МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3). $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (x^2 - 10x)}$

Условия: $10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$x(x-10) < 0$

$$10x - x^2 \geq 5^{\log_3 (10x - x^2)} - (10x - x^2)^{\log_3 4}$$

Прологарифмируем обе части н-ва по основанию 3, т.к. $3>1$:

$$\log_3 (10x - x^2) \geq \log_3 5^{\log_3 (10x - x^2)} - \log_3 (10x - x^2)^{\log_3 4}$$

$$\log_3 (10x - x^2) \geq \log_3 (10x - x^2) \cdot \log_3 5 - \log_3 4 \cdot \log_3 (10x - x^2)$$

$$\log_3 (10x - x^2) \cdot (\log_3 5 - \log_3 4 - 1) \leq 0$$

$$\log_3 (10x - x^2) \cdot (\log_3 \tfrac{5}{4} - \log_3 3) \leq 0$$

$$(\log_3 (10x - x^2) - \log_3 1)(\log_3 \tfrac{5}{4} - \log_3 3) \leq 0$$

Рационализируем:

$$\overset{\geq 0}{(3-1)^2}(10x - x^2 - 1)\overset{\leq 0}{(\tfrac{5}{4} - 3)} \leq 0$$

$10x - x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 10x + 1 \leq 0$

$(x-5)^2 - 24 \leq 0$

$(x - (5 + 2\sqrt{6}))(x - (5 - 2\sqrt{6})) \leq 0.$

$0 \overset{<}{\vee} 5 - 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6} \vee 5$

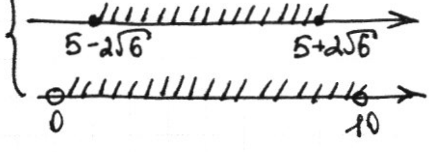
$24 < 25$

$10 \overset{>}{\vee} 5 + 2\sqrt{6}$

$5 \vee 2\sqrt{6}$

$25 > 24$

Значит:



с учётом условий

Ответ: $x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

② $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

<u>Условия:</u> $2xy-12y-x+6\geq 0$

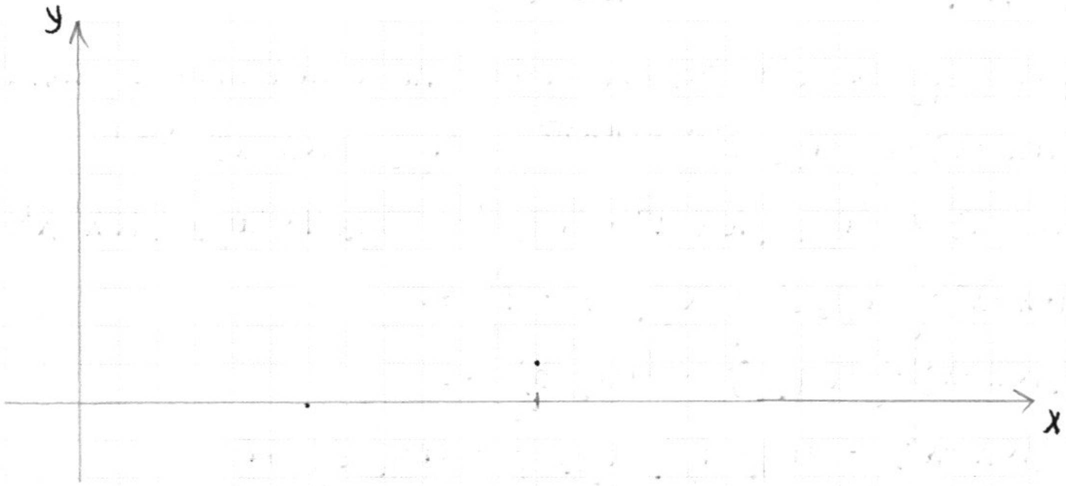
$(x-6)(2y-1)\geq 0 \Rightarrow (x-6)(y-\frac{1}{2})\geq 0$

(2): $x^2-12x+36+36y^2-2\cdot 6y\cdot 3+9=45+36+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=(3\sqrt{10})^2$

$(x-6)^2+\frac{1}{36}(y-\frac{1}{2})^2=(3\sqrt{10})^2$

эллипс в центре в точке $(6;\frac{1}{2})$, ~~сжатый~~ растянутый в 36 раз отн. оси Ox



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta \cancel{-1+1}) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 2\cos 2\beta\cdot$

$\cdot(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, по основному тригоном. тождеству: (О.Т.Т.)

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Известно, что $tg\,\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \cos 2\alpha \neq -1$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha \pm (2\cdot\cos^2\alpha - 1) = -\frac{1}{2}$

Учитывая, что: $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ из О.Т.Т.

$tg\,\alpha\cdot\frac{1}{tg^2\alpha+1} \pm \left(2\frac{1}{tg^2\alpha+1} - 1\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1} \pm \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} = -\frac{1}{2}$

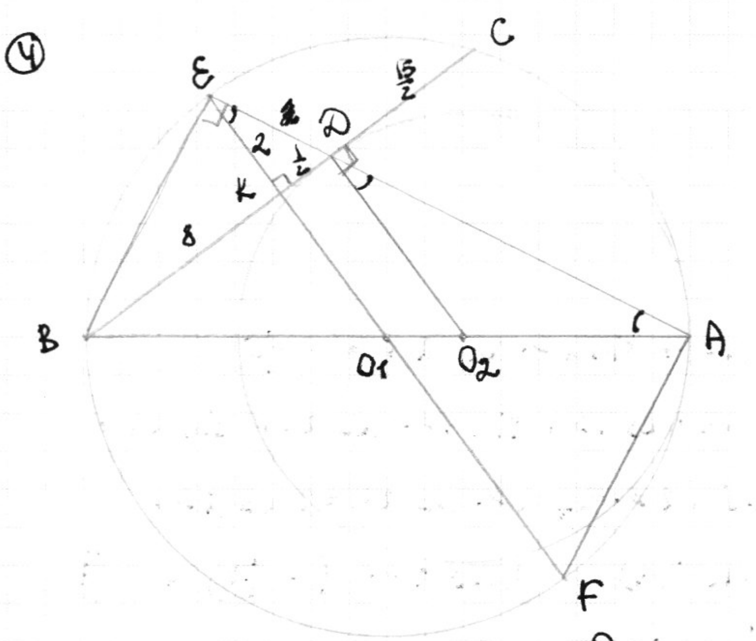
$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{tg^2\alpha+1} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{2tg\,\alpha-1}{tg^2\alpha+1} = -\frac{1}{2}, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} -2 = tg^2\alpha + 1, \\ 4tg^2\alpha - 2 = -tg^2\alpha - 1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \varnothing \\ 5tg^2\alpha = 1, \quad tg\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

~~Или: $\cos 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$~~

~~$\sin(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

Ответ: $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

4



Дано: Окр. $\Omega (R)$, Окр. $\omega (r)$

AB - диаметр, $AB = 2R$, BC - хорда

BC кас. $\omega = D$, $AD \cap \Omega = E$

$q \perp BC$, $E \in q$, $q \cap \Omega = F$

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

Найти: R, r; $\angle AFE$, S_{AEF}

Решение

$O_1, O_2 \in AB$ по постр.

1. ~~BC кас. ω ⇒~~ Пусть O_1 и O_2 – центры окр. Ω и ω соответ.
2. BC кас. $\omega \Rightarrow O_2D \perp BC$, O_2D – радиус
3. $\triangle O_2DA$ – р/б $(O_2D = O_2A = r) \Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AD$

$O_2D \perp BC$; q, т.е. $EF \perp BC$ $\Big| \Rightarrow q \parallel O_2D$, $EF \parallel O_2D \Rightarrow \angle AEF = \angle O_2DA$ как соотв.

$\angle AEF = \angle O_2AE \Rightarrow \triangle EQA$ – р/б $\Rightarrow Q_1 = Q$, $EO_1 = AO_1 = R$

пусть $EF \cap AB = Q$ т.к. чем больше AQ, тем меньше EQ.

Значит, EF – диаметр

4. BC – хорда, EF - диаметр; $BC \perp EF$, $BC \cap EF = K$ $\Big| \Rightarrow BK = CK$. $BD = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16 \Rightarrow BK = CK = 8$

$KD = CK - CD = \frac{1}{2}$

5. ~~BC и AE – хорды: BD·CD~~ AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$\triangle DEB$, $\triangle DKE$ – прямоуг; $\angle BDE$ - общий $\Big| \Rightarrow \triangle DEB \sim \triangle DKE$: $\cancel{\frac{BD}{ED} = \frac{ED}{KD} \Rightarrow ED^2 = 4, ED = 2}$

анал. $\triangle BEK \sim \triangle DKE$: $\frac{BK}{EK} = \frac{EK}{KD} \Rightarrow EK = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{2}} = 2$

Отсюда $BE = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $ED = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

6. AD, BC – хорды: $ED \cdot AD = BD \cdot CD \Rightarrow AD = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{15\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = \frac{16\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$
7. по Th Пифагора $AB = 2R = \sqrt{20 + 64 \cdot 17} = 2\sqrt{5 + 16 \cdot 17} = 2\sqrt{277}$, $R = \sqrt{277}$
8. по Th Фалеса для $O_1E \parallel O_2D$ при AB, BC – сек.: $\frac{BK}{R} = \frac{BD}{2R - r}$

$16R - 8r = 8{,}5R \Rightarrow r = \frac{7{,}5R}{8} = \frac{15}{16}\sqrt{277}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ (продолжение)

9. EF – диаметр $\Rightarrow EF = 2R$, $\angle EAF = 90°$

в $\triangle EAF$ – прямоуг: $\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE} = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{2\sqrt{277}} = 4\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{277}}$

$\angle AFE = \arcsin 4\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{277}}$

10. $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{85}$

по Th Пифагора $AF = \sqrt{4\cdot 277 - 64\cdot 17} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

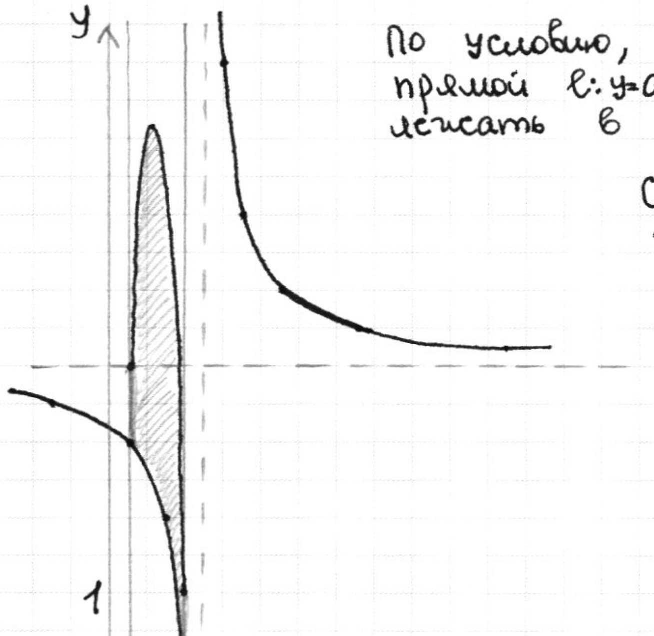
Ответ: $\sqrt{277}$; $\frac{15}{16}\sqrt{277}$; $\arcsin 4\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{277}}$; $8\sqrt{85}$.

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$, $x\in[\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ гипербола, сдвинутая $\rightarrow$ на $\frac{5}{4}$; $\uparrow$ на 4

$-32x^2+36x-3=0$ парабола, ветви $\downarrow$, $x_0\in[\frac{1}{4};1]$

$x_0 = \frac{9}{16}$; $y_0 = 7\frac{1}{8}$ пересекает границы: $(\frac{1}{4};4)$, $(1;1)$



По условию, ~~прямая должна лежать~~ отрезок прямой $l: y=ax+b$, принадлежащей $[\frac{1}{4};1]$, должен лежать в заштрихованной области.

Случай, когда прямая касается гиперболы: (прямая проходит ч/з $(\frac{1}{4};4)$):

$a = f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2}$

$-\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2}(x-x_0) + 4 - \frac{1}{x_0-\frac{5}{4}} = ax+b$

$b = \frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2} - \frac{1}{x_0-\frac{5}{4}} + 4$

$4 = \frac{1}{4}a + b \Rightarrow b = 4 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2}$

$x_0 \ne \frac{5}{4}$: $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x_0-\frac{5}{4}} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 2$

$\begin{cases} 4 = \frac{1}{4}a + b, \\ 2 = \frac{3}{4}a + b, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = -\frac{1}{2}a, \\ b = 4 - \frac{1}{4}a, \end{cases}$

$\begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$ Все остальные случаи: прямые находятся не выше гиперболы и не касаются её, а значит, пересекают её, что не подходит условию.

Ответ: $(-4; 5)$

⑥. $f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

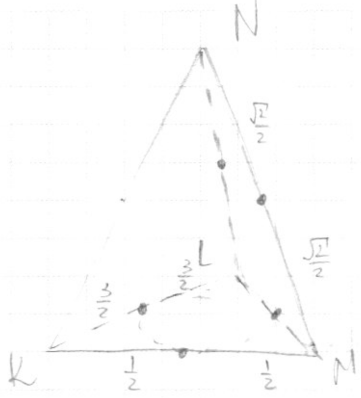
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

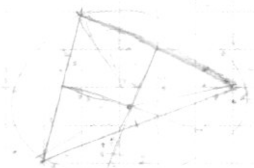
ШИФР

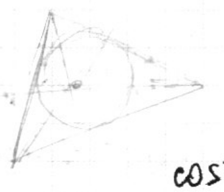
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

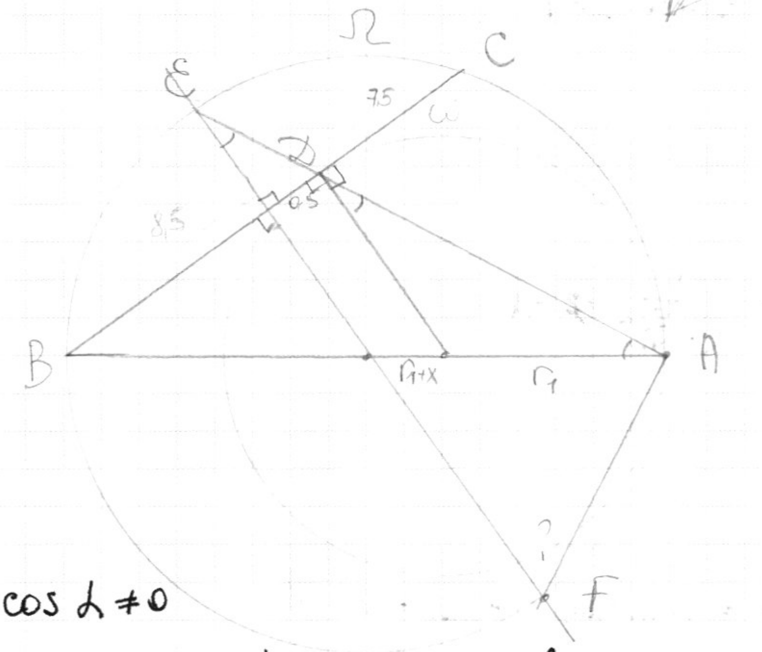


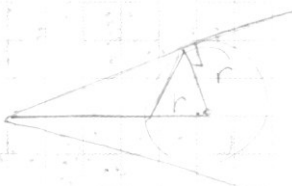




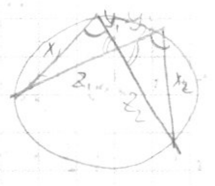
~~ΔKLM-пр~~

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha+1}$$





8,5 7,5 -



$\frac{x_1}{x_2}$ $\frac{y_1}{y_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{y}{y_2}$

$\cos\alpha \neq 0$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$tg\, 2\beta = \pm 2$

$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm (2\cos^2\alpha - 1)\cancel{2} = -\frac{1}{2}$

$\cos\alpha(\sin\alpha \pm 2\cos\alpha) = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\cancel{\cos\alpha = \frac{1}{2}} \\ - \end{array}\right.$

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\cos\alpha \pm (2\cos^2\alpha - 1) = -\frac{1}{2}$

$\cancel{\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\cos\alpha = \left[\begin{array}{l}2\cos^2\alpha - \frac{3}{2} \\ -2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\end{array}\right.}$

$tg\alpha\cdot\cos^2\alpha \pm \left(\frac{2}{tg^2+1} - 1\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{tg\alpha}{tg^2\alpha+1} \pm \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{tg\alpha \pm 1 \mp tg\alpha}{tg^2\alpha+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\rightarrow tg\alpha = \varnothing$

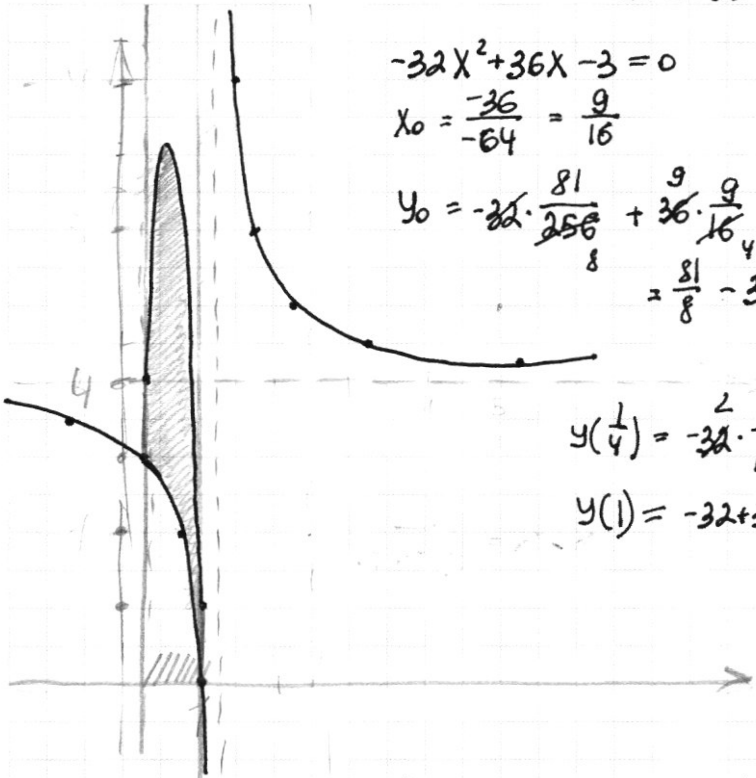
$\left[\begin{array}{l}-2 = tg^2\alpha + 1 \\ 4tg^2\alpha - 2 = -tg^2\alpha - 1\end{array}\right.$

$5tg^2\alpha = 1$

$tg\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}$

⑥ $\begin{array}{l|l} 16x-16 & 4x-5 \\ \underline{16x-20} & 4 \\ \quad 4 & \end{array}$ $4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

~~16x-20~~



$-32x^2+36x-3=0$

$x_0=\frac{-36}{-64}=\frac{9}{16}$

$y_0=-\cancel{32}\cdot\frac{81}{\cancel{256}_8}+\cancel{36}^{9}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_4}-3=$

$=\frac{81}{8}-3=\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}$

$y\left(\frac{1}{4}\right)=-\cancel{32}^{2}\cdot\frac{1}{16}+\cancel{36}^{9}\frac{1}{\cancel{4}}-3=4$

$y(1)=-32+36-3=1$

$\left(4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)'=\frac{0-1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=-\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=\cancel{3}=a$

$0=-\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}\cancel{3}1+b$

$b=\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=-a$

$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)=a(x-x_0)+f(x_0)=ax+b$

$\begin{cases}4=a\cdot\frac{1}{4}+b,\\1=a\cdot1+b,\end{cases}$ $\begin{cases}3=-\frac{3}{4}a,\\b=1-a,\end{cases}$

$a=-4,\ b=5$

$b=4+\frac{1}{x_0-\frac{5}{4}}-\frac{1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}\cdot x_0=\frac{1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}\left(4-\frac{x_0}{x_0-\frac{5}{4}}\right)=$

$\Rightarrow \frac{x_0}{x_0-\frac{5}{4}}=4-1=3$

$x_0=3x_0-\frac{15}{4}$

$x_0=\frac{15}{8}.$

$y=$

$4x_0-5=3$

$x_0=2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}=\sqrt{2y(x-6)+(x-6)}=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2-12x+36+\overset{(6y)^2}{36y^2}-\overset{6y\cdot 2\cdot 3}{36y}+9=90 \end{cases}$$

Условие: $(x-6)(2y-1)\geq 0$, $x-12\geq 0$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+x+144y^2+12y-26xy+6=0$ $\qquad (x+\frac{1}{2})^2+(12y+1)^2$

$\cancel{(x^2+x)}$

$10^x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

Условия: $10x-x^2>0$

$x^2-10x<0$

$\underline{x(x-10)<0}$

$10x-x^2\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}-|x^2-10x|^{\log_3 4}$

$\log_3(10x-x^2)\geq\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 5-\log_3 4\cdot\log_3(|x^2-10x|)$

$\log_a b^{\log_a x}=\log_3$

$\log_3(10x-x^2)\geq\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3\frac{5}{4}$

$\log_3(10x-x^2)\cdot(1-\underbrace{\log_3\frac{5}{4}}_{=\log_3\frac{12}{5}})\geq 0$

$(10x-x^2-1)(\overset{>0}{\cancel{\frac{12}{5}-1}})\geq 0$ $\qquad 5+2\sqrt{6}\ \overset{<}{\vee}\ 10$

$\overset{2\cdot 5}{}$ $\qquad 2\sqrt{6}\ \vee\ 5$

$x^2-10x+1\leq 0$ $\qquad 24<25$

$(x-5)^2-24\leq 0$ $\qquad 5-2\sqrt{6}\ \overset{>}{\vee}\ 0$

$\qquad 5\ \vee\ 2\sqrt{6}$

$(x-5-2\sqrt{6})(x-5+2\sqrt{6})\leq 0$ $\qquad 25>24$

Ответ: $x\in[5-2\sqrt{6};\ 5+2\sqrt{6}]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta \cancel{-1} \cancel{+1}) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) =$

$= \cancel{2}\cdot\overset{\cos 2\beta}{}\left(\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\right) = \cancel{-}\frac{\cancel{2}}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}.$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} \pm \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big|\cdot\sqrt5$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1,\\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cdot 2\cos^2\alpha - 2\cdot 1 = -1\\ 2\sin\end{array}\right.$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1} = \frac{2\,\cancel{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha}{2-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

~~2α = arcco~~

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cancel{\sin\alpha - \sin\beta} = \sin(2\alpha+2\beta) - \sin(2\alpha+4\beta) = -2\sin\frac{\cancel{2\beta}\,\beta}{\cancel{2}}\cdot\cos(2\alpha+3\beta)$

$\frac{1}{36}(y-\frac12)^2 = 81$

$y-\frac12 = 54 \quad$ при $x=3$

$y-\frac12 = 9\sqrt{10} \quad$ при $x=6$

$y = \frac{18\sqrt{10}+1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

$f(4)=0$
$f(6)=0$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(12)=0$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(18)=0$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(24)=0$

$\cancel{f(p)=f(p)+}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=3f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=2f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{12}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{12}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{2}{15}\right)=0+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)<0$?

$f\left(\frac{3}{10}\right)=0+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$\cancel{16}$ $17^2=289$

$289-17=272$

$272+5=277$

$\frac{KD}{ED}=\frac{ED}{BD}\Rightarrow ED^2=4\Rightarrow ED=2$

$\frac{8}{EK}=\frac{EK}{\frac{1}{2}}\Rightarrow EK=2$

$\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}=8\cdot AD$

$AD=\frac{15\cdot 17}{32}$

$20+\frac{17}{4}=\frac{97}{4}$

$\frac{8}{\sqrt{277}}=\frac{17}{2(\sqrt{277}+x)}$

$16\sqrt{277}+16x=17\sqrt{277}$

$x=\frac{\sqrt{277}}{16}\Rightarrow r=R-x=\frac{15}{16}\sqrt{277}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)