(1)+f(5)\Rightarrow f(1)=0$.

$f(5)$

a-общее делитель

таким образом у нас будет произведение числа $f(b\cdot\frac{1}{a})$, где $b\in N$, а значит $f(b)$ - можно расписать в виде произведения $f(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$, где x_1, x_2, x_3 - простые делители числа b, соответственно, а значит у нас будет Σ ~~...~~ неотрицательных чисел, если $\frac{x}{y}\in N\Rightarrow$ всегда >0 согласно вышесказанному, значит $\frac{x}{y}\notin N$ - будут ~~быть~~ давать отрицательное значение ~~Σ~~ $\Rightarrow$ т.к. и x и y представимо в виде Σ простых чисел, а их общие делители сокращаются, что надо ~~...~~ чтобы Σ(делителей) была меньше $\Sigma f x_i$ b, где x_i - делитель $\Rightarrow$ на ~~...~~

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=$

т.к макс. $\Sigma=20\Rightarrow$ $f(a)+f(\frac{1}{b})$ $f(6)=0$

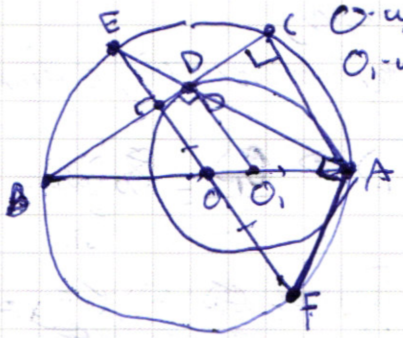
$\Rightarrow f(\frac{a}{b})=f(a)-f(b)\Rightarrow$ надо посчитать кол-во пар x и y у которых

$f(\frac{1}{b}\cdot b)=0\Rightarrow f(\frac{1}{b})=-f(b)\Rightarrow$

$\boxed{\text{см на листе №11}}$ $f(x)<f(y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



O - центр Ω
O_1 - центр ω

Решение: 1) проведём общую касат через . получим, что $\cdot O, O_1, A, B$ - лежат на 1 прямой.

2) соединим $O_1 D$ => т.к. BC (по усл. касат) => $O_1 D \perp BC$ (т.к. BC - касат по усл), $EF \perp BC$ (по усл) =>

=> $O_1 D \parallel OE$ (т.к. $EF \perp BC$ и $\angle BEA = 90°$ => EF - диаметр => проходит через т. O)

3) рассм $\triangle BCA$ и $\triangle BDO_1$ - они подобны т.к $\angle BCA = 90°$ (т.к на диаметр. опир.)

$\angle O_1 DB = 90°$ (т.к BC - касат) =>

$O_1 D \parallel CA$ => $\triangle \sim$ (по 2$\angle$)

4) Пусть R - Ω
r - ω =>

из п.3 составим подобие $\triangle$.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AO_1}{BA}, \quad BA = 2R \text{ (т.к диам по усл)}$$

$AO_1 = 2R - r$ ($AB - O_1A$, $O_1A = r$)

$AC = AD + DC = 25$ (из усл.)

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow 34R = 50R - 25r \Rightarrow$$

$$r = \frac{16}{25}R$$

5) $\triangle BDO_1$ - п/у => $BO^2 + DO_1^2 = BO_1^2$ (теор. Пифаг) =>

$$\Rightarrow 17^2 + r^2 = (2R-r)^2$$

$$17^2 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4R \cdot r + \cancel{r^2}$$

$$4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R = 17^2 \Rightarrow$$

$$4R^2 \cdot \frac{9}{25} = 17^2$$

$$R^2 = \frac{17^2 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 2^2} \Rightarrow R_\Omega = \frac{17 \cdot 5}{6} = \boxed{\frac{85}{6}}$$

$$r_\omega = \frac{17 \cdot 5}{6_3} \cdot \frac{16^8}{25_5} = \frac{17 \cdot 8}{15} = \boxed{\frac{136}{15}}$$

(см. на др. листе)

№ 4 продолжение

6) Для поиска $\angle EFA$ воспользуемся расшир. теоремой

$\sin \Rightarrow \quad \dfrac{EA}{\sin\angle EFA} = 2R_\Omega$

~~также~~

$ED\cdot DA = AD\cdot DC$ (по св-ву $\cap$ хорд)

т.к. EO и O_1D – радиусы соотв окружностей, а также

$EO \parallel O_1D$ (п.2) $\Rightarrow \triangle EOA \sim \triangle O_1DA \Rightarrow \dfrac{O_1D}{EA} = \dfrac{r_\omega}{R_\Omega} = \dfrac{136\cdot 6}{85\cdot 15} =$

$= \dfrac{136\cdot 2}{85\cdot 5} = \dfrac{17\cdot 8\cdot 2}{17\cdot 5\cdot 5} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow$ Пусть $EA = x \Rightarrow \dfrac{16}{25}\cdot\dfrac{9}{25}x^2 = 17\cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow EA = \dfrac{17\cdot 8\cdot 25^2}{4^2\cdot 3^2} =$

$= \dfrac{25}{12}\sqrt{17\cdot 8}$

7) из п.6 $\Rightarrow \sin\angle EFA = \dfrac{\frac{25}{12}\sqrt{17\cdot 8}}{2\cdot\frac{17\cdot 85}{}} =$

$= \dfrac{\cancel{25}^{5}\sqrt{17\cdot 8}}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 17\cdot \cancel{15}_{3}} = \dfrac{5\sqrt{34}}{6\cdot 17} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{34}}{102}} \Rightarrow \boxed{\angle EFA = \arcsin\left(\dfrac{5\sqrt{34}}{102}\right)}$

$\angle EFA = \arcsin\left(\dfrac{5\sqrt{34}}{34}\right)$

8) ~~т.к. EF – диаметр $\Rightarrow \triangle EFA$ – п/у $\Rightarrow \sin\angle FEA = \sqrt{1-\sin^2(\angle EFA)}$~~

т.к. $\triangle EFA$ – п/у ($\angle EAF$ – опир. на диам. EF)

$\sin\angle AEF = \dfrac{EA}{EF} = \dfrac{\frac{25}{12}\sqrt{17\cdot 8}}{\frac{17\cdot 5}{6}\cdot 2} = \dfrac{\cancel{25}^{5}\sqrt{17\cdot 8}}{17\cdot\cancel{5}\cdot 4} = \dfrac{5\sqrt{17\cdot 8}}{17\cdot 4} = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$

$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = \arcsin\dfrac{5\sqrt{34}}{34}}$

~~т.к. $\triangle EF$~~ $S_{\triangle EFA} = \frac{1}{2}EF\cdot\sin\angle AEF\cdot EA = \frac{1}{2}\cdot\frac{17\cdot 5}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{25}{12\sqrt{17\cdot 8}} =$

$EF = 2R_\Omega$, $\sin\angle AEF = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{\triangle EFA} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17\cdot 5}{6}\cdot\dfrac{25}{12\cdot\sqrt{17\cdot 8}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{34}} = \dfrac{17\cdot 5^3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 17\cdot 4} = \dfrac{125}{96}$

Ответ: $R_\Omega = \dfrac{85}{6}$; $R_\omega = \dfrac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$; $S_{\triangle AFE} = \dfrac{125}{96}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 продолжение $f(a \cdot b) = f$

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0+0$
$f(5)=1$

$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=6$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$

$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=0$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$

$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$

~~Это~~ 4

разобьем на группы и посчитаем количество:

$f(x)$:
0: 12
1: 5
2: 2
3: 1
4: 2
5: 1

$12 \cdot 11 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 + 2 = 175$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg^2x+1=\frac{1}{\cos^2x}$

$-\frac{8\cdot 9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17$

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17$

$18-17$

$-\frac{8\cdot 11^2}{16}+\frac{11\cdot 30}{4}-17$

$-\frac{11^2}{2}+\frac{11\cdot 15}{2}-17$

$\frac{11\cdot 4}{2}-17$

$3+\frac{a}{4x+3}$

$x_0=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}=-\frac{1,5}{4}$

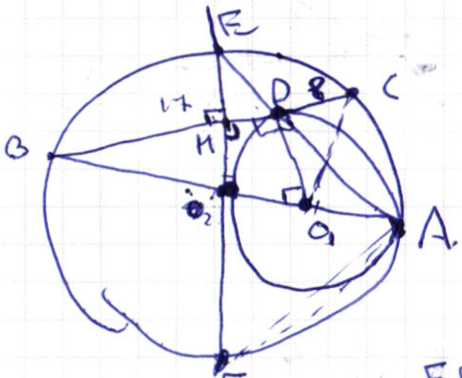
$-\frac{8\cdot 225}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17$

$-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17$

$\frac{225-80-56}{8}=\frac{79}{8}\approx 10$

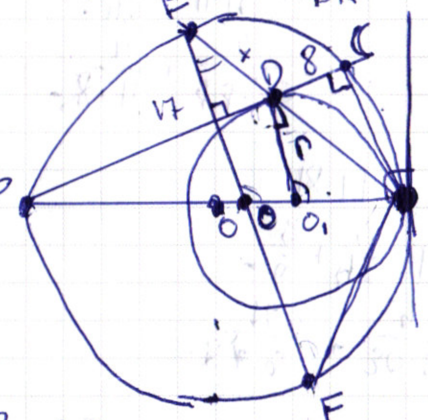
136

16·16+16



$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$\frac{ED}{EA} = 0$



$O_1D \parallel O$

$ED \cdot DA = 8 \cdot 17$

$\frac{ED}{17} = \frac{8 \cdot 17}{DA}$

$\frac{ED}{DA}$

$\frac{DA}{ED+DA} =$

$r^2 + 17^2 = 4R^2 - 4rR + r^2$

$17^2 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R$

$R^2\left(\frac{9}{25}\right)$

$R = \frac{17 \cdot 5}{6}$

$\frac{17}{25} = \frac{R - r + R}{2R}$

$r = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3}$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$\frac{12x+11}{4x+3}$

$-8x^2 - 30x - 17$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b$

$x = -\frac{11}{4}$

$x_0 = \frac{30}{-8}$

$\frac{-33+11}{-11+3} \le a\left(-\frac{11}{4}\right) + b \le -\frac{11^2}{2} + \frac{30 \cdot 11}{2} - 17$

$1 \le -a + b \le -8 + 30 - 17$

$1 \le b - a \le 5$

$\begin{cases} a+1 \le b \\ a+5 \ge b \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2a+2B) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2a+4B) + \sin 2a = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\sin 2a \cdot \cos 2B + \sin 2a \cos 2B$

$\sin(2a+2B)\cos 2B + \cos(2a+2B)\sin 2B = -\frac{4}{5}$

$\sin(2a+2B) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(2a+2B) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$1 \cdot \cos(2a+2B) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{-11+3} = -\frac{2}{8}$

$\frac{2}{-10+3} = -\frac{2}{7}$

~~$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2B + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2B = -\frac{4}{5}$~~

$\cdot \cos 2B$

~~$2\sin(2a+2B) = -\frac{4}{5}$~~

$2\underbrace{\sin(2a+2B)}_{=-\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos(2B) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2B = +\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2B = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{19}}{5}$

$f'(x)$

~~$\sin 2a \cdot \cos 2B + \cos 2a \sin 2B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$A \quad \log_{12}\frac{5}{13} < 0 \quad + \quad t^{\log_{12}\frac{12}{13}} < 0 \quad \geq 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$

$x^2+18x = 1$

$x^2+18x \; 4$

0

$3 + \frac{2}{-11+3} = 3 + \frac{2}{-8} = 2{,}75 \quad 5{,}5 \quad \frac{11}{4}$

2^x

$4^3 + 3^3 - 5^3$

$= \quad = \quad =125$

$4^3 \quad 3^3 = 27$

$5^t + 12^t \geq 13^t$

$t = 1$

$t = 0 \quad t \geq 0 \quad + \; t^t$

$a = (x^2+18x)^{\log_{13}}$

$\log_{12} 13^2 =$

$\log_{12}\frac{5}{12}$

$3^3 + 4^3 = 5^3$

$27 + 64 - 125$

$-\frac{8 \cdot 11^2}{16} + \frac{11 \cdot 30}{4} - 17$

$\frac{11 \cdot 15}{4}$

$3 + \frac{2}{-5} = 3{,}6$

$3 + \frac{2}{-7+3} = 3 - 0{,}5$

$3 + \frac{2}{-1+3}$

$3 + \frac{2}{-5+3} = 3 + \frac{2}{-2} =$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$

$x^2-4xy+4y^2$

$D=16+48-36y^2$

$x^2-4xy+\cdot$

$x^2+9y^2-4x-18y-12=0$

$D=16+48+72y-$

$9(y-1)^2+(x-2)^2=1$

$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2$

$-\begin{cases} x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$5y^2+5xy-5x-20y-10=0$

$y^2+xy-x-4y-2=0$

$x=y^2$

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$x^2+x(1-5y)+2y-2+4y^2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9$