МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad tg\alpha - ?$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$$

$$\cdot\cos2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta$$

$$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$: $\quad \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$$2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1$$

$$\sin2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\,\Big|:\cos^2\alpha = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1} \qquad \cos2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\,\Big|:\cos^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

$t = tg\alpha$

$$\frac{4t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1} = -1 \qquad \frac{-t^2+4t+1}{t^2+1} = -1 \quad |\cdot(t^2+1)$$

$$-t^2+4t+1 = -t^2-1$$

$$4t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$$

2) $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$: $\quad \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$$2\sin2\alpha-\cos2\alpha = -1$$

$t = tg\,\alpha$

$$\frac{4t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} = -1$$

$$t^2+4t-1 = -t^2-1$$

$$2t^2+4t=0 \quad |:2$$

$$t(t+2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

$\underline{tg\,\alpha = 0}$ $\quad$ $\underline{tg\,\alpha = -2}$

$\boxed{\text{Ответ: } -2;\ -\frac{1}{2};\ 0.}$

2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy \overset{+4y^2}{=} xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-5xy+x+2y-2 \overset{+4y^2}{=} 0 \quad (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) − (1): $5y^2+5xy-5x-20y-10=0 \quad |:5$

~~$9y^2-20y-10=$~~ ~~$y^2-4y-2=x(y-1)$~~

$$y^2+xy-x-4y-2=0$$

$$y^2-4y-2=x(1-y)$$

1) $y=1 \Rightarrow 1-4-2=0 \Rightarrow \varnothing$

2) $y\neq 1 \Rightarrow x=\dfrac{y^2-4y-2}{1-y}$

Подставляем x в первое ур-е системы:

$$\frac{y^2-4y-2}{1-y} - \frac{2y-2y^2}{1-y} = \sqrt{\frac{y^2-4y-2}{1-y}\cdot(y-1)-2y+2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{y^2-4y-2-2y+2y^2}{1-y}=\sqrt{-y^2+4y+2-2y+2}$$

$$\frac{3y^2-6y-2}{1-y}=\sqrt{-y^2+2y+4}$$

$$\frac{3(y^2-2y+1)-5}{1-y}=\sqrt{-(y^2-2y+1-5)}$$

$$\frac{3(1-y)^2-5}{1-y}=\sqrt{-((1-y)^2-5)}$$

$$t=1-y$$

$$\frac{3t^2-5}{t}=\sqrt{-t^2+5}$$

$$5-t^2\geqslant 0$$

$$t^2\leqslant 5$$

$$\frac{9t^4-30t^2+25}{t^2}=-t^2+5$$

$$9t^4-30t^2+25=-t^4+5t^2$$

$$10t^4-35t^2+25=0 \quad |:5$$

$$2t^4-7t^2+5=0$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} t^2=\frac{4}{2} \\ t^2=\frac{3}{2}\end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2=\frac{5}{2} \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ t^2=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow t=\pm 1\end{array}\right.$$

$$\frac{x-2y\geqslant 0}{y=1-t}$$

$$\left[\begin{array}{l}
y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=\frac{1-2\sqrt{2,5}+2,5+4\sqrt{2,5}-2}{\sqrt{2,5}}=\cancel{\frac{1,5-6\sqrt{2,5}}{2,5}}=\frac{-2,5+2\sqrt{2,5}}{\sqrt{2,5}}=-\sqrt{2,5}+2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\
y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=\frac{1+2\sqrt{2,5}+2,5-4-4\sqrt{2,5}-2}{-\sqrt{2,5}}=\frac{-2,5-2\sqrt{2,5}}{-\sqrt{2,5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \otimes \\
y=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{1}=-2 \otimes \\
y=2 \Rightarrow x=\frac{4-8-2}{-1}=6 - \text{подх.}
\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (6;2),\ \left(2-\sqrt{\tfrac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$t=x^2+18x,\ t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$\cancel{t \geq t^{\log_{12}5}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right)}$ логарифмируем по осн.12:

$\cancel{\log_{12}5\cdot\log_{12}t+\log_{12}t \geq \log_{12}13\cdot\log_{12}t}$

$\cancel{\log_{12}t(1+\log_{12}5-\log_{12}13)\geq 0}$

$t \geq t^{\log_{12}5}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right)$

$$\log_{12}t \geq \log_{12}5\cdot\log_{12}t+\log_{12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right)$$

$$(\log_{12}t)(1-\log_{12}5) \geq \log_{12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right)$$

$$\log_{12}\frac{12}{5}\cdot\log_{12}t \geq \log_{12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-t^{\log_{12}1}\right)$$

1) $t\in(0;1)$

$\cancel{5^{\log_{12}t}+t}$ $\quad \underbrace{t^{\log_{12}5}+t}_{\nearrow} \geq \underbrace{t^{\log_{12}13}}_{\searrow}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

p – простое $\Rightarrow f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$1\le x,y\le 24;\ x,y\in\mathbb{N}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Посчитаем $f(a)$ для всех a из нашего диапазона

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
f(a)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

a	18	19	20	21	22	23	24
f(a)	0	4	1	1	2	5	0

~~f(a) для наших a~~ $f(a)\in\{0,1,2,3,4,5\}$

Посчитаем, сколько раз встречается каждое значение $f(a)$:

0: 11 1: 7 2: 2 3: 1 4: 2 5: 1

$f(x)=0\Rightarrow f(y)\ge 1;\ f(x)=1\Rightarrow f(y)\ge 2;\ f(x)=2\Rightarrow f(y)\ge 3\ \ldots$

$11\cdot(\overset{13}{24-11})+7\cdot(\overset{6}{24-11-7})+2\cdot(\overset{4}{24-11-7-2})+1(\overset{3}{24-11-7-2-1})+$
$+2(\overset{1}{24-11-7-2-1-2})+1\cdot(\overset{0}{24-11-7-2-1-2-1})=11\cdot13+7\cdot6+2\cdot4+3+$
$+2=143+42+8+5=198$

Ответ: 198 пар

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$-(8x^2+30x+17)=0$

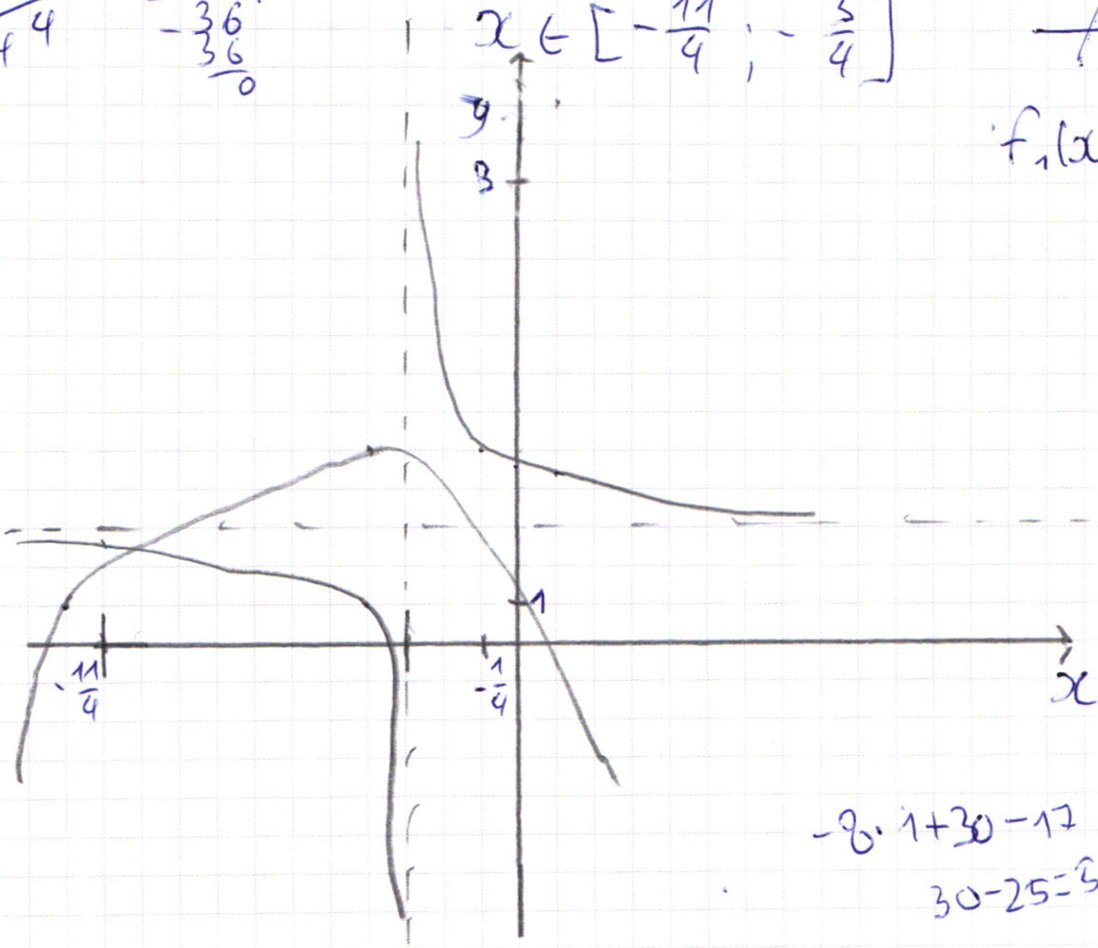
$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} \leq ax+b \leq$

$D=900-4\cdot8\cdot17=356=4\cdot89$

$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$f_1(x)=3+\frac{2}{4x+3}$



$-8\cdot1+30-17$

$30-25=5$

$-8\cdot9+90-17=90-89=1$

$x_b=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$a=0 \quad b=\cancel{2}2,7$

$a=0 \quad b=2,6$

№ 4.

$CD=8 \quad BD=17$

~~DEA~~

$BC=25$

$\angle BFA=90°$ (опир. на диам.)

$\angle BFE=\angle BAE$

$\Omega - R \quad \omega - r$

$BO=R-r \quad OD=r \quad BD=17$

$BO^2=BD^2+OD^2$

$R^2-2Rr+\cancel{r^2}=17^2+\cancel{r^2}$

$R^2-17^2=2Rr \Rightarrow r=\frac{R^2-17^2}{2R}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2(\alpha+\beta))}$

$\sin(\overset{2\alpha+2\beta+2\beta}{2\alpha+4\beta}) = \underline{\sin(2\alpha+2\beta)}\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cdot\underbrace{\cos 4\beta}_{2\cos^2(2\beta)-1} + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\end{cases}$

$a = \sin 2\alpha$ $\quad 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2(2\beta) + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta$

$+\frac{1}{2}(\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(4\alpha+4\beta) - \cos(4\beta)) = +\frac{4}{5}$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\underbrace{\cos(4\alpha+4\beta)}_{1-2\sin^2(2\alpha+2\beta)} - \cos(4\beta) = \frac{8}{5}$

$1 - 2\cdot\frac{1}{5} - \cos(4\beta) = \frac{8}{5}$

$1 - \frac{2}{5} - \frac{8}{5} = \cos 4\beta$

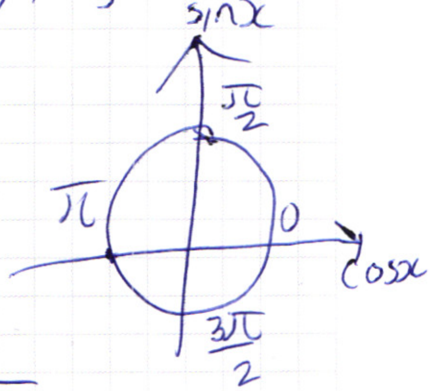
$\frac{5-10}{5} = \cos 4\beta$

$\cancel{\cos(4\beta) = \frac{3}{5}}$

$\cos(4\beta) = -1$

$4\beta = \pi$

$\beta = \frac{\pi}{4}$



$\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos 2\alpha\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-2\cancel{\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$t = tg^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \Big| :\cos^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\frac{1-t}{1+t} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} - \sqrt{5}t = -1 - t$

$t(1-\sqrt{5}) = -1-\sqrt{5}$

$t = -\frac{(1+\sqrt{5})}{1-\sqrt{5}} \Big| \cdot (1+\sqrt{5}) = \frac{-(1-2\sqrt{5}+5)}{1-5} = \frac{-6-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (3) \\ x^2+(3y)^2-2\cdot 2x-6\cdot 3y=12 \end{cases}$$

$$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$$

$x-2y\geq 0$

$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0 & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $\quad 5y^2-5x-20y-10+5xy=0 \quad |:5$

$$y^2-x-4y-2+xy=0$$

$$y^2+(x-4)y-x-2=0$$

$$D=x^2-8x+16+4x+8=x^2-4x+24=(x-2)^2+20$$

$$x(y-1)=-y^2+4y+2$$

$$x=\frac{-y^2+4y+2}{y-1}$$

$$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}=0$$

$$x=\frac{y^2-4y-2}{1-y}=\frac{(y-2)^2-6}{1-y}$$

(3): $$\frac{y^2-4y-2-2y(1-y)}{1-y}=\sqrt{\frac{y^2-4y-2}{1-y}(y-1)-2y+2}$$

$$\frac{y^2-2y-4}{1-y}=\sqrt{-y^2+4y+2-2y+2}$$

$$\frac{65}{25}=\frac{13}{5}$$

$$\frac{y^2-2y-4}{1-y}=\sqrt{-y^2+2y+4}$$

$$\frac{(y-1)^2-5}{1-y}=\sqrt{-((y-1)^2-5)}$$

$-t^2+5\geq 0$

$t^2-5\leq 0$

$t=1-y$

$$\frac{t^2-5}{t}=\sqrt{-(t^2-5)}$$

$$\frac{t^4-10t^2+25}{t^2}=-(t^2-5)$$

$$\frac{(t^2-5)^2}{t^2}=-(t^2-5)$$

$t^2-5=-t^2$

$2t^2=5$

$t^2=\frac{5}{2}$

$t=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{-(1-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2})+4-4\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{5-\frac{5}{2}-2\sqrt{\frac{5}{2}}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

$$x=\frac{\frac{5}{2}-2\sqrt{\frac{5}{2}}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cancel{2\sin\alpha\frac{\alpha+\beta}{}}$

$\underbrace{\sin 30° + \sin 30°}_{1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1$ $\quad \frac{\sin 45° + \sin 45°}{\sqrt{2}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{} =$

$(1)-(2)$

$(2)-(1): \; 9y^2 - 5xy - 5x - 20y - 10 = 0$

$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\, 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $\quad (6;2)$

$\underbrace{6-4}_{2} = \sqrt{\underbrace{12-6-4+2}_{4}}$

$\cancel{36}+\underbrace{9\cdot 4}_{36}-24-\cancel{36}=12$

$3(y^2-2y+1)-5 = 3(y-1)^2-5$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\, 1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$\sqrt{\frac{5}{2}}+\cancel{2}-\cancel{2}-2\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad -2{,}5-2\sqrt{}$

$-\sqrt{\frac{5}{2}}-2-2+2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}-4<0$

$\cancel{2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+2\right)^2 + 9\left(1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 4\sqrt{2{,}5} - 8 - 18 - 18\sqrt{2{,}5} = 0$

$2{,}5 + 4\sqrt{2{,}5} + 4 + 9(1 + 2\sqrt{2{,}5} + 2{,}5) - 22\sqrt{2{,}5} - 24 = 0$

$2{,}5 + 4\sqrt{2{,}5} + 4 + 9 + 9\sqrt{2{,}5} + 9\cdot 2{,}5 - 22\sqrt{2{,}5} - 24 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x>0 \quad x(x+18)>0 \quad x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$\frac{12}{5}x=\frac{13}{5}$

$x=\frac{13}{12}$

$t=x^2+18x,\ t>0$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$t^{\log_{12}5}(1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}-t^{\log_{12}\frac{13}{5}})\geq 0$

$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}(1-t^{\log_{12}\frac{13}{12}})\geq 0$

$t=t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1)=0$

$t^{\log_{12}\frac{13}{5}}=1$

$t=1$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

~~$5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}$~~

$\log_{12}13>1$

$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t\geq 0 \ |:t$

$t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13-1}+1\geq 0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}+1\geq 0$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\leq t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1$

$5^{\log_{12}t}=5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}=5^{\log_5 t\cdot\frac{1}{\log_5 12}}=t^{\log_{12}5}$

$t\geq f(t)$

$f(t)=t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

$f'(t)=\log_{12}13\cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-\log_{12}5\cdot t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$t+t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$\log_{12}t+\log_{12}5\cdot\log_{12}t-\log_{12}\cdot\log_{12}t\geq 0$

$\log_{12}t\geq$

5.

$f(x)$ $x>0$ $x\in R$ $f(x)<f(y)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $p\in P \Rightarrow f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$x,y\in N$ $1\leq x,y\leq 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $f(1)=f(1)+f(1)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $f(1)=0$

$f(2)=0$

$P'=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$

$f(3)=0$

$F'=\{0,0,1,1,2,3,4,4,5\}$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

~~f(x)=x → не строго возр.~~

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(10)=f(5)+0=1$

$f(8)=3f(2)=0$

$f(12)=0$ $f(14)=1$ $f(15)=1$

~~f(9)=0~~

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

x	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(x)$	4	0	4	1	1	2	5	0

"0": 11
"1": 7
"2": 2
"3": 1
"4": 2
"5": 1

$f(2^a\cdot 3^b)=0$ $f(x^k)=k\cdot f(x)$

1) $f(x)=0 \Rightarrow$ ~~$N(x)=11 \Rightarrow f(y)\geq 1 \Rightarrow N(y)=13$~~

$N=11\cdot 13$

2) $f(x)=1 \Rightarrow N(x)=6 \Rightarrow f(y)\geq 2 \Rightarrow N(y)=24-11-6=7$

$N=6\cdot 7$

3) $f(x)=2 \Rightarrow N(x)=2 \Rightarrow f(y)\geq 3 \Rightarrow N(y)=7-2=5 \Rightarrow N=2\cdot 5$

4) ~~$f(x)=3 \Rightarrow N(x)=1 \Rightarrow f(y)\geq 4 \Rightarrow N(y)=$~~

$\begin{array}{r}13\\ \times 13\\ \hline 143\end{array}$

$11\cdot(24-11)+7\cdot(24-11-7)+2\cdot(6-2)+1(4-1)+2(3-2)+1(1-1)$

$143+42+8+3+2+0=198$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$ ~~$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha$~~

$=$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)