МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(\underset{x}{\alpha+\beta})+\sin(\underset{y}{\alpha-\beta})=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$x=2\alpha+4\beta$
$y=2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-8/17$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-4/17$ $\Rightarrow$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin2\beta=\frac{\pm1}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\beta-1=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad 1-\frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}}$

$\cos^2\beta=\frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}$

$\cos\beta=\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}}$ $\quad\sin\beta=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

1) $\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{\cos2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1}=-\cancel{1}$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$\cos\alpha=0$, но тогда $tg\alpha$ $\varnothing$ не подходит

$4\sin\alpha=-\cos\alpha$

$\sin\alpha=-\frac{\cos\alpha}{4}$

$tg\alpha=\frac{-\cos\alpha}{4\cos\alpha}=\underline{-1/4}$

2) $\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin2\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin2\alpha}{\sqrt{17}}-\frac{\cos2\alpha}{\sqrt{17}}=\frac{-1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ $\quad 2\cos^2\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha-2=0$

$\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha-1=0$

~~$D=16+4=20=(2\sqrt5)^2$~~

$-4\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=0$

$\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\sin\alpha=0$

$tg\alpha=0$

$\cos\alpha_{1,2}=\cancel{4\sqrt{16}\sin^2\alpha+4}$

$\cos\alpha_{1,2}=\frac{\cancel{4\sin\alpha\pm2}\sqrt{4\sin^2\alpha+1}}{2}$

$\sin\alpha=-4\cos\alpha$

$tg\alpha=-4$

Ответ: $tg\alpha=\{-1/4;-4;0\}$

2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

при условии $3y-2x\geq 0$ и $3xy-2x-3y+2\geq 0$:
возведём в квадрат:

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-y(15x-3)+4x^2+2x-2=0$

$D=225x^2-90x+9-144x^2-72x+72=$
$=81x^2-162x+81=81(x-1)^2=(9(x-1))^2$

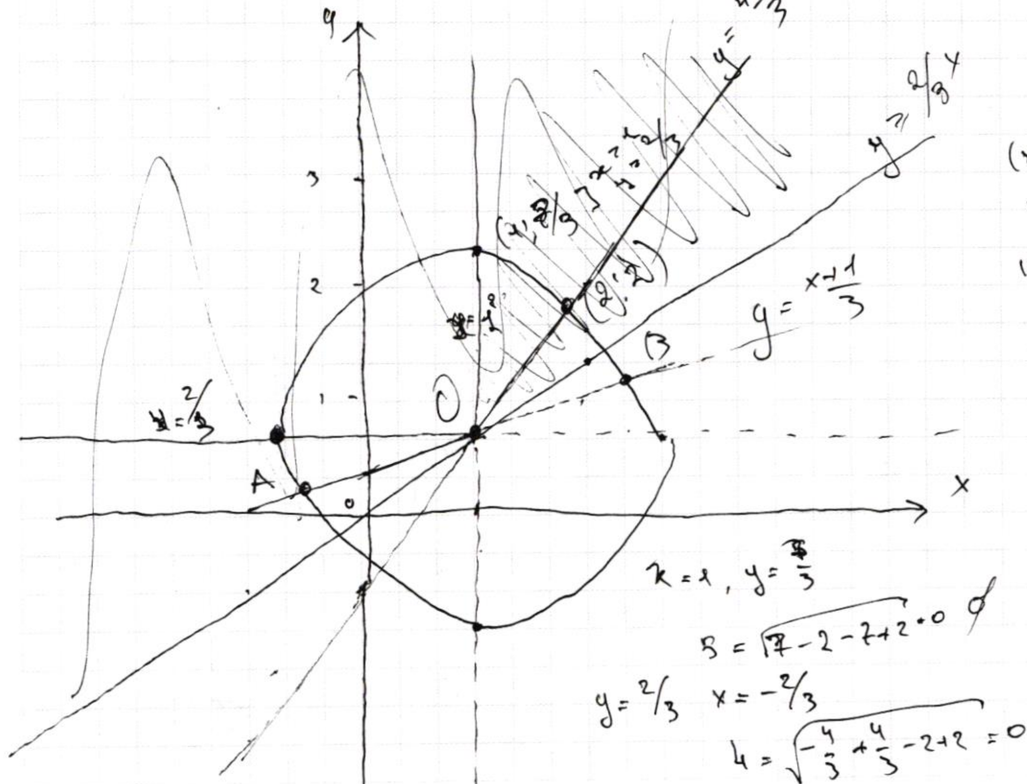
$y=\frac{15x-3-9x+9}{18}=\frac{x+1}{3}$ $\quad y=\frac{15x-3+9x-9}{18}=$
$=\frac{4x-2}{3}$

$\begin{cases} \begin{cases} y\geq \frac{2}{3}x \\ 3xy-2x-3y+2\geq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3} \end{array} \right. \\ 3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=\frac{25}{3} \end{cases}$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$
при $x=1$ верно при любом y, при $y=2/3$ верно при любом x

если $\begin{cases} x\neq 1: & y \geq \frac{2(x-1)}{3(x-1)}=\frac{2}{3} \\ y\neq \frac{2}{3}: & x\geq \frac{3y-2}{3y-2}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} y\geq 2/3\, x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=2/3 \\ \begin{cases} x>1 \\ y>2/3 \end{cases} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3} \end{array} \right. \\ (x-1)^2+(y-2/3)^2=\frac{25}{9} \end{cases}$



$(x-1)^2+(y-2/3)^2=\frac{25}{9}$

$y=\frac{4x-2}{3}$

$\frac{16x^2-16x+4}{9}$ ... $x^2-2x+1+\frac{16x^2-32x+16}{9}=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+1+\frac{25x^2-50x+25}{9}=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+1=1$

$x=0$ $\quad x=2$
$y=-2/3$ $\quad y=2$

$2=\sqrt{12-10+2}=2$

$-2=\sqrt{0}$ ... $\varnothing$

$x=1,\ y=\frac{5}{3}$

$5=\sqrt{7-2-7+2}=0$ $\varnothing$

$y=2/3$ $\quad x=-2/3$

$4=\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-2+2}=0$ $\varnothing$

пересечения $y=\frac{x+1}{3}$ и $\omega(O)$ не подходят, т.к. точки пересечения A ниже $y=2/3$, B ниже $y\geq\frac{2}{3}x$

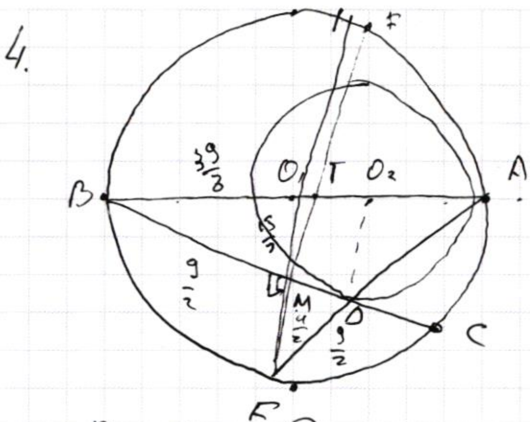
Ответ: (2;2)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



R - радиус Ω

r - радиус ω

проведем O_2D

$O_2D \perp BC$, $EF \perp BC$ $\Rightarrow O_2D \parallel FE$

$O_2D \parallel FE$, $\angle ADO_2$ и $\angle FEA$ - СУ, $\angle ETA$ и $\angle DO_2A$ - СУ $\Rightarrow \angle ETA = \angle DO_2A$, $\angle O_2DA = \angle TEA$ $\Rightarrow$

$O_2D = O_2A$ (рад ω) $\Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA$

$\Rightarrow \angle TEA = \angle TAE \Rightarrow \angle BTE$ (внеш) $= 2\alpha$ и опир. на BE; впис $\angle TAE = \alpha$ и опир на BE $\Rightarrow$

$\Rightarrow T$ - центр $\Omega \Rightarrow T$ совпадает с $O_1 \Rightarrow EF$ проходит через O_1 и является диаметром

EF - диам, $EF \perp BC$ (хорда) $\Rightarrow FE \cap BC = M$, $BM = MC$ (по св-ву диам $\perp$ хорде)

$\Rightarrow \triangle BMO_1$ и $\triangle BO_2D$

$\angle B$ - общ, $\angle BO_1M$ и $\angle BO_2D$ - НЛУ, $O_1M \parallel O_2D$ $\Rightarrow \angle BO_1M = \angle BO_2D$ $\Rightarrow \triangle BMO_1 \sim \triangle BDO_2$ по 2 $\angle$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_1}{BM} = \frac{BO_2}{BD}$

$\frac{R}{9/2} = \frac{2R-r}{13/2}$

$13R = 18R - 9r$

$5R = 9r$

$R = 1{,}8r$

$\sqrt{1-\frac{36^2}{39^2}} = \sqrt{\frac{3\cdot 75}{39}}$

$\Rightarrow \triangle BO_2D$ - прям ($O_2D \perp BC$)

$BD^2 + DO^2 = BO_2^2$

$\frac{169}{4} + r^2 = 6{,}76r^2$

$\frac{169}{4} = (2{,}4r)^2$

$r = \frac{13}{4{,}8} = \frac{65}{24}$

$R = \frac{39}{8}$

$\Rightarrow \triangle BO_1M$: $\angle BO_1M = 2\angle AEF$

$\sin\angle BO_1M = \frac{36}{39}$ $\left(\frac{BM}{BO_1}\right) \Rightarrow \cos\angle BO_1M = \frac{15}{39}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{15}{39}$

$\cos^2\alpha = \frac{27}{39}$

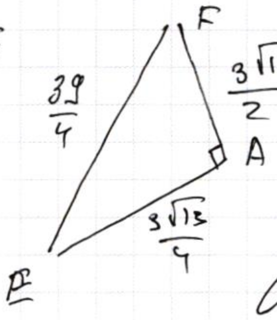
$\cos\alpha = \sqrt{\frac{27}{39}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ в $\triangle$ не м.б. 2 тупых углов

$\cos\angle EO_1A = -\cos\angle BO_1M$ (смеж)

$\Rightarrow \triangle O_1EA$: $EA = \sqrt{\frac{39^2}{64} + \frac{39^2}{64} + \frac{30}{39}\cdot\frac{39^2}{64}} = \sqrt{\frac{39(39+39+30)}{64}} = \frac{2\cdot 9}{8}\sqrt{13} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$\Rightarrow \triangle O_1FA$: $FA = \sqrt{\frac{39^2}{64} + \frac{39^2}{64} - \frac{30\cdot 39^2}{64\cdot 39}} = \sqrt{\frac{39(78-30)}{64}} = \frac{3\cdot 4\sqrt{13}}{8} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$\triangle AFE$



$\angle FAE = 90^\circ$ (опир. на диам. FE)

$S_{\triangle EFA} = \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9 \cdot 13}{16} = \frac{117}{16}$

$\angle AFE = \arccos \frac{\cancel{3}\sqrt{13} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{39}} = \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{8}$

$\angle AFE = \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$S_{\triangle AFE} = \frac{117}{16}$.

$x^2+6x>0 \Rightarrow x^2-6,\ x>0.$

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ ← модуль можем снять, т.к. у нас есть условие, что $x^2+6x>0$.

~~$\log_4 3 \log_4$~~ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)-(x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4 x^2+6x} \geq 0$

при $\log_4(x^2+6x)=2$ обратится в 0

при $\log_4(x^2+6x)<2$ верное неравенство $(3+4-5\geq 0)$

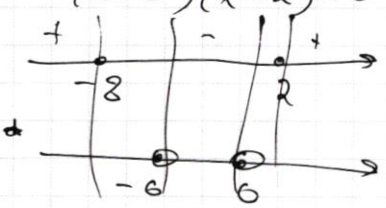
при $\log_4(x^2+6x)>2$ – неверное неравенство $(27+64-125 \not\geq 0)$

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$(x+2)(x-2)\leq 0$

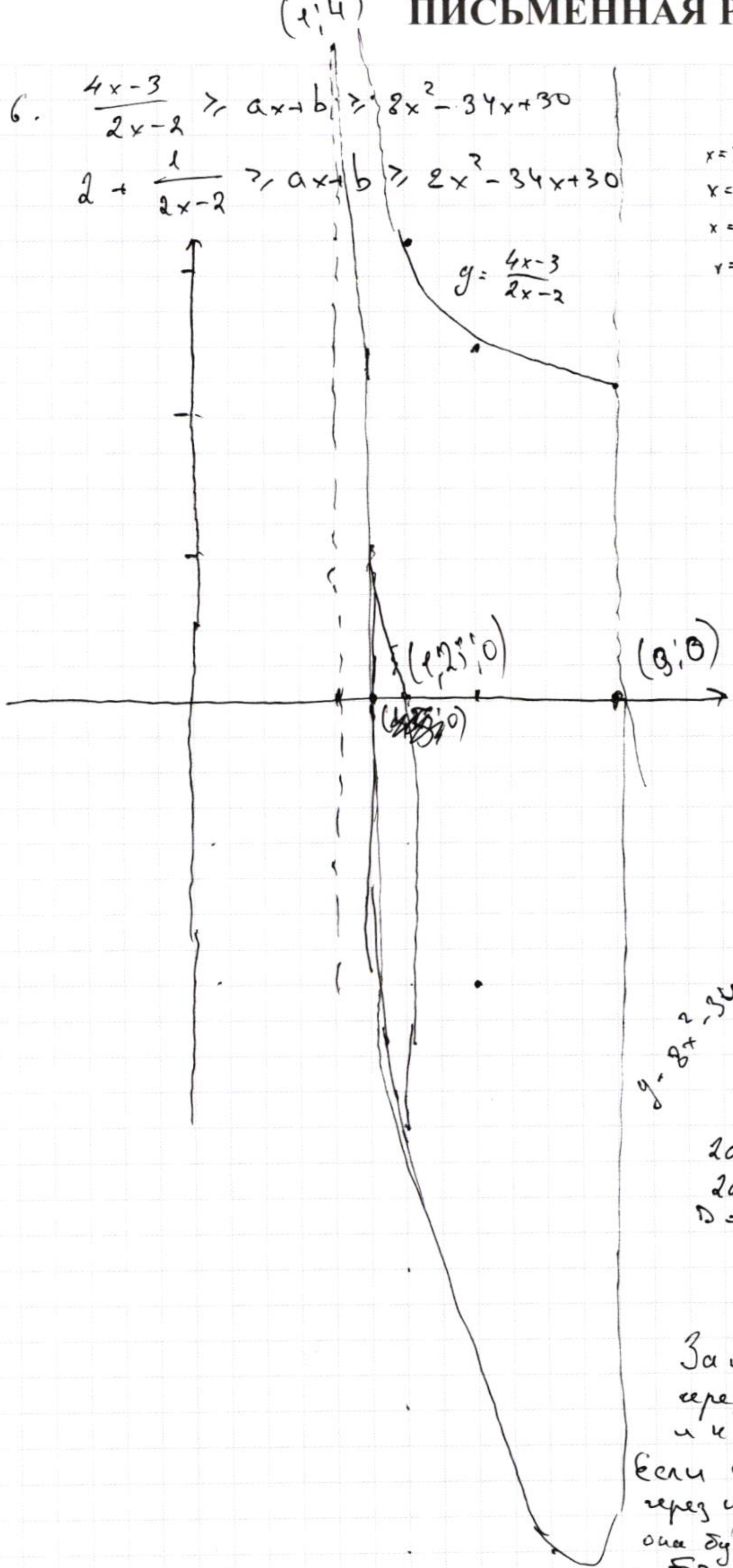


Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 2x^2-34x+30$



$x=3$: $72-102+30$

$x=2$: $32+30-68=-6$

$x=1$: 4

$x=1,5$: $18-51+30=-3$

$\frac{34}{16}=\frac{12}{8}=2,25$

$\frac{81}{2}-\frac{136}{2}+60$

$\frac{34}{16}=\frac{12}{8}$

$18-51+30$

$\frac{10}{8}=1,25$

$72-102+3$

$8\cdot\frac{25}{16}-34\cdot\frac{5}{4}+30=$

~~$8x^2-34x+30$~~

$\frac{25}{2}-\frac{85}{2}=30$

Найдём точку касания для $ax+b$ прох через (·) (1;4)

$a+b=4$

$\boxed{b=4-a}$

$ax-a+4=2+\frac{1}{2x-2}$

$ax-a+2=\frac{1}{2x-2}$

$2ax^2-2ax+4x-2ax+2a-4=1$

$2ax^2+x(4-4a)+2a-3=0$

$D=4(4-8a+4a^2-4a^2+6a)=0$

$4-2a=0$

$a=2$

$b=2$

$y=2x+2$

$a+b=4 \Rightarrow b=4-a$

$ax+4-a=2+\frac{1}{2x-2}$

$2ax^2-2ax+8x-8+2ax+2a=4x-4+1$

$2ax^2+x(4-4a)-5+2a=0$

$D=16-32a+16a^2+40a-16a^2$

$8a+16=0$

$a=-2$

$b=6$

$y=-2x+6$

$y(3)=0$

Заметим, что $y=-2x+6$ проходит через 2 (·) ~~макс~~ локального мах. параболы и касается гиперболы.

Если мы выберем точку выше (1;4) через которую будет прох. прямая, то она будет под меньшим ∠ к Ox ⇒ в (·) с абсциссой x=3 будет иметь <0 значение, а выбрать (·) ниже (1;4) мы не можем, т.к. она будет ниже параболы

Ответ: $a=-2$
$b=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = f(1/2) + f(2) = 0 \Rightarrow f(1/2) = -f(2)$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ $=$

$f(1) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$

~~Таким образом нам нужно найти все дроби,~~

$f(a/b) =$

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(a/b) = f(a) - f(b)}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3	0		
4	0	16	0
5	1		
6	0	17	4
7	1		
8	0	18	0
9	0		
10	1	19	4
11	2		
12	0	20	1
13	3		
14	1	21	1
15	1		
		22	2
		23	5
		24	0
		25	2
		26	3
		27	0

"0" – 10

"1" – 7

"2" – 2

"3" – 2

"4" – 2

"5" – 1

$y = 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 21,$

$130 \quad 49 \quad 10 \quad 6 \quad 2$

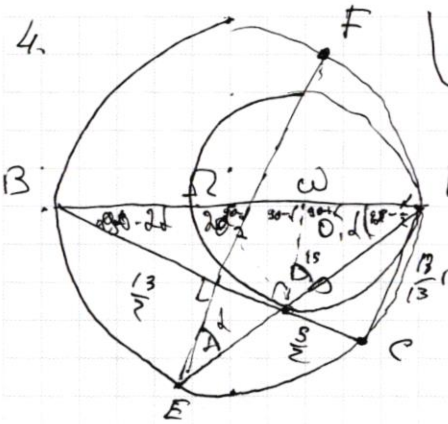
$10 \cdot 13 + 7 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 =$

$= 199 + 18 = 217$

Ответ: 217

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



АВ пройдет через центры Ω и ω;
проведем кас. р к Ω в т. А
$O_2A \perp p$
т.к. Ω и ω кас., то у р не будет общих точек с ω где-либо кроме т. А $\Rightarrow$
$O_1A \perp p$
т.к. O_1, O_2 по одну сторону от р, то А, O_2, O_1 лежат на одной прямой, а т.к. АВ проходит через O_2, то он пройдет и через O_1.

↑ЧИСТОВИК↑

R - радиус Ω
r - радиус ω

$$4R^2-4Rr = (2R-2r)\cdot 2R = BD^2 = \frac{169}{4}$$

$$\frac{r}{AC} = \frac{13/2}{18/2} \Rightarrow AC = \frac{18}{13}r \quad BD^2 + r^2 = (2R-r)^2 = 4R^2-4Rr+r^2$$

336

$$4R^2-4Rr-\frac{169}{4}=0 \qquad r = \frac{169-16R^2}{4R}$$

$$\cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{2R-r}$$

$$\frac{25}{4}+\frac{324}{169}r^2 = r^2+r^2+\frac{2r}{2R-r}\cdot r^2$$

$$\frac{25}{4} = \frac{12}{169}r^2+\frac{2r^3}{2R-r}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{12\cdot}{169-16R^2}$$

$$\frac{324}{4}+\frac{324}{169}r^2-4Rr = \frac{169}{4}$$

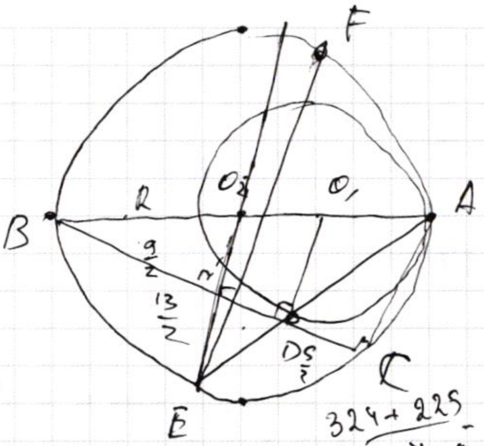
$$f(a\cdot b) = f(a)+f(b)$$

$$81+\frac{324}{169}r^2 = 4R^2$$

$$2R = \sqrt{81+\frac{324}{169}r^2}$$

$$\left(\sqrt{81+\frac{324}{169}r^2}+2r\right)\sqrt{81+\frac{324}{169}r^2} = \frac{169}{4}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



$81 + \frac{324}{169} r^2 = 4R^2$

$81 + \frac{324}{169} \cdot \frac{169 \cdot 25}{144}$

$\frac{81}{169} r^2 + \frac{81}{4} = R^2$

$81\left(1 + \frac{4}{169} r^2\right) = 4R^2$

$\frac{R}{\frac{9}{2}} = \frac{2R - r}{\frac{13}{2}}$ $= \frac{324+225}{4} = \frac{549}{4}$

$4R^2 = \frac{39^2}{4}$

$\frac{169}{4} + r^2 = \frac{9}{2}\left(9\sqrt{1+\frac{4}{169}r^2} - r\right)^2$

$\frac{13}{2} r = 9R - r$

$\frac{169}{4} + \cancel{r^2} = 81 + \frac{324}{169} r^2 + \cancel{r^2} - 18r\sqrt{1 + \frac{4}{169} r^2}$

$\frac{169 \cdot 9}{64} - \frac{81}{4}$

$18r\sqrt{1+\frac{4}{169} r^2} = \frac{324}{169} r^2 + \frac{155}{4}$

$\frac{9(169-144)}{64} = \frac{9 \cdot 25}{64} = \frac{15}{8}$

$324 r^2 + \frac{324 \cdot 4 r^4}{169} = \frac{324 \cdot 324}{169} r^2$

$\frac{169}{4} + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$ $\quad 4R^2 = 81 + \frac{324}{169} r^2$

169×169: 1521, 1014, 169, 28561, -310, 28251

$\frac{324}{169} r^2 + \frac{155}{169} - 2 \cdot \frac{9}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{169} r^2} \cdot r = 0$

$\frac{18^4}{13^4} \cdot r^4 + \frac{155^2}{13^2} + 2 \cdot \frac{324 \cdot 155}{13^4} \cdot r^2 = 18^2 r^2 \left(1 + \frac{4}{13^2} r^2\right)$

$r^4 \frac{169 \cdot 324 \cdot 4 - 324 \cdot 324}{169 \cdot 169} + \frac{324 \cdot 169 \cdot 169 - 324 \cdot 310}{169 \cdot 169} r^2 + \frac{155^2}{169} = 0$

$225 + 1296 = 1521$

$t^2 \cdot 324 \cdot 352 + 324 \cdot 28251\, t - 155^2 \cdot 169$

$28251 : 9 = 3139$

$\sqrt{3 \cdot 75}$, $3 \cdot 5$, $\frac{}{39}$, 13

$D = 324 \cdot 2\left(324 \cdot 28251 - 352 \cdot 168 \cdot 155^2\right)$

$\frac{\cancel{63}}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}} = \frac{39}{4}$

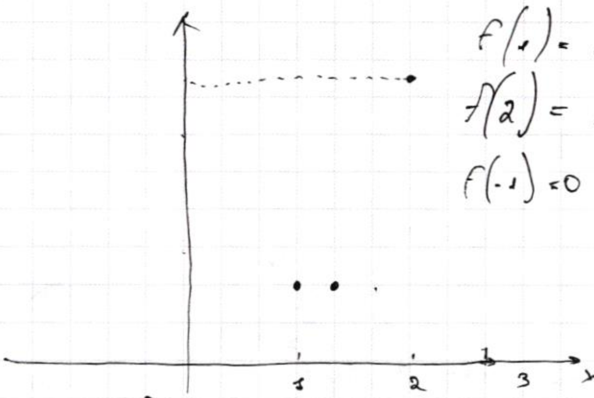
$81 + \frac{324}{169} \cdot \frac{25 \cdot 169}{576}$

$\cos\alpha = \frac{36}{39}$ $\quad 9 \cdot 25 + 9 \cdot 144 = \frac{169 \cdot 9}{16}$ $\quad \left(\frac{39}{8}\right)^2 \cdot 4 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 = \frac{169 \cdot 9}{16}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3 \cdot 75}}{39} = \frac{15}{39}$

$\frac{15}{39}$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 2x^2 - 34x + 30$



$f(1) = f(1) + f(1) = f'(1) = 0$

$f(2) = f(2) + f(1)$

$f(-1) = 0 \qquad f(x) = +f(-x)$

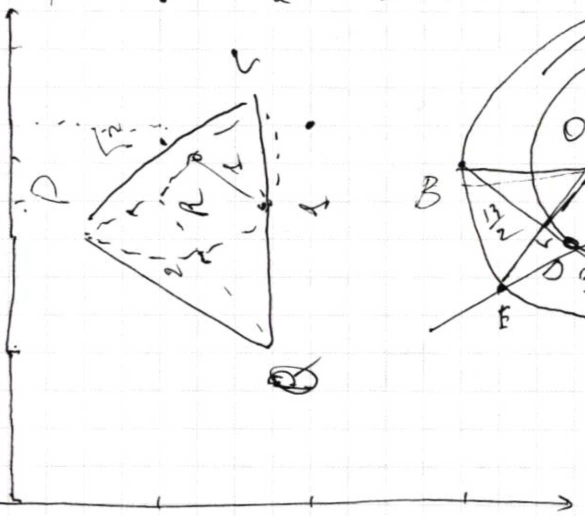
$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

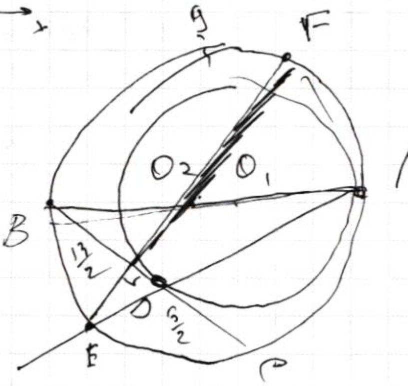
$9y^2 - 15xy + 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 9 - 90x + 225x^2 - 144x^2 - 72x + 72$

$81x^2 - 162x + 81 = (9(x-1))^2$

$y_{1,2} = \frac{15x - 3 \pm 9(x-1)}{12}$





$2 + \frac{1}{2x+2} = ax+b$

$\frac{-2x}{4x^2+8x+4} = a$

$2{,}25: \quad \frac{5-3}{0{,}5} = 4$

$1{,}5: \quad \frac{3}{1}$

$8 - 34 + 30$

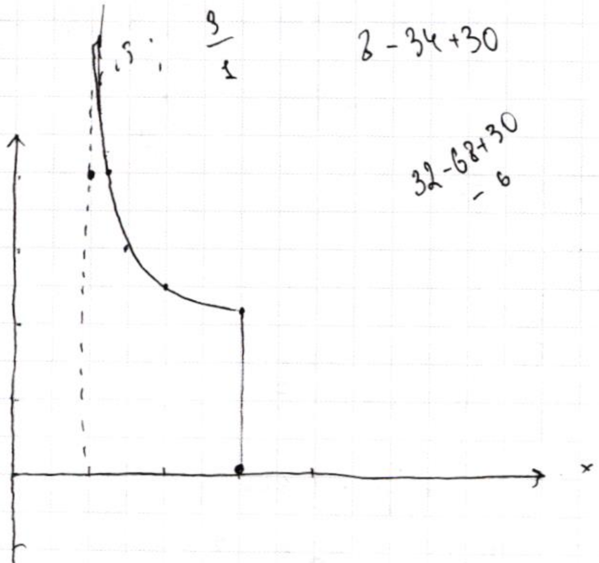
~~$64 - 68 + 30$~~

$32 - 68 + 30$

$28 \quad -6$

$32 - 68 + 30$

-6



$0 = 3a + b$

$4 = a + b$

$b = -3a$

$4 = -2a$

$a = -2$

$b = 6$

$0 \geq 3a + b$

$4 \geq a + b$

$f(2) = +0$

$f(3) = 0$

$\frac{17}{8} \qquad f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$72 - 102 + 30$

$3 = 4^{\log_4 3}$

$\log_4 3 + \log_4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3}$

$3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y - 2/3\right)^2 = \frac{25}{9}$

$3y - 2x \geq 0$

$y \geq \frac{2}{3}x$

$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

$y(3x-3) \geq 2x - 2$

$y \geq \frac{(x-1)2}{(x-1)\cdot 3}$

$\cancel{9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2}$

$\cancel{9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x}$

$x \geq \frac{3y-2}{3y-2}$

при $x = 1$ $\sqrt{3xy - 2x + 3y + 2} = 0$ при любом y.

$3a + b = 0$

$b = -3a$

$y \geq \frac{2x-2}{3x-3}$

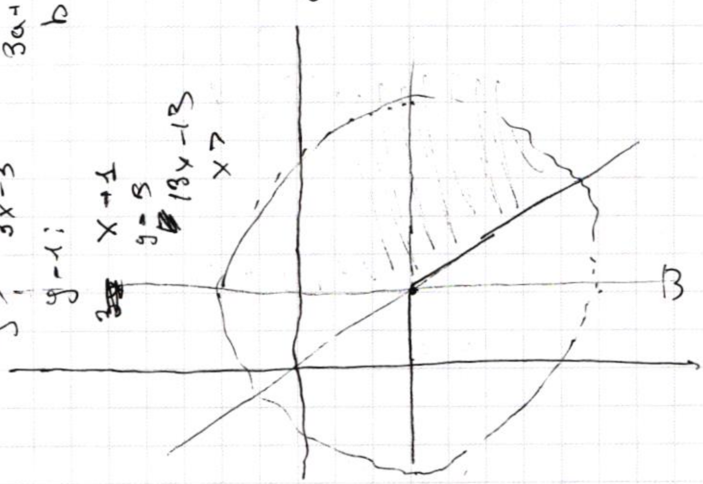
$y = 1;$

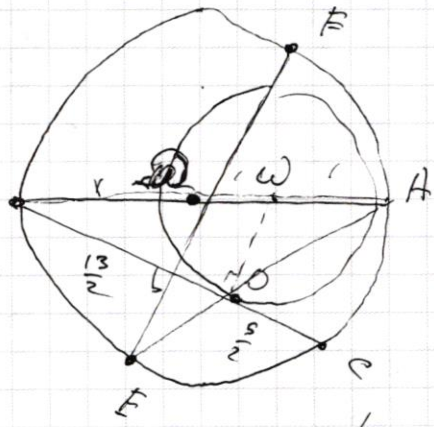
$x = 1$

$y = 3$

$13y - 13$

$x > $





$\frac{169}{4} + r^2 = r^2 + 2xr + x^2$

$\frac{169}{4} = x^2 + 2xr$

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = \frac{\pm 1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cancel{1} = -1$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -1/4$

$\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha \frac{-1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

$\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$

$-4\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\quad 4\cos\alpha = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ $\quad \mathrm{tg}\,\alpha = -4$

$ax - 3a = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$2ax^2 - 6ax - 2ax + 6a + 4x - 4 + 1$

$2ax^2 - 8ax + 4x + 3 + 6a = 0$

$64a^2 + 64a + 16 - 24a - 48a^2$

$16a^2 + 40a + 16 = 0$

$2a^2 + 5a + 2 = 0$

$25 - 16 = 3$

$16a^2 - 32a + 16 - 16a^2 + 24a$

$-8a + 16 = 0$

$a = 2$

$b = 2$

$2x + 2$

$x^2 + 6x \geq \sqrt{x^2+6x}\left(\log_4 5 \cdot \log_4 3 + \ldots\right)$

$(x^2 + 6x)\log_4 3 + 6x \ldots$

$+3 + \log_4 t - 5\log_4 t \geq 0$

$4\log_4 3 \log_4$

$0 = \log_4 5 \ldots$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №12

(Нумеровать только чистовики)