МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} =$

$= \pm \cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}} \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$;

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad |:\cos^2\alpha$

$8\,\mathrm{tg}\,\alpha \pm (1-\mathrm{tg}^2\alpha) = -1-\mathrm{tg}^2\alpha$

($\mathrm{tg}\,\alpha$ определён, поэтому $\cos\alpha \neq 0$)

Пусть $x = \mathrm{tg}\,\alpha$

$8x \pm (1-x^2) = -1-x^2$

Решаем для каждого случая:

$8x + 1 - x^2 = -1 - x^2$

$8x = -2$

$x = -\frac{1}{4}$

$8x - 1 + x^2 = -1 - x^2$

$2x^2 + 8x = 0$

$2x(x+8) = 0$

$x = 0$ или $x = -8$.

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{4}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -8$.

Ответ: $-\frac{1}{4}$; 0; -8.

② $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

ОДЗ:

$3y - 2x \geq 0$

$y \geq \frac{2}{3}x$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = (15x-3)^2 - 4\cdot 9(4x^2+2x-2) = 9\left((5x-1)^2 - 4(4x^2+2x-2)\right) =$

$= 9(9x^2 - 18x + 9) = 9(3x-3)^2$

$y_1 = \frac{15x - 3 + 3(3x-3)}{2\cdot 9} = \frac{15x - 3 + 9x - 9}{2\cdot 9} = \frac{24x-12}{2\cdot 9} = \frac{4x-2}{3}$

$y_2 = \frac{15x - 3 - 3(3x-3)}{2\cdot 9} = \frac{6x+6}{2\cdot 9} = \frac{x+1}{3}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$(3x^2 - 6x + 3) + (3y^2 - 4y + \frac{4}{3}) = 4 + 3 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3} \quad |:3$

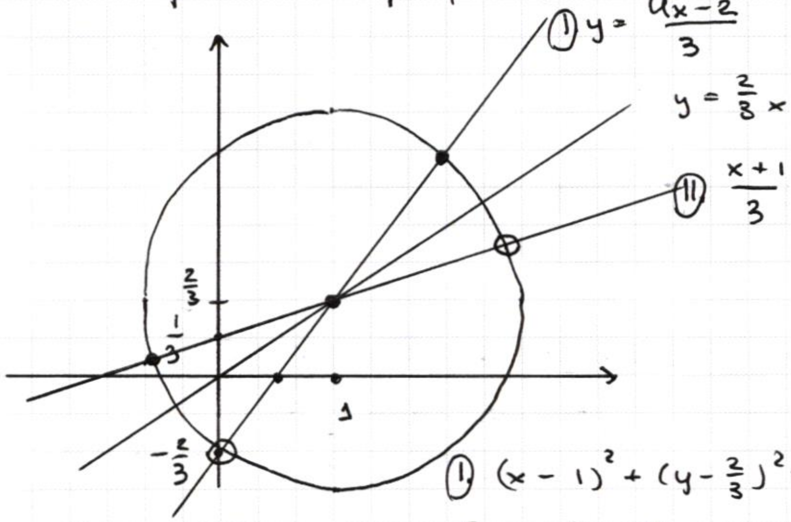
$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Построим графики:



Из ОДЗ $\Rightarrow y \geq \frac{2}{3}x$

Значит, две точки, г ниже графика $y = \frac{2}{3}x$ не удовл. ОДЗ. Т.к. есть всего 4 точки пересечения, то решения будет 2.

Подставим:

① $(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \left(\frac{4x-4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \quad |\cdot 9$

$9x^2 - 18x + 9 + 16x^2 - 32x + 16 = 25$

$25x^2 - 40x = 0$

$5x(5x-8) = 0$

$x = 0$ или $x = \frac{8}{5}$

лежит ниже $y = \frac{2}{3}x$

$y = \frac{11}{15}$

⑪ $(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Big| \cdot 9$

~~$9x^2 - 18x + 9$~~

$10(x-1)^2 = 25$

$(x-1)^2 = \frac{5}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ лежит ниже $y = \frac{2}{3}x$.

$x - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{2-\sqrt{10}+2}{6} = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$

Ответ: $\left(\frac{8}{5}; \frac{11}{15}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

⑤ $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

Построим графики $y = \frac{4x-3}{2x-2}$ и $y = 8x^2 - 34x + 30$

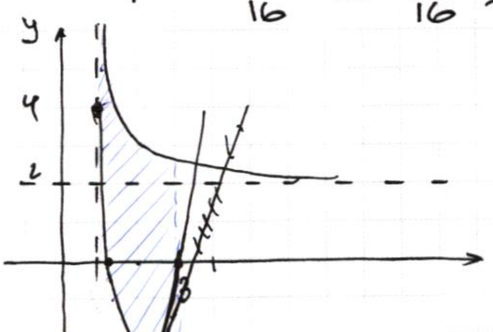
$y = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

Горизонт. асимптота $y = 2$, вертикальная $x = 1$.

$y = 8x^2 - 34x + 30$

$D = 34^2 - 4\cdot 8\cdot 30 = 4(17^2 - 240) = 17^2$

$x_1 = \frac{34+17}{16} = \frac{51}{16} > 3$ $\qquad x_2 = \frac{34-17}{16} = \frac{17}{16} \in (1; 3]$



$y = ax + b$

левый конец $(x = 1)$ $\quad y \in [4; +\infty)$

правый конец $(x = 3)$ $\quad y \in [0; \frac{9}{4}]$

(Продолжение на странице N 5)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Известно: $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p - простое

$x \in [3:27]$, $y \in [3:27]$

Рассмотрим $f(k)$, где $k \in \mathbb{N}$:

Докажем, что $f(k^n) = n \cdot f(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Метод математической индукции:

База $n = 1$:

$f(k^1) = f(1) + f(k) = f(k)$

$f(1) = 0$, т.к: $f(1 \cdot a) = f(1) + f(a)$; $f(a) = f(1) + f(a)$;

$f(1) = 0$.

База индукции доказана

Переход:

Пусть доказано для всех n. Докажем для n+1.

$f(k^{n+1}) = f(k \cdot k^n) = f(k) + f(k^n) = f(k) + \underbrace{n \cdot f(k)}$

$f(k^{n+1}) = (n+1) \cdot f(k)$. известно из предполож. индукции.

чтд.

Заметим, что

любое натуральное можно представить как произведение степеней простых чисел:

$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$f(k) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot f(p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 \cdot f(p_1) \ldots \alpha_n f(p_n) =$

$= \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$. т.к. целая часть простого делённого на 4 и все степени ≥ 0, то $f(k) \geq 0$

Чтобы $f(k) = 0$ нужно чтобы все простые делители k были меньше 4. Меньше 4 только 2 и 3. То есть, если $k = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$, то $f(k) = 0$.

Заметим также, что: $f(1) = 0 \Downarrow$

$f(1) = f(k \cdot \frac{1}{k}) = f(k) + f(\frac{1}{k})$.

~~Выше доказано, что $f(1) = 0$~~ $\Rightarrow$ $f(\frac{1}{k}) = \cancel{f(-k} - f(k)$

~~$f(\frac{1}{k}) = 0$ когда $f(k) = 0$ а т.к.~~

~~т.к. $f(k) \geq 0$, то $f(\frac{1}{k}) \leq 0$.~~

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Составим таблицу значений:

$f(x) =$	0	1	2	3	4	5
подход. x:	3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24	5; 7; 10; 14; 15; 20; 21	11; 22; 25	13	17; 19	23
Кол-во x	9	7	3	1	2	1.

$9 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 126 + 49 + 12 + 3 + 2 = 192$.

Ответ: 192 варианта.

(3) $3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

~~Пусть $x^2+6x = y$~~

~~$3^{\log_4 y} + y \geq |y|^{\log_4 5}$~~

ОДЗ:

$x^2+6x > 0$ (*)

(*) $\Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x + x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Пусть $\log_4 (x^2+6x) = y$. Тогда $x^2+6x = 4^y$

$3^y + 4^y \geq 4^{y \cdot \log_4 5}$

$3^y + 4^y \geq 5^y$

При $y < 0$ Нер-во верно, т.к. 5^y будет убывать быстрее и чем 3^y, и чем 4^y.
При $y=0$ $5^0 = 1$, $3^0 = 1$.

$\Rightarrow 5^y \leq 3^y$ при $y<0$

Значит, $5^y \leq 3^y + 4^y$ при $y<0$.

При $y=0$:

$1 + 1 \geq 1$ – верно.

При $y>0$: 5^y будет возрастать быстрее, чем обе ф-ии, поэтому сначала 5^y возрастет так, что $5^y = 3^y + 4^y$, а потом будет больше.

Равенство достигается при $y = 2$

$y \in (-\infty; 2]$

$x^2+6x \leq 2$

$x^2+6x-2 \leq 0$

$x^2+6x-2 = 0$

$x = \pm\sqrt{11} - 3$

Ответ: $x \in [-\sqrt{11}-3; \sqrt{11}-3]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

Рассмотрим прямую $y = ax + b$, проходящую через точки $(1;4)$ и $(3;0)$

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \qquad 2a = -4 \quad b = 6$$
$$a = -2$$

$$y = -2x + 6$$

Рассмотрим точки пересечения $y = -2x+6$ с графиком $y = \frac{4x-3}{2x-2}$

$$-2x + 6 = \frac{4x-3}{2x-2}; \quad -4x^2 + 4x + 12x - 12 = 4x - 3$$

$$4x^2 - 12 + 9 = 0$$

$$(2x-3)^2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Точка пересечения одна, она принадлежит промежутку $x \in [1, 3]$ и при этом в точке левее и точке правее $y = -2x + 6$ принимает меньшее значение, чем $y = \frac{4x-3}{2x-2}$. Значит, $y = -2x+6$ – касательная.

При этом, если левый конец прямой будет принимать большие значения, а правый останется таким же, то прямая будет пересекать $y = \frac{4x-3}{2x-2}$, а, значит, будет промежуток, когда условие $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$ не выполняется.

Аналогично, если левый конец увеличивать, а правый оставить таким же.

Если увеличивать значения на обоих концах прямой, то функция станет больше во всех точках, ~~следовательно~~ включая $x = \frac{3}{2}$. Значит, появится промежуток, где не выполняется условие $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$.

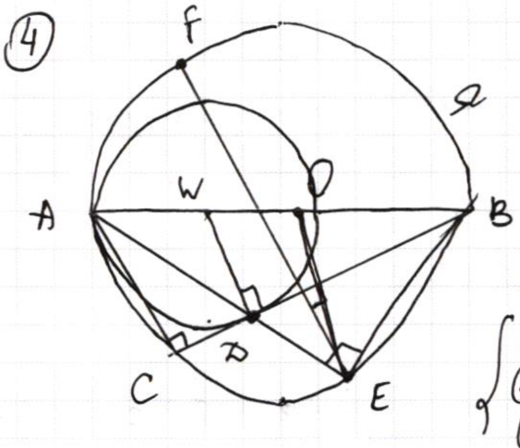
Если уменьшить значение хотя бы на одном конце ф-ции, то не выполнится условие $ax+b \geq 8x^2+30-34x$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит, $y=-2x+6$ — единственная прямая удовлетворяющая обоим условиям.

Ответ: $(-2; 6)$.

④



(1) $\angle ACB = 90^\circ$ (впис., опир. на диаметр)

$BC = CD + BD = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = 9$

(2) $\angle AEB = 90^\circ$ (впис., опир. на диаметр)

(3) $\angle ADC = \angle BDE$ (вертик.)

$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BED$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{BD} \qquad CD \cdot BD = AD \cdot DE = \frac{65}{4}.$$

Пусть r — радиус маленькой окр.; R — большой

$\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BWD = \alpha \Rightarrow \angle BOE = \alpha$

$\angle AWD = \angle AOE = 180 - \alpha$

$$\begin{cases} AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(180-\alpha) \\ (AD+DE)^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180-\alpha) \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \\ \sin\alpha = \frac{BC}{R} = \frac{9}{R} \\ AD \cdot DE = \frac{65}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 = 2r^2(1+\cos\alpha) \\ (AD+DE)^2 = 2R^2(1+\cos\alpha) \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{81}{R^2}} \\ AD \cdot DE = \frac{65}{4} \end{cases}$$

4 уравнения с 4 неизвестными решаем: из них мы узнаем r и R.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}$ $\quad 3^{\log_4 y} \geq y^{\log_4 5} - y$

$3^{\log_4 y} = \cancel{y\left(y^{\log \frac{5}{4}} - 1\right)}$ $\quad \cancel{\frac{3^{\log_4 y}}{y}} \geq$

$= y^{\log_4 3}$ $\quad \cancel{3} \quad 4^{\log_4 y} = y$

$\frac{3^{\log_4 y}}{y} \geq y^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1.$

$y^{\log_4 3} + y^{\log_4 4} \geq y^{\log_4 4} = 1.$

$\geq y^{\log_4 5}$

$ax + b$

$: \log_4 3$

$(1;4)$ $\quad (3;0)$ $\quad a^{\log_b c}$

$\frac{5}{3 \cdot 4}$ $\quad c^{\log_b a}$

$1 + y^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq y^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$\cancel{1 \geq y^{\log_4 \frac{5}{3}} - y^{\log_4 \frac{4}{3}}}$

$a + b = 4$

$3a + b = 0$

$\cancel{1 \geq y^{\log_4 \frac{4}{3}}\left(y^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1\right)}$

$2a = -4$

$a = -2$

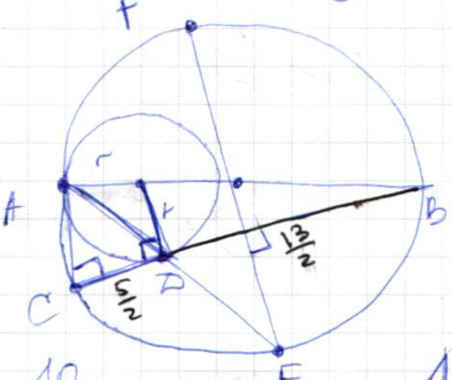
$b = 6$

$\cancel{3^{\alpha} + 4^{\alpha} \geq 5^{\alpha}}$

$y^{\log_4 5} - y^{\log_4 4} - y^{\log_4 3} \leq 0$

y

$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}.$



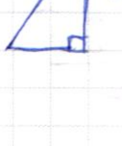
$-2x + 6 = \frac{4x-3}{2x-2}$ $\quad \log_{y} y^{x+1}$

$-4x^2 + \cancel{4x} + 12x - 12 = \cancel{4x} - 3$ $\quad 3^{\log_4 y} \quad 4^{\log_4 y} \geq$

$-4x^2 + 12x - 9 = 0$ $\quad y^{\log_4 5}$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ $\quad 3^{\log_4 y}$

$2x -$



$3^{\log_4 y} + 4^{\log_4 y} \geq 5^{\log_4 y}$

$\log_4 y = \frac{\cancel{\log_3 y}}{\cancel{\log_3 4}}$

$3^{\log_4 y} + y \geq |y|^{\log_4 5}$

$4 = 3 \cdot \frac{4}{3}$

$4 = 3^{\log_3 4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{3^{y}\log_4 y}$

$\log_4(x^2+6x)=y$ $\qquad x^2+6x=4^y$

$x^2+6y=$

$\boxed{x^2+6x>0}$

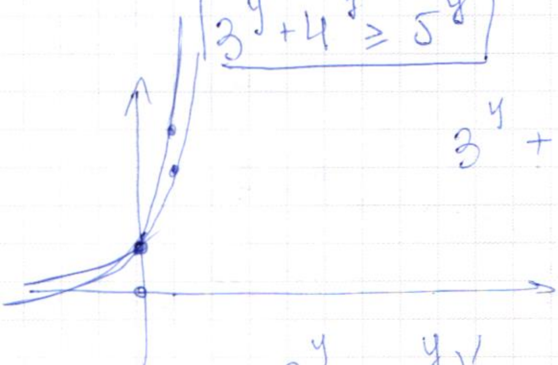
ОДЗ.

$3^y+4^y\geq|4^y|^{\log_4 5}$

$3^y+4^y\geq 5^y$

$y=0 \quad 1+1\geq 1. \quad 2$

$\boxed{3^y+4^y\geq 5^y}$ $\qquad 9+16\geq 25$



3^y+4^y

$a^x=\dfrac{a^x}{\log_a x}$

$(3^y+4^y)'=$

$(3^y)'=\dfrac{3^y}{\cancel{\log_3}\ln 3}$

$\dfrac{3^y}{\ln 3}+\dfrac{4^y}{\ln 4}$ $\qquad \dfrac{5^y}{\ln 5}$

$\dfrac{\ln 4\cdot 3^y+\ln 3\cdot 4^y}{\ln 3\cdot\ln 4}$ $\qquad \dfrac{5^y}{\ln 5}$

При $y<0$ $5^y\leq 3^y \Rightarrow 5^y\leq 3^y+4^y$

т.к. убыв.

$3^y\times 4^y$

$3^{y/2}\times 4^{y/2}$

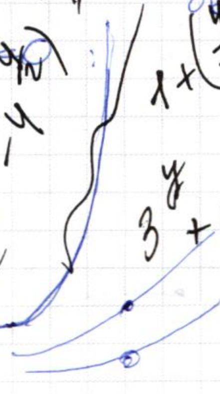
$(3^{y/2}-4^{y/2})^2\geq 0$

$1+\left(\frac{4}{3}\right)^y$

$\left(\frac{5}{3}\right)^y-\left(\frac{4}{3}\right)^y\leq 1.$

$3^y\geq 5^y-4^y$

$\cancel{(5-4)}$



$3^y+4^y\geq 5^y$

$\log(a+b)$

$\left(\frac{3}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y\geq 1.$

$3^y+4^y\geq 5^y$

$5^y-4^y-3^y\leq 0$

x^2+6x-2

$D=36+4\cdot 2=44$

$x=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$

$\cancel{\log_6 y}$

$\cancel{(3^y+4^y)'}$

$(5^y-4^y-3^y)'=\dfrac{5^y}{\ln 5}-\dfrac{4^y}{\ln 4}-\dfrac{3^y}{\ln 3}=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

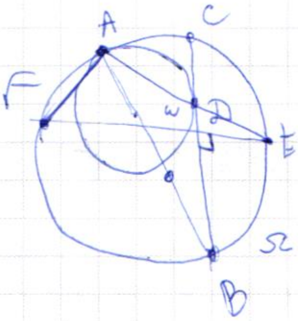
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3^{\log_4 y} + 3^{\log_3 y} \geq 3^{\log_3(y^{\log_4 5})}$

$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(a^n) = n f(a)$

$f(a) + f(a^n) = (n+1) f(a)$

~~$f(0\cdot a) = f(0) + f(a)$~~

~~$f(0\cdot b) = f(0) + f(b)$~~

непол.

$f(a) = f(b)$

$\frac{p}{4}$ $\left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f = \left[\frac{x}{4}\right]$ $\left[\frac{23}{4}\right] = 5$ $\left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$\frac{x}{y}$ $y = 4k + q$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = 2\cdot f(2) = 2\cdot\left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)$?

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

решит.

3 5 7 11 13 17 19 23.

27-2

$\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] \dots \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$

непол.

25 вар.

$f(a) = f(1) + f(a)$

$f(1) = 0$

~~$f(2a) = f(2) + f(a)$~~

$f(2a) = f(a)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{1}{y} f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$f\left(\frac{a}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(a)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{a}{3}\right) - f(a)$

$a = 3$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3)$

$f(1) = f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(x) < f(y)$

2_1 $f(3)$ 0 $f(4)$ 0 $f(5)$ 1 $f(6)$ 0 $f(7)$ $f(8)$ 0

$f(9)$ 0 $f(10)$ $f(11)$ $f(12)$ 0 $f(13)$ $f(14)$

$f(15)$ $f(16)$ 0 $f(17)$ $f(18)$ 0 $f(19)$ $f(20)$ $f(21)$ $f(22)$

$3^{\log_4 y} + 3$

(26) (25) (24) = 0 $f(23)$

(27) = 0 26 → 13 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18 — 0

26 − 13

$f(26) = f(2) + f(13)$ 23

22 → 11

21 → 7.

27 (9)

3 4 5 6 7 8 9

14 13

2 3 5 7 11 13 17 19 23

$5 \cdot 7 > 27$.

20 ← 15 ← 10 ← $f(5) = 1$ $f(11) = 2$

$f(7) = 1$ $f(13) = 3$

$f(25) = 2 \cdot f(5) = 2$.

$f(17) = 4$ $f(23) = 5$.

$f(19) = 4$

0 1 2 3 4

3 · 14 · 9 = 126

49 + 5 = 54

126

180

~~195~~

10 10 3 23

126 + 49 = 175

175 + 12 = 187

187 + 5 = 192

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq$

$\geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2 + 6x = y$

$3^{\log_4 y} + y \geq |y|^{\log_4 5}$

$y \geq 0$: $y < 0$:

$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}$

$y^{\log_4 5} - y$

$y(y^{\log_4 5} - 1)$

$y^{\log_3 y}$

$y = 3$

$3^{\log_4 y}$ $y(y^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$a^{\log_b c}$ $\log_4 y$ $3^{\log_4 3}$ y

$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$

$k^n - k = k^{n-1}$

$a^{\log_b c} = $

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

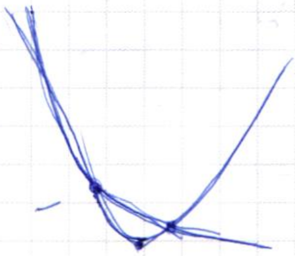
$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2-34x+30$ $x=1$?

$17 \cdot 17$
119
17
289

$16x^3-84x^2+124x-56 \mid x-1$
$16x^3-16x^2$ $16x^2-68x+56$
$-68x^2+124x$
$-68x^2+68x$
$56x-56$

$\cancel{4x^2-1}$
$8x^2-34x+28$
$34^2-4\cdot 28\cdot 8=$
$=4(17^2-224)$ $289-244=$ $=45$

$28 \cdot 8$
244



$x=\frac{34\pm 6\sqrt5}{16}$ $4\cdot 9\cdot 5$

[illegible] треск? $\frac{17\pm 3\sqrt5}{8}>1$ $\frac{17\pm 3\sqrt5}{8}<3$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$ $\pm 3\sqrt5 > 8-17$ $\pm 3\sqrt5 < 24-17=$ $=7$

$\sqrt{45}<\sqrt{49}$

$8x^2-34+30$ $34\cdot 3 = 102$

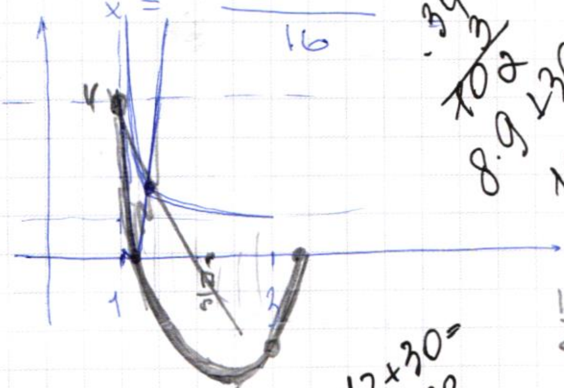
$34^2-4\cdot 8\cdot 30 = 4(17^2-240)=$
$=4(289-240)=4\cdot 49$

$x=\frac{+34\pm 17}{16}$

$34\cdot 3 = 102$ $8\cdot 9\cdot 30 - 102$

$\frac{34-17}{16}=\frac{17}{16}\sim 1$ $16\cdot 3=$ $=48$

$\frac{34+17}{16}=\frac{51}{16}>3.$



$8+30-34$

$\frac{17}{8}$

$32+30-64$ -2

$72+30=$ $=102$

$(1;4)$ $4a+b>1$

$\frac{17\cdot 3}{16}=$

$\frac{4x-3}{2x-2}=\left(2+\frac{1}{2x-2}\right)'=$

3

$-\frac{1}{2(x-1)^2} = \frac{(x-1)^{-1}}{2}' = -\frac{(x-1)^{-2}}{2}$

☑ черновик   ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(x_0-1)^2}x + \frac{1}{2(x_0-1)} - \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} \rightarrow \frac{-1}{2(x_0-1)^2}$$

$$\frac{-x-1}{2(x_0-1)^2}$$

$$\frac{-1-1}{2(x_0-1)^2} = 4 \qquad -\frac{2}{4} = 2(x_0-1)^2$$

$$-\frac{1}{4}(x_0-1)^2$$

$\cancel{4-2\sqrt{10}-2}$ $\qquad \frac{2-\sqrt{10}+2}{6}$ $\qquad \frac{4-\sqrt{10}}{6}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\alpha +$
$+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$tg\,\alpha = \frac{1-\sin\frac{3\alpha}{2}}{\ldots}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$tg^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$3y = \sqrt{-3y+2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \ldots$

$\begin{cases} -2x = \sqrt{-2x+2} \\ 3x^2 - 6x = 4 \end{cases}$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$x \qquad y \qquad \frac{x+y}{2} \qquad \frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$4x^2 = -2x+2$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$3x^2-6x-4=0$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2 x - 1$

$4x^2+2x-2=0$

$2x^2+x-1=0$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

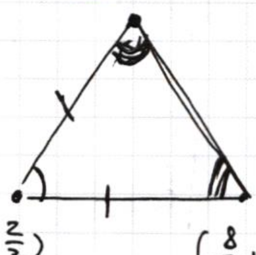
$tg = \frac{4}{3}$

$3x^2-6x-4$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{\alpha}$.

$3+6-4$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$



$(1; \frac{2}{3}) \qquad (\frac{8}{3}; \frac{2}{3})$

1) $\frac{3}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{3\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha \pm (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 =$

$= -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad | : \cos^2\alpha$

$4tg\,\alpha \pm (1 - tg^2\alpha) = -tg^2\alpha - 1$

1 $\quad$ 1-1

$4x \pm (1-x^2) = -x^2+1$

$1-x^2>0$:

$x^2<1$:

$4x + 1 - \cancel{x^2} = -\cancel{x^2} - 1$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

$\frac{4-8}{5} \Big/ 6$

$1-x^2<0$:

$\frac{32-10}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

$4x - 1 + x^2 = -x^2 - 1$

$2x^2+4x=0$

$x^2+2x=0$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

$tg\,\alpha = -2$

4. ?

не уд → $x=0$

$x=-2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha$

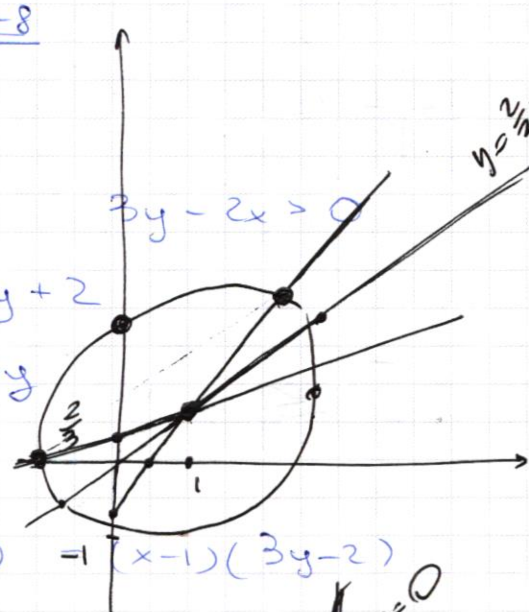
$\cancel{\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}-8}{}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$ $\quad 3y - 2x > 0$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy = 2 - 2x - 3y$



$3xy - 3y - 2x + 2$

$3y(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(3y-2)$

$3y = \sqrt{-3y+2}$

$3y^2 - 4y = 4$

$3y^2 - 4y - 2 = 0$

$9y^2 + 3y - 2 = 0$

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$

$3y^2 - 4y - 4$

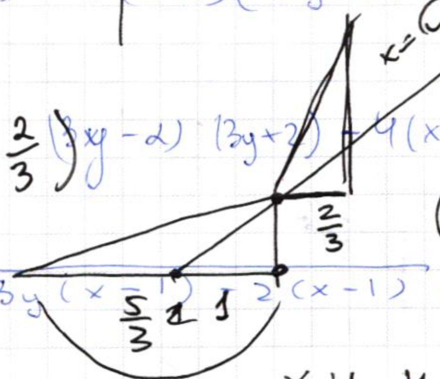
$16 + 48 = 64$

$\frac{4 \pm 8}{6} = 2; -\frac{2}{3}$

$9y^2 - y^2 + 4x^2 - 12xy$

$9y^2 - 4 + 4x^2 - 4 - 12xy + 8$

$\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ $\quad (3y-2)(3y+2) + 4(x-1)(x+1)$



$\boxed{3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}} = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$

$x + 1 = 4x - 2$

$3 = 3x$

$x = 1$

$\cancel{9y^2} - 18y^2 + 8x^2 - 30xy = 4 - 4x - 6y$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$5x^2 + 15y^2 - 30xy - 6x - 4y = 8 - 4x - 6y$

$5x^2 + 15y^2 - 30xy = 8 + 2x - 2y$

$5(x-y)^2$

$x^2 + 3y^2 - 6xy$

$9y^2 + 3y - 2$

$D = 9 + 72 = 81$

$y_1 = \frac{-3 \pm 9}{18} = -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}$

$2(2x^2 + x - 1)$

$2(x+1)(2x-1)$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$ $\quad -2$

$9y^2 - y(15x - 3) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = (15x-3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (4x^2 + 2x - 2) = 9\left((5x-1)^2 - 8(x+1)(2x-1)\right)$

$9(25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8) = 9(9x^2 - 18x + 9) = 9(3x-3)^2$

$y = \frac{15x - 3 + 3(3x-3)}{9}$ $\quad \frac{15x - 3 - 3(3x-3)}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y = \frac{15x-3+9x-9}{9} = \frac{24x-12}{9} = \frac{8x-4}{3}$

$\frac{15x-3-9x+9}{9} = \frac{6x+6}{9} = \frac{2x+2}{3}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$(3x^2 - 6x + 3) + (3y^2 - 4y + \frac{4}{3}) = 4 + 3 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$

$\sqrt{3} \cdot x = 6$ $\quad x = \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3} \cdot 2 \cdot x = 4$ $\quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{4}{3}$

$12 \cdot 3 + 4 = 36 + 4 = 40$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) = \frac{40}{9}$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{40}{9}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$4x - 3 = 16x^3 - 68x^2 + 60x$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 56$

$\sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{9}$

$3y - 2x > 0$

$y > \frac{2}{3}x$

(1) $y = \frac{8x-4}{3}$

(2) $y = \frac{2x+2}{3}$

$\frac{16-4}{3} = 4$

$8x - 4 = 2x + 2$

$6x = 6$

$x = 1$

$(x-1)^2 + (\frac{8x-6}{3})^2 = \frac{40}{9}$

$9x^2 - 18x + 9 + 64x^2 + 36 - 96x = 40$

$73x^2 - 114x + 5$

$3y - 2x = 2x + 2$

$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b$

$\frac{4x-4+1}{2x-2}$

$2 + \frac{1}{2x-2}$ $\quad x_0 = \frac{3}{16}$

$8x^2 - 34x + 30$

$D = 9 - 120 \cdot 8$

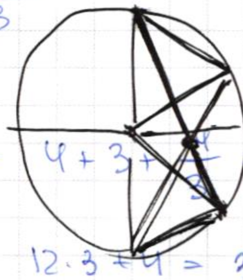
$\frac{x+1}{3}$ $\quad 72 - 27 + 30$

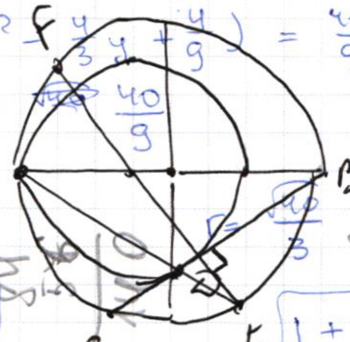
$\frac{4x-2}{3}$ $\quad 8 - 3 + 30$ $\quad 38 - 3 \quad 35$

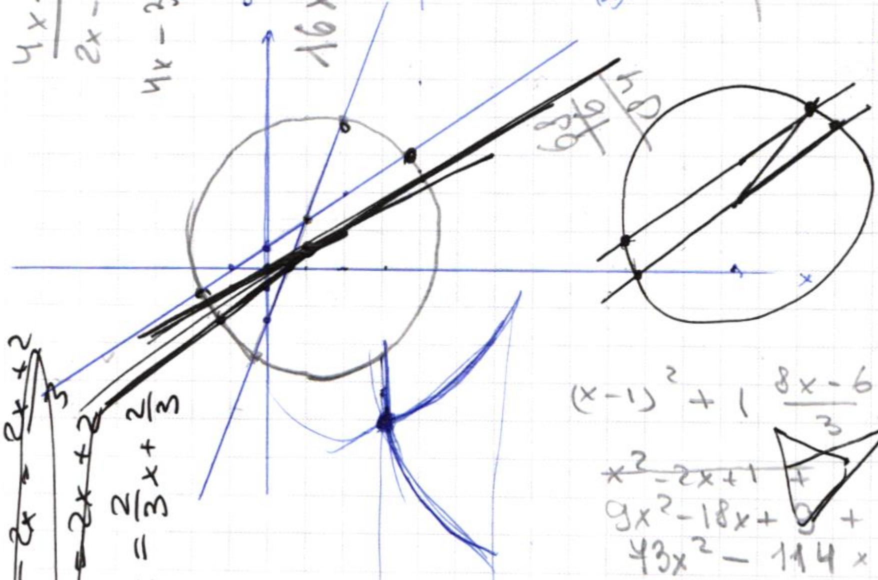
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

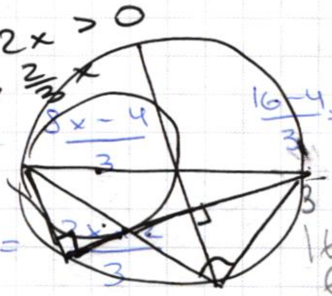
$f'(x_0) \cdot x - x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

$ax + b$









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)