МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20 \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44 \end{cases} \Rightarrow 7x-y=64$$ (Вычли из разности уравнений.)

Суммируем: $7x+y+2\sqrt[3]{(7x+y)(7x-y)}=-24$.

Пусть $7x+y=a \Rightarrow a+2\sqrt[3]{64a}=-24$.

Заметим, что слева — монотонно возрастающая функция $f(a)$, т.к. a — монотонно возр. и $2\sqrt[3]{64a}$ — тоже монотонно возраст.

~~Угадываем корень~~. Т.к. слева монотонно возраст. функция, а справа константа, то имеется только одно пересечение. Тогда имеем право угадать корень: $a=-8 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 7x-y=64 \\ 7x+y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow 14x=56 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=-8-7x=-36.$$

$\boxed{\text{Ответ: } x=4;\ y=-36}$

№3

Пусть у нас есть 10^y; 10^{y+1}; 10^{y+2}, и пусть семизначное число равно $\overline{abcdefg}$ $(a\neq 0)$.

Заметим, что если $y<3$, то сумма остатков всегда меньше 12537.

• Если $y=3$, то сумма $=\overline{efg}+\overline{defg}+\overline{cdefg}=10000c+2000d+300e+30f+3g=12537$. Есть два случая: $c=0$ или $c=1$.

1) $c=0 \Rightarrow d=5$ или 6.

1.1) $d=5 \Rightarrow 300e+30f+3g=2537$. Заметим, что 2537 не делится на 3 $\Rightarrow$ сумма невозможна.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1.2) $d=6 \Rightarrow 300e+30f+3g=531 \Leftrightarrow 100e+10f+g=177 \Rightarrow$
$e=1; f=7; g=7 \Rightarrow \overline{ab06177}$, где a от 1 до 9, b от 0 до 10.

2) $c=1 \Rightarrow d=0$ или 1.

2.1) Если $d=0$, то $300e+30f+3g \neq 2531$

2.2) Если $d=1$, то $300e+30f+3g=531 \Leftrightarrow e=1; f=7; g=7 \Rightarrow$
$\overline{ab11177}$. Подходящее число получается. $\{a, b, \in \mathbb{Z}$ и $a \in [1;9]; b \in [0;9]$.

• Если $y=4$, то $\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg} \Leftrightarrow$
$100000b+20000c+3000d+300e+30f+3g=12531$.
Заметим, что $b=0$, $c=0$, т.к. если это не так, то левая сумма больше 12531. Итого: $3000d+300e+30f+3g=12531 \Leftrightarrow$
$1000d+100e+10f+g=4177 \Rightarrow d=4; e=1; f=7; g=7$.
$\Rightarrow \overline{a004177}$.

• Если $y=5$, то сумма $=\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}+\overline{abcdefg}$.
$\overline{abcdefg}$ всегда больше 12531, т.к. $a \neq 0 \Rightarrow$ сумма невозможна. Выше y рассматривать нет смысла.

У нас вышли ~~пр~~ три числа: 1) $\overline{a004177}$; 2) $\overline{ab11177}$;
3) $\overline{ab06177}$.

a от 1 до 9, b от 0 до 9. $\Rightarrow$

1) ~~$9 \cdot 10 \cdot b = 90$ вариантов.~~ 9 вариантов.

2) $9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

3) $9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

Суммарно 189 вариантов.

$\boxed{\text{Отв: } 189}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

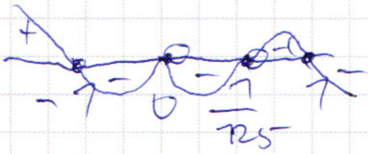
$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{1+\log_{|x|}5}} \leq \frac{-2}{1+3\log_{|x|}5}$. Возведём в квадрат. $\Leftrightarrow$

ОДЗ: $x>0$; $x \neq \frac{1}{5}$; $x \neq \frac{1}{125}$;

$\log_{5x} x^4 \geq 0 \Rightarrow (5x-1)(x^4-1) \geq 0$.

$x \in [-1; \frac{1}{5}) \cup [1; +\infty)$.

$\log_{125x} \frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow (125x-1)\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) \geq 0$.

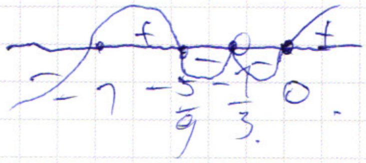


$x \in (-\infty; -1] \cup (\frac{1}{125}; 1]$.

Общее ОДЗ: $x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{5}) \cup \{1\} \cup \{-1\}$.

Обозначим $\log_{|x|}5 = y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{1+y} \leq \frac{4}{1+6y+9y^2} \Rightarrow \\ \frac{-2}{1+3y} \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -\frac{1}{3}). \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{4+24y+36y^2}{(y+1)(3y+1)^2} \leq \frac{4+4y}{(y+1)(3y+1)^2} \Leftrightarrow \frac{4y(9y+5)}{(y+1)(3y+1)^2} \leq 0$.



$\Rightarrow y \in (-\infty; -1) \cup [-\frac{5}{9}; -\frac{1}{3})$.

Заметим, что $y \in (-\infty; -1)$ не подходят по ОДЗ. По ОДЗ $y \in (-1; -\frac{1}{3})$.

Тогда $x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{\sqrt[5]{5^9}}]$. И $x = \pm 1$ также подходит, заметим, если подставим в начало.

Отв: $x \in \{-1\} \cup (\frac{1}{125}; \frac{1}{\sqrt[5]{5^9}}] \cup \{1\}$.

№5.

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -9\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right) \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Big| :2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right).$$

№5

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$.

$\sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$\sin(x-y) = -9\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{3}\right) = \cancel{-9\cos 5x} -9\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$.

$10\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right) + 9\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right) - \sin(x-y)$.

№2

$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x}\frac{1}{x^2}$

$x>1$.

ОДЗ: $x>0$, $x\neq\frac{1}{5}$. $\cancel{\log_{5x}}\ (5x-1)(x^2-1)\geq 0$.

$\Rightarrow x\in\left[-1;\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$

$\log_{125x}\frac{1}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow$

$(125x-1)\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)\geq 0 \Rightarrow$

$x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{125};1\right]$.

$x\in\left[\frac{1}{125};\frac{1}{5}\right)\cup\{1\}$

$\frac{4}{\cancel{\log}\,1+\log_x 5} \leq \frac{\cancel{26}\ 4}{8y\,1+6\log_x 5+9\log_x^2 5} \Leftrightarrow 4+24y+36y^2 \leq 4-4y$.

$\frac{36y^2+20y}{(1+y)(1+3y)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{4y(6y-5)}{(1+y)(1+3y)^2}\leq 0$.

$-1\quad -\frac{1}{3}\quad 0\quad \frac{5}{6}$.

~~$y\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\frac{5}{6}\right]$~~

$y\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};-1\right)\cup\left[0;\frac{5}{6}\right]$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

1) $ax+b \geq \sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2}$. $\quad x_0 = \frac{5}{-2}= -\frac{5}{2}$.

1) $\sqrt{\frac{175}{4} - \frac{5}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{339}{4}$; $\sqrt{\frac{164}{4}} = \sqrt{41}$.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b \geq \sqrt{41} \\ \frac{9a}{2} + b \geq 2 \end{cases} \Leftarrow 4a \geq 2 - \sqrt{41} \Rightarrow a \geq \frac{2-\sqrt{41}}{4}.$$

2). $ax+b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$. $\Leftrightarrow 12ax + 12b \leq -4x^2 + 8x + 81$.

$\cancel{12 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{27}{4}}$ $\quad x_0 = 1$.

$-4 + 4 + 81 = 84$.

$-81 + 36 + 81 = 36$.

$\cancel{12ax + 12b \leq 84}$

$\cancel{12ax +}$

$$\begin{cases} 6a + 12b \leq 84 \Leftrightarrow a + 2b \leq 14 \\ 36a + 12b \leq 36 \Leftrightarrow 3a + b \leq 3 \end{cases}$$

$5a \leq -9 \Leftrightarrow a \leq -\frac{9}{5}$

$\cancel{2 - \sqrt{41} \vee -\frac{36}{5}}$ $\quad 10 - 5\sqrt{41} \vee -36 \Leftrightarrow 46 \vee 5\sqrt{41}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

10^y; 10^{y+1}; 10^{y+2}.

$12537 : 3 = 4179$

Если $y=1$, то $x_7 + \overline{x_6x_7} + \overline{x_5x_6x_7} < 12537$.

Если $y=2$, то $\overline{x_6x_7} + \overline{x_5x_6x_7} + \overline{x_4x_5x_6x_7} < 12537$

1) Если $y=3$, то $\overline{x_5x_6x_7} + \overline{x_4x_5x_6x_7} + \overline{x_3x_4x_5x_6x_7} = 12537$

2) Если $y=4$, то $\overline{x_4x_5x_6x_7} + \overline{x_3x_4x_5x_6x_7} + \overline{x_2x_3x_4x_5x_6x_7} = 12537$.

$10000a + 2000b + 300c + 30b + 3a = 12537$.

$a=1$; $b=1$; $\quad 300c + 30b + 3a = 537 \Rightarrow$.

$100c + 10b + a = 177 \Rightarrow$

1) ~~11177~~ $x_1x_2 11177$. $c=1$; $b=7$; $a=7$. 76.

306.

$100000a + 20000b + 3000c + 300d + 30e + 3f$

$a=0$; $b=0$; $\Rightarrow 3000c + 300d + 30e + 3f = 12537 \Leftrightarrow$

$1000c + 100d + 10e + f = 4179 \Leftrightarrow$ $c=4$; $d=1$;

2) $x_1 004177$ 96. $\quad e=7$; $f=7$.

Если $y=5$, то $\overline{x_3x_4x_5x_6x_7} + \overline{x_2x_3x_4x_5x_6x_7} + \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$

$1000000a + 200000b + 30000c + 3000d + 300e + 30f + 3g = 12537$

a не может быть равно нулю. при $y=5$ нет решений.

Ответ: 93.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~№2~~?

№1 ✓

$\times 1728 \quad$ ~~27~~?

$7x-y=64 \Leftrightarrow y=7x-64$

$\begin{array}{r}\times 64\\ 24\\ \hline +256\\ 128\\ \hline 1536\end{array}$

$7x+y+2\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-24 \Leftrightarrow \sqrt[3]{49x^2-y^2}=\dfrac{-24-7x-y}{2}$

$7x-64+\dfrac{-24-14x+64}{2}=$

$\begin{array}{r}\times 576\\ 3\\ \hline +1728\\ 512\\ \hline 2240\end{array}$

~~$4\sqrt[3]{(-7x+y)}=20-7x$~~ $\qquad$ ~~$20-7x=-7x+20$~~

$4\sqrt[3]{(14x-64)}=$ $\qquad$ $7x-20=a$

$4\sqrt[3]{2a-24}=-a \Leftrightarrow 64\cdot 128a-1536=-a^3$

$a^3+128a-1536=0$

$\begin{array}{r}\times 24\\ 24\\ \hline 96\\ 48\\ \hline 576\end{array}$

~~$\times 27$~~ $\qquad$ ~~$\times 144$~~ $\qquad$ ~~$\times 87$~~

$\begin{array}{r}\times 36\\ 6\\ \hline 216\end{array}$

~~$\begin{array}{r}12\\ 288\\ 144\\ \hline 1728\end{array}$~~

$\begin{array}{r}\times 576\\ 24\\ \hline 2304\\ 1152\\ \hline 13824\end{array}$

$7x-y=64$

a:

$7x+y=a$

$a+2\sqrt[3]{64\cdot a}=-24$

$8\sqrt[3]{a}=-24-a=-(24+a)=-(24^3+24^2\cdot 3a+3\cdot 24a^2+a^3)$

$512a=-13824-1728a-72a^2-a^3$

$a^3+72a^2+2240a+13824=0$

$\begin{array}{l|l} a^3+72a^2+2240a+13824 & a+8 \\ \cline{2-2} a^3+8a^2 & a^2+64a+1728 \\ \cline{1-1} \quad 64a^2+2240a & \\ \quad 64a^2+512a & \\ \cline{1-1} \qquad 1728a+13824 & \end{array}$

Отв. $x=4$
$y=-36$

$\begin{cases}7x-y=64\\ 7x+y=-8\end{cases} \Leftrightarrow 14x=56 \Leftrightarrow x=4$

$28+y=-8 \Leftrightarrow y=-36$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~а)~~ №3

Д = .

1) $c=0$; $d=5$ или 6.

$100e+10f+g=1117$.

1.1) $d=5$.

$300e+30f+3g=2537$. 2537 не делится на 3. X.

1.2) $d=6$.

$100e+10f+g=777 \Rightarrow e=7; f=7; g=7$.

ab06777. ✓ 90б

2) $c=1 \Rightarrow d=0$ или 1.

2.1) Если $d=0$, то $300e+10f+3g=2537$ X.

2.2) $d=1 \Rightarrow$ ab11177 ✓. 90б.

~~Д~~:

№2

$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x}\frac{1}{x^2}$;

$\log_{5} 25 = 2$.

$\frac{1}{\log_{25} 5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

ОДЗ: $x>0$; $x \neq \frac{1}{5}$; $x \neq \frac{1}{125}$.

$\log_{5x} x^4 \geq 0 \Leftrightarrow (5x-1)(x^4-1) \geq 0$.

$x \in [-1; \frac{1}{5}) \cup [1; +\infty)$.

$\log_{125x}\frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow (125x-1)\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) \geq 0$.

-1 $\frac{1}{125}$ 1

$+$ -1 0 $\frac{1}{125}$ $+$ 1

$x \in (-\infty; -1] \cup (\frac{1}{125}; 1]$.

$x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{5}) \cup \{-1\} \cup \{1\}$.

Заметим, что $x=1; -1$ подходят

$$\frac{4}{1+\log_{5x}5} \leq \frac{4}{1+6y+9y^2} \Leftrightarrow 4+24y+36y^2 \leq 4+4y$$

$$\frac{36y^2+20y}{(1+y)(1+3y)^2} \leq 0$$

$$\frac{4y(9y+5)}{(y+1)(3y+1)^2} \leq 0$$

$+ \quad - \quad + \qquad -1 \quad -\frac{5}{9} \quad 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{5}{9}; 0]$

$$\frac{-2}{1+3y} \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -\frac{1}{3})$$

$\log_x 5$.. заметим, что всё из ОДЗ подходит.

$x \in (\frac{1}{125};$

$\log_{\frac{1}{5}} 5^{-8} = 8\sqrt{8} \leq$

$\log_5 \frac{1}{5^{-8}} = 8$

$\log_{(x)} 5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 25$

$x^{-\frac{1}{2}} = 5 \quad \frac{1}{25^{-\frac{1}{2}}}$

$\log_{\frac{1}{125}} 5 = -\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$

$\log_x 5 = -\frac{5}{9}$

$\log_{5x} 5x = \log_x 5 + 1$

$\sqrt[5]{5^9}$

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 5^{-6} = 6 \leq \log_{5^{3 \cdot \frac{3}{2}}} \frac{1}{x} 5^3 = \log$

$\log_{5^{-\frac{1}{5}}} 5^{-\frac{36}{5}} = 9 \qquad \log_{5^{\frac{6}{5}}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x}\frac{1}{x^2} = -2\log_{125x}|x|$$

ОДЗ:
$x>0$
$x \neq \frac{1}{5}$; $x \neq \frac{1}{125}$

$$\sqrt{\frac{4}{\log_{|x|}5x}} \le \frac{-2}{\log_{|x|}125x}$$

$$\frac{4}{\log_{8x}5x} \le \frac{4}{(\log_x 25x)^2}$$

$\log_5 125x = (3+\log_5 x)^2 = 9 + 6\log_5 x + \log_5^2 x$

$$\frac{4}{y+1} \le \frac{4}{9+6y+y^2}$$

$175 \cdot 16 = 1050 + 175 = 2800$

$64 \cdot (-8) = -512 = -8^3$

$-36-8=-44$

$28-8=20$

$12537 : 3 = 4179$

№2

$$\sqrt{4\log_{5x}|x|} \le -2\log_{125x}|x|$$

ОДЗ: $x>0$.
$x \neq \frac{1}{5}$; $x \neq \frac{1}{125}$.

$\log_{5x}|x| \ge 0 \Leftrightarrow (5x-1)(|x|-1) \ge 0$

$\Rightarrow x \in [-1; \frac{1}{5}] \cup [1; +\infty)$.

Заметим, что.

$\log_{125x}\frac{1}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$

$(125x-1)(\frac{1}{x^2}-1) \ge 0$.

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1}{125}; 1]$.

$x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{5}) \cup \{1\}$.

$$\frac{4}{\log_{|x|}5x} \le \frac{4}{\log_{|x|}125x} \Leftrightarrow \frac{4+12\log_x 5 - 4 - 4\log_x 5}{\log_{|x|}5x \cdot \log_{|x|}125x} \le 0.$$

$\log_{|x|}5x = 1+\log_x 5$; $\log_{|x|}125x = 1+3\log_x 5$.

$$\frac{8\log_x 5}{\log_x 5x \cdot \log_x 125x} \le 0.$$

$$\frac{(x-1)}{(x-\frac{1}{5})(x-\frac{1}{125})} \le 0$$

$\Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{125}) \cup (\frac{1}{5}; 1]$.

Отв: $x=1$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{7x - y = 64 \Leftrightarrow 7x > y = 7x - 64}$$

$7x - y = 64.$

$y = 7x - 64.$

$\times 64$, 7

256

64

796

$2^{12} = 4096.$

$49x^2 - y^2 = (7x - y)(7x + y)$

$$\cancel{\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{64\cdot(7x + 7x - 64)} = 20 \\ 7x + 4\sqrt[3]{(14x - 64)} = 20. \end{cases}}$$

$\times 28$, 5, 7

196

$7x + y + 2\sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -24.$

$7x + 4\sqrt[3]{(14x - 64)} = 20 \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{(14x - 64)} = 20 - 7x$

$\cancel{64}\ 796x - 4096 =$

$(20 - 7x)(20 - 7x)^2 = (400 - \cancel{140x} \overset{-280x}{-140x} + 49x^2)(20 - 7x) =$

$8000 - 5600x + 980x^2 - 2800x + 1960x^2 - 343x^3$

$8000 - 8400x + 2940x^2 - 343x^3 = 796x - 4096.$

$343x^3 - 2940x^2 + 9196x + 3904 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№~~1~~ 3

$$\begin{cases} ax+b \geqslant \sqrt{\frac{175}{4}-5x-x^2} \Leftrightarrow 2ax+2b \geqslant \sqrt{175-20x-4x^2} \\ ax+b \leqslant -\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4} \Leftrightarrow 12ax+12b \leqslant -4x^2+8x+81. \end{cases}$$

$D = 400 + 2800 = 3200.$

$x_{0_1} = \frac{20}{-8} = -\frac{5}{2}.$ От $\frac{1}{2}$ до $\frac{9}{2}$ первое условие

~~1) $\sqrt{175-10-1} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}.$~~

~~$\sqrt{175-90-81} = \sqrt{4} = 2.$~~ От

~~$2ax+2b \geqslant 2\sqrt{41} \Leftrightarrow ax+b \geqslant \sqrt{41}.$~~

~~2) $x_0 =$~~

2) ~~$4x^2+x(8-12$~~ $4x^2-x(8-12a)+12b-81 \leqslant 0.$

$x_0 = \frac{8-12a}{8} = 1-\frac{3}{2}a.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

~~$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\cdot\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x.$~~

$$\times\begin{array}{r}87\\16\\\hline 586\\87\\\hline 1296\end{array}$$

№6

$$\begin{cases} ax+b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4} \Rightarrow ~~4x^2 - 4x^2 + 8x + 81~~ \\ ax+b \geq \sqrt{\frac{175}{4} - 5x + x^2} \end{cases}$$

~~$4x^2 - 8x - 81 + 12ax + 12b \leq 0 \Leftrightarrow$~~

~~$4x^2 - x(8-12a) + 12b - 81 \leq 0$~~

~~$D = 64 - 192a + 144a^2 - 48b + 324$~~

~~$\frac{a}{2} + b \geq 2\sqrt{41}$~~

1). $175 - 20x - 4x^2$; $175 - 10 - 1 = 164 = (2\sqrt{41})^2$

$175 - 90 - 81 = 4 = 2^2$

1) Если $a \geq 0$, то функция $ax+b$ возраст. соотв, $\frac{a}{2}$, $a + 2b \geq 2\sqrt{41}$.

2) Если $a = 0$, то функция $ax+b$ const $\Rightarrow$ $b \geq 2\sqrt{41}$.

3) Если $a < 0$, то функция убывает и $a + 2b \geq 2\sqrt{41}$

$9a + 2b \geq 2$.

2) $12ax + 12b \leq -4x^2 + 8x + 81$. $x_0 = 2$.

$D = 64 + 1296 = 1360$.

$-1 + 4 + 81 = 282 \Rightarrow 6a + 12b \leq 82$

$-81 + 36 + 81 = 36 \Rightarrow 6a + 12b \leq 36 \Leftrightarrow a + 2b \leq 6$

$$\times\begin{array}{r}46\\46\\\hline 276\\184\\\hline 2116\end{array}$$

$$\times\begin{array}{r}25\\41\\\hline\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)