МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$9(x^2-2x+1)+y^2-12y+36 =$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$(x-1)(y-6) = xy-6x-y+6$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$36a^2-13ab+b^2=0$

$D = 169b^2-144b^2 = 25b^2$

$a_1 = \frac{13b+5b}{72} = \frac{18b}{72} = \frac{b}{4}$

$a_2 = \frac{13b-5b}{72} = \frac{8b}{72} = \frac{b}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2 \geq 0$

$26x-x^2=a$

$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12}+a \geq a^{\log_5 13}$

$a^{\log_5 12}+a-a^{\log_5 13} \geq 0$

$a\left(a^{\log_5(12)-1}+1-a^{\log_5(13)-1}\right) \geq 0$

$a^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)}-a^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)} \geq -1$

$\times\frac{144}{12}$ 288 144 1728

$\times\frac{169}{13}$ 507 169 2197

$12^3+125 \geq 13^3$

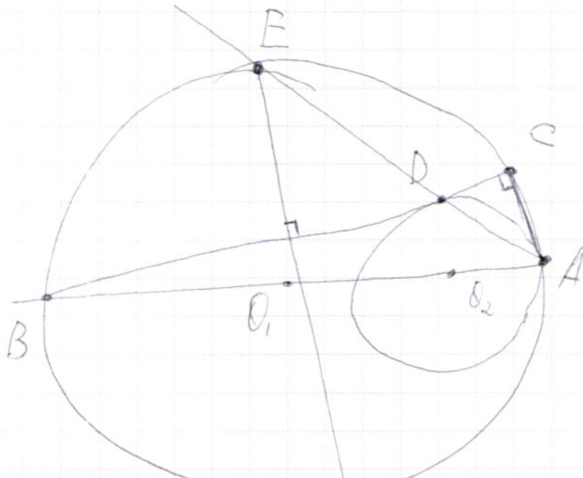
$\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 12}+\frac{1}{5} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5(13)}$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{5} \geq \frac{1}{13}$

$\times\frac{26}{26}$ 156 52 676

$\sqrt{576}=$

24 24 96 48 576



R - ?

r - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

CD = 12

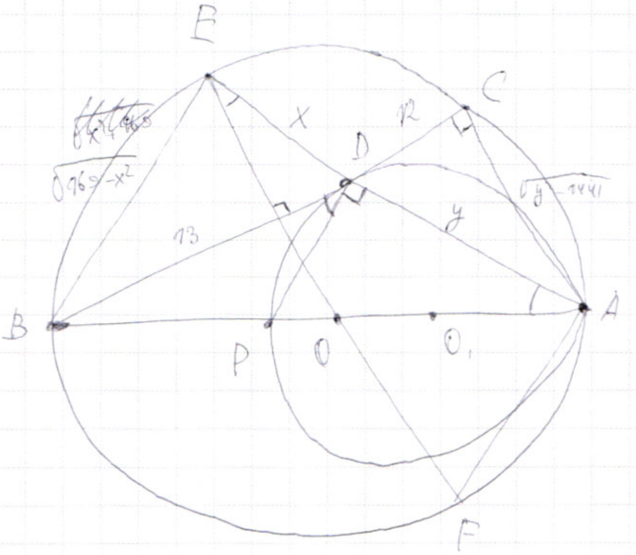
BD = 13

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$BA^2 = (x+y)^2 + 769 - x^2$

$BA^2 = 25^2 + y^2 - 144$

$x^2 + 2xy + y^2 + 769 - x^2 = 625 + y^2 - 144$

$2xy + 769 = 481$

$2xy = 312$

$xy = 156$

$BA = \sqrt{625 + y^2 - 144} =$

$= \sqrt{381 + y^2}$

$\frac{BP}{BA} = \frac{x}{x+y}$

$BP = \frac{BA \cdot x}{x+y}$

$\frac{BA^2 \cdot x}{x+y} = 769$

$\frac{BA}{PA} = \frac{x+y}{y}$

$\frac{PA + BP}{PA} = \frac{x+y}{y}$

$1 + \frac{BP}{PA} = \frac{x}{y} + 1$

$\frac{BP}{PA} = \frac{x}{y}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-(6x-4)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$x_0 = \frac{51}{36}$ $\quad D = 51^2$

№6

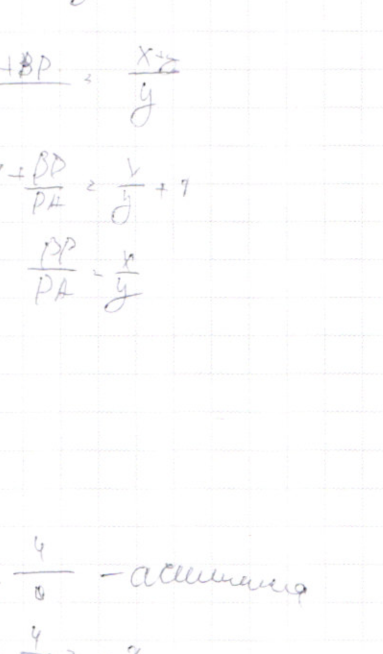
$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} = f(x)$ $\quad f\left(\frac{2}{3}\right) = -2 + \frac{4}{0}$ — асимптота

$f(2) = -2 + \frac{4}{4} = -1$

$18x^2 - 51x + 28 = g(x)$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 8 - 34 + 28 = 2$

$g(2) = 72 - 102 + 28 = -2$



☑ черновик ☐ чистовик

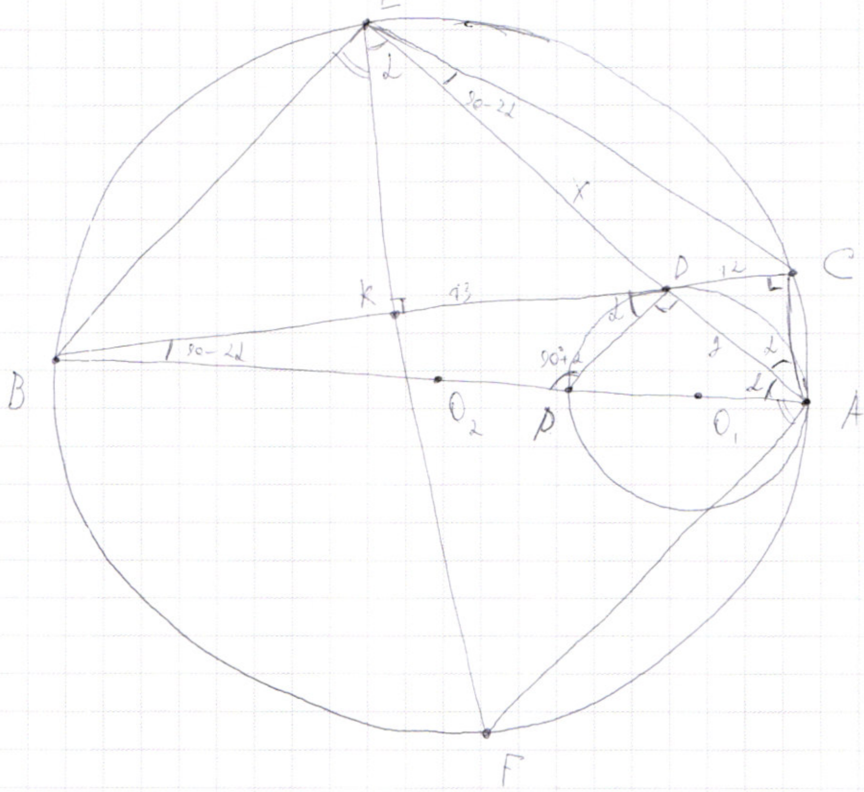
(Поставьте галочку в нужном поле)

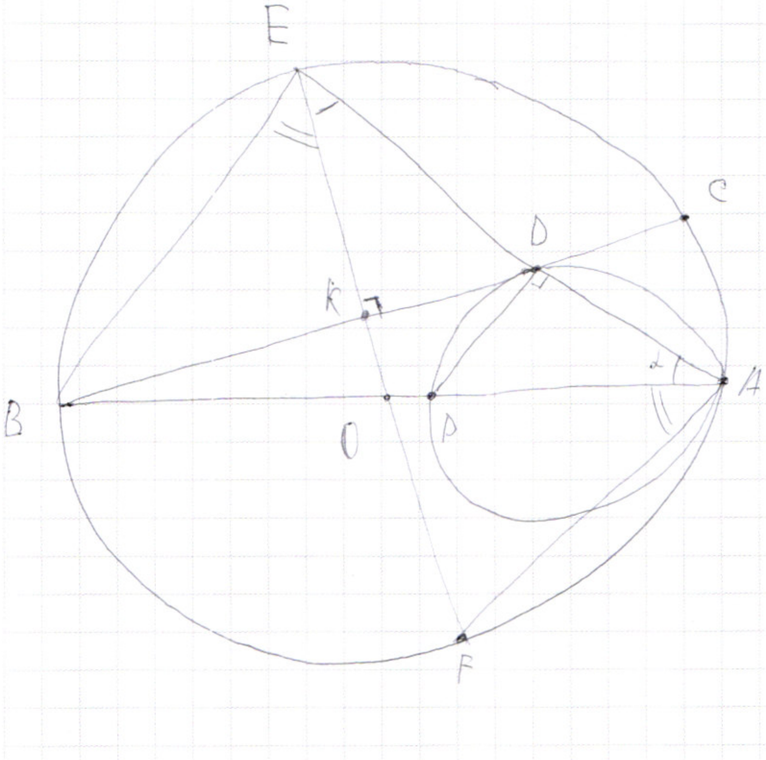
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





$BD = 13$

$CD = 12$

$\triangle BDP \sim \triangle BDA = \frac{BD}{BA}$

1) $\triangle BDA \sim \triangle EDC$, т.к.

$\angle CBA$ и $\angle AEC$ опираются на одну хорду

$\angle BDA$ и $\angle EDC$ — вертикальные

$\frac{ED}{BD} = \frac{DC}{DA}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$xy = 12 \cdot 13$

$CA = \sqrt{y^2 - 144}$

$BA = \sqrt{25^2 + y^2 - 144}$

$\frac{BA}{AD} = \frac{xy}{y}$

б) Пусть $\angle DAB = \alpha$, тогда $\angle BDP = \alpha$ ~~т~~ по теореме об угле между хордой и касательной

$\angle EDB = 90 - \alpha$

$\angle KED = \alpha$

$\angle BEF = \angle BAF$ опираются на одну хорду

$\angle EAF = 90°$ т.к. EF — диаметр

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(381+y^2)x}{x+y} = 763$$

$$381x + xy^2 = 763x + 763y$$

$$381x + 156y = 763x + 763y$$

$$212x = 93y$$

$$y = \frac{212}{93}x$$

Y

Y

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$\cancel{f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)+}$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(2)=1$

$f\left(\frac{4}{2}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

0 0

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(12)+f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=4$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{5}\right)= f(5)=f(5)+f\left(\frac{1}{5}\right)=0$

$f\left(\frac{28}{5}\right)=f(28)+f(5)$

$1=2+f(5)$

$f(5)=-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Пусть $x-1=a$, $y-6=b$, тогда

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$ab\geq 0$ $\quad$ $b-6a\geq 0$

$$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

Решим первое уравнение как квадратное относительно a

$36a^2-13ab+b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a_1=\frac{13b+5b}{72}=\frac{b}{4}$

$a_2=\frac{13-5b}{72}=\frac{b}{9}$

I Подставим $a=\frac{b}{4}$ во второе уравнение

$\frac{b^2}{16}+b^2=90$

$17b^2=144$

$b=\pm\frac{12}{\sqrt{17}}$ $\qquad a=\pm\frac{3}{\sqrt{17}}$

~~Обратная замена:~~
~~1) $\begin{cases} x-1=\frac{3}{\sqrt{17}} \\ y-6=\frac{12}{\sqrt{17}} \end{cases}$~~

Положительные пары не подходят при подстановке в первое уравнение.

Отрицательные подходят.

Обратная замена:

$$\begin{cases} x-7=-\frac{3}{\sqrt{97}} \\ y-6=\frac{-72}{\sqrt{97}} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=\frac{-3+7\sqrt{97}}{\sqrt{97}} \\ y=\frac{-72+6\sqrt{97}}{\sqrt{97}} \end{matrix}$$

II $a=\frac{b}{9}$

$$\frac{b^2}{81}+b^2=90$$

$$\frac{82b^2}{81}=90$$

$$b=\pm\sqrt{\frac{81\cdot 90}{82}}=\pm 9\sqrt{\frac{45}{41}}=\pm 81\cdot\sqrt{\frac{5}{41}} \qquad a=\pm 9\cdot\sqrt{\frac{5}{41}}$$

Подставим в первое уравнение:

$81\sqrt{\frac{5}{41}}-6\cdot 9\sqrt{\frac{5}{41}}=9\cdot 3\sqrt{\frac{5}{41}}$ — верно

$-81\sqrt{\frac{5}{41}}+6\cdot 9\sqrt{\frac{5}{41}}=9\cdot 3\sqrt{\frac{5}{41}}$ — неверно

$$\begin{cases} x-7=9\sqrt{\frac{5}{41}} \\ y-6=81\sqrt{\frac{5}{41}} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=9\sqrt{\frac{5}{41}}+7 \\ y=81\sqrt{\frac{5}{41}}+6 \end{matrix}$$

Ответ: $x_1=\frac{-3+7\sqrt{97}}{\sqrt{97}}$, $y_1=\frac{-72+6\sqrt{97}}{\sqrt{97}}$; $x_2=9\sqrt{\frac{5}{41}}+7$, $y_2=81\sqrt{\frac{5}{41}}+6$

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 72}+26x\geq x^2+73^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $26x-x^2=a$, тогда

$$|-a|^{\log_5 72}+a\geq 73^{\log_5 a}$$

ОДЗ: $a>0$

На ОДЗ модуль раскрывается с минусом

$$a^{\log_5 72}+a\geq a^{\log_5 73}$$

По методу рационализации, это неравенство имеет решение при

$0<a\leq 25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (Продолжение)

$0 < 26x - x^2 \leq 25$

$$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$D = 676 - 100 = 24^2$

$x_1 = \frac{26+24}{2} = 25$

$x_2 = \frac{26-24}{2} = 1$

$$\begin{cases} 0 < x < 26 \\ x \leq 1,\ x \geq 25 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} = g(x)$

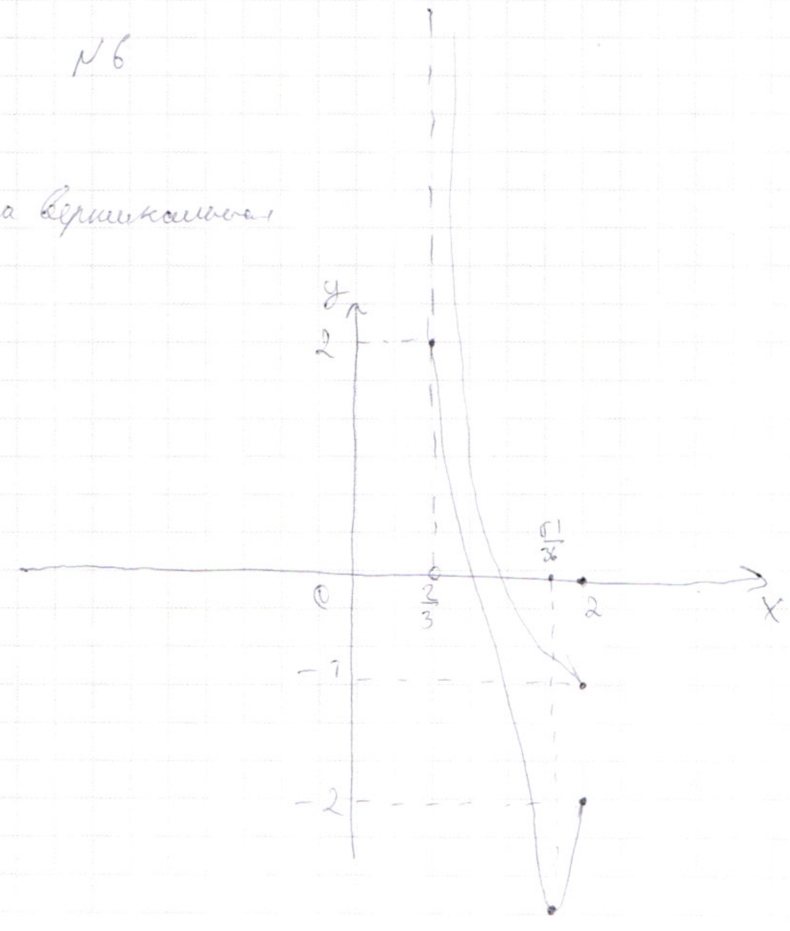
$g\left(\frac{2}{3}\right) = -2 + \frac{4}{0}$ – ассимптота вертикальная

$g(2) = -2 + \frac{4}{4} = -1$

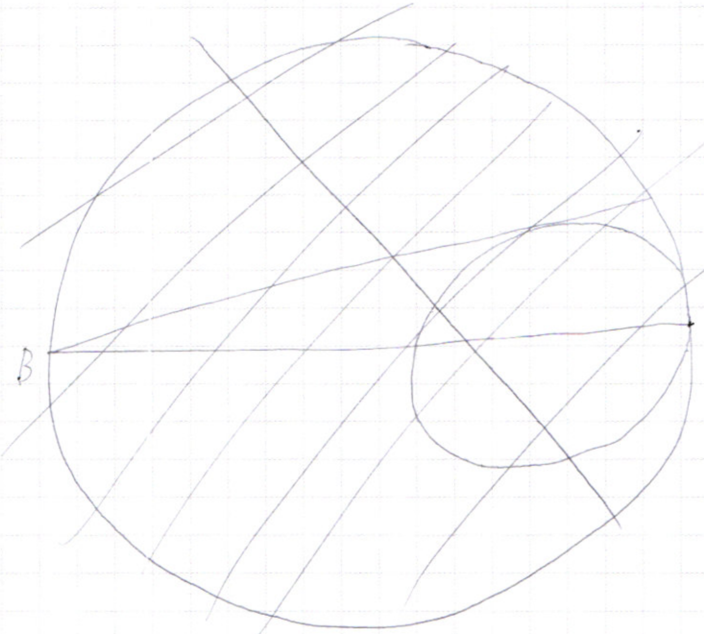
$18x^2 - 51x + 28 = f(x)$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8 - 34 + 28 = 2$

$f(2) = 72 - 102 + 28 = -2$



№4



~~1) Пусть ED = x; AD = y~~

1) Пусть $\angle PDA = \alpha$, тогда $\angle BDP = \alpha$ как угол между касательной и хордой

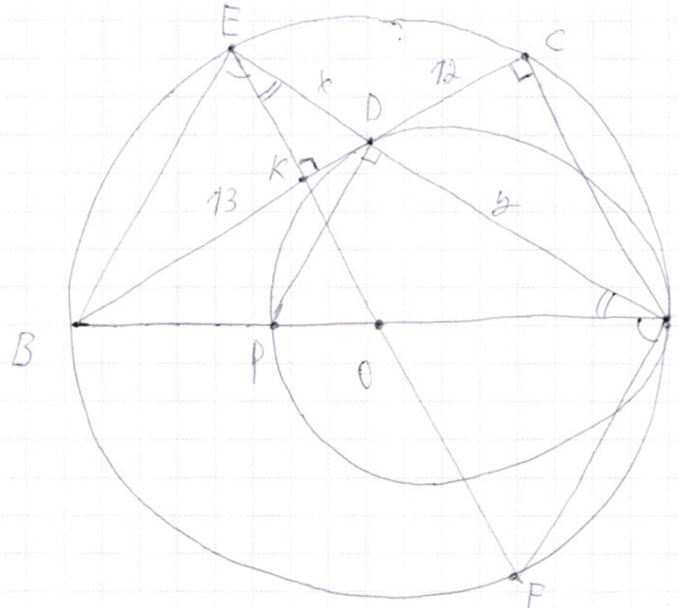
$\angle EDK = 90° - \alpha$

$\angle DEK = \alpha$

$\angle BEF = \angle BAF$ т.к. опираются на одну хорду

$\Downarrow$

$\angle EAF = \angle BEF = 90°$



2) Пусть $ED = x$, $AD = y$, тогда $CA = \sqrt{y^2 - 144}$ из $\triangle DCA$

$BA = \sqrt{625 + y^2 - 144} = \sqrt{481 + y^2}$

$\frac{BP}{PA} = \frac{x}{y}$ по т. Фалеса

$\frac{BP}{BA} = \frac{x}{x+y}$ $\quad BP = \frac{BA \cdot x}{x+y}$

$BD^2 = BP \cdot BA$ по т. о секущ. и кас.

$169 = \frac{BA^2 x}{x+y}$

$169 = \frac{(481 + y^2)x}{x+y}$

$169x + 169y = 481x + xy^2$

$xy = 12 \cdot 13$ т.к. произведение отрезков пересекающихся хорд равны

$169x + 169y = 481x + 156y$

$13y = 212x$

$\begin{cases} y = \frac{212x}{13} \\ xy = 156 \end{cases}$

$\frac{212x^2}{13} = 156$

$x = \sqrt{\frac{156 \cdot 13}{212}} = \sqrt{\frac{39 \cdot 13}{53}} = 13\sqrt{\frac{3}{53}}$

$y = 212\sqrt{\frac{3}{53}} = 4\sqrt{159}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (Продолжение)

$BA = \sqrt{481+16\cdot 159} = \sqrt{3025} = 55$

$R = \frac{55}{2}$

$r = \frac{55}{2}\cdot\frac{x+y}{y} = \frac{55}{2}\cdot\frac{225\sqrt{\frac{3}{53}}}{212\sqrt{\frac{3}{53}}} = \frac{55\cdot 225}{212\cdot 2}$

$\sin(\angle AFE) = \frac{EA}{EF} = \frac{EA}{AB} = \frac{x+y}{55} = \frac{225\sqrt{\frac{3}{53}}}{55} = \frac{45\sqrt{\frac{3}{53}}}{11}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{45\sqrt{\frac{3}{53}}}{11}\right)$

$S_{AFE} = \frac{1}{2}AF\cdot EA = \frac{1}{2}\cdot 225\sqrt{\frac{3}{53}}\cdot\sqrt{3025-225^2\cdot\frac{3}{53}}$

Ответ: $R=\frac{55}{2}$, $r=\frac{55\cdot 225}{212\cdot 2}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{45\sqrt{\frac{3}{53}}}{11}\right)$, $S_{AFE} = \frac{225}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{53}}\sqrt{3025-225^2\cdot\frac{3}{53}}$

159×76: 954, 1113, 12084; $+481$ → 3025

55×55: 275, 275 → 3025

№5

Заметим, что тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) = 0$ при x — натуральных

т.к. $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, при p — простом это положительно

$f(a)$, где a составное есть сумма $f(p_i)$ где p — простые, а все они положительные

$f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=0$ $f(7)=1$

$f(8)=0$ $f(9)=0$ $f(10)=1$ $f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$

$f(16)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=0$ $f(19)=4$ $f(20)=1$ $f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$

$f(24)=0$ $f(25)=2$ $f(26)=3$ $f(27)=0$ $f(28)=1$

~~я заметил, равно 0 при $x\in[4;28]$ 8 раз~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{f\left(\frac{7}{4}\right)=}$ $f\left(\frac{7}{4}\right)+f(12)=f(3)$

$f\left(\frac{7}{4}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{5}\right)+f(10)=f(2)$

$f\left(\frac{7}{5}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{6}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{7}\right)+f(14)=f(2)$

$f\left(\frac{7}{7}\right)=-1$

Ан-но:

$f\left(\frac{7}{8}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{9}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{10}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{11}\right)=-2$

$f\left(\frac{7}{12}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{13}\right)=-3$

$f\left(\frac{7}{14}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{15}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{16}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{17}\right)=-4$

$f\left(\frac{7}{18}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{19}\right)=-4$

$f\left(\frac{7}{20}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{21}\right)=-1$

$f\left(\frac{7}{22}\right)=-2$

$f\left(\frac{7}{23}\right)=-5$

$f\left(\frac{7}{24}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{25}\right)=-2$

$f\left(\frac{7}{26}\right)=-3$

$f\left(\frac{7}{27}\right)=0$

$f\left(\frac{7}{28}\right)=-1$

Так как $0=f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)=f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$f\left(\frac{1}{n}\right)=-f(n)$

2) Если всего при $x\in[1;28]$

9 знач. дающих 0

8 знач. дающих 1

3 знач. дающих 2

2 дающ. 3

2 дающих 4

Для значений дающих большее число нам в пару подойдут все, дающие меньшее число

$2\cdot(2+3+8+9)+2(3+8+9)+3(8+9)+$

$+8\cdot9=2\cdot22+2\cdot20+3\cdot17+8\cdot9=$

$=44+40+51+72=207$

Ответ: 207

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)