МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}; \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}; \end{cases}$$ Р второе равенство: По формуле суммы синусов:

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; Подставляя $\sin(2\alpha+2\beta)$ из 1 ур-я получим:

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; Тогда по основному триг. тожд. $|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$; Р два случая:

1) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; Тогда из I-ого уравнения: $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$. ; Раскрывая двойные углы получим:

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \Rightarrow 2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha\end{array}\right. \Rightarrow$

Первый случай невозможен т.к. $tg\,\alpha\ \exists \Rightarrow 2tg\,\alpha=-1 \Rightarrow tg\,\alpha=-\frac{1}{2}$.

2) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$; Тогда из I-ого ур-я: $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1 \Rightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \\ \sin\alpha=-2\cos\alpha\end{array}\right. \Rightarrow$

$tg\,\alpha=0$ и $tg\,\alpha=-2$; ~~Это~~

Это все значения тангенса α которые могут быть при данных ур-ях и все они возможны по условию.

Ответ: $tg\,\alpha=-2$; $tg\,\alpha=-\frac{1}{2}$; $tg\,\alpha=0$.

N 2

Сделаем замену $x-2=a$; $y-1=b$ Тогда система будет такой:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+3b^2=25; \end{cases}$$ (Во второй системе выделили полные квадраты). Тогда, Если пара чисел $\{a';b'\}$ является решением, то $\sqrt{a'b'} = a'-2b' \Rightarrow (a'-2b')^2 = a'b' \Rightarrow a'^2 = 5a'b'-4b'^2$; Т.к. второе ур. для них верно $\Rightarrow$ подставляя полученное выражение:

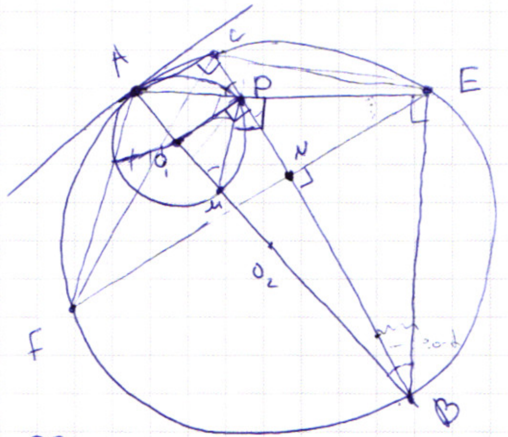
$5b'^2 + 5a'b' = 25 \Rightarrow a' = \frac{b'^2 - 5}{b'}$; Подставив во второе ур-ие и приведя к общему знаменателю получим: $\cancel{10b'^4}$ $\frac{b'^4 - 10b'^2 - 25}{b'^2} + \frac{9b'^4}{b'^2} - \frac{25b'^2}{b'^2} = 0 \Rightarrow$

$\frac{10b'^4 - 35b'^2 - 25}{b'^2} = 0 \Rightarrow b' = \pm 1; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; Значит решением ур-я могут служить только эти числа из второго ур-я при $b = \pm 1$; $a = \pm 4$;
при $b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; $a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ При этом для выполнения первого ур-я подходит, только $b = 1$; $a = 4$. и $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$; $b = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

Тогда $x = 6$; $y = 2$ и $x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$ $y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$;

Ответ: $(6; 2)$ и $\left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

№ 3)



Решение:

1) $\angle ACB = 90°$ т.к. опирается на диаметр

2) $\angle O_1DB = 90°$ как угол между касательной и радиусом. 3) Из подобия $\triangle O_1DB \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$\begin{cases} \frac{\cancel{25}}{\cancel{87}} = \frac{2R}{2R - r} \\ 17^2 = 2R \cdot (2R - \cancel{2}r) \end{cases}$ (где R - радиус Ω; r - ω), по теореме о касательной и секущей $BD^2 = BA \cdot BM \Rightarrow$ Из этой системы можно найти $r = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$ и $R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$

Из $\triangle O_1DB \Rightarrow \cos\angle O_1BD = \left(\frac{17}{2R - \cancel{2}r}\right)^{-1} = \left(\frac{17}{10{,}2}\right)^{-1} = \cancel{\frac{102}{14}}\left(\frac{289}{275}\right)$ $\frac{275}{289}$ ~~По т. кос. из $\triangle DMB \Rightarrow$~~

~~$DM = \sqrt{10{,}2^2 + 17^2 - 2 \cdot 10{,}2 \cdot 17 \cdot \frac{275}{289}}$~~ Обозначим $\angle MBE = \alpha$; Тогда $\angle AMD = \alpha$ т.к. $DM \parallel BE$ (т.к. BE переходит в DM при гомотетии с цв. т. A.) и $\angle CDA = \alpha$ т.к. ($\angle ADM = 90°$ (как опир. на диам) и $\angle CDO_1 = 90°$; ADO_1 - общий угол этих углов $\Rightarrow CDA = O_1DM = \angle O_1MD$ (т.к. $O_1M = O_1D = r$) $\Rightarrow \angle DBE = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\angle MBD = \overset{2\alpha - 90}{\cancel{90 - 2\alpha}} \Rightarrow \cos(2\alpha - 90) = \frac{275}{289}$ ($\angle AFE = \alpha$ т.к. опирается на AE); $\cos 2\alpha = \frac{275}{289} \Rightarrow \angle AFE = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{275}{289}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{282}{289}}\right)$. $S_\triangle AFE = S_\triangle FCE$ (т.к. $AFEC$ - равнобокая трапеция)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Пусть $a=b=1 \Rightarrow f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$; Посчитаем $f(p)$ для $p\le 24$, $p\in N$:

$f(x)$:	0	0	1	1	2	3	4	4	5
x:	2	3	5	7	11	13	17	19	23

; Теперь раскладывая числа на множители можно посчитать все $x\in N$ до 24; все кратные двум и трём равны 0; ~~иные~~ других нет; Далее пусть $a=\frac{1}{a}$; $b=a \Rightarrow f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a})$; тогда $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow$ для выполнения условия нужно $f(y)>f(x)$.

В нашей выборке $1\le x\le 24$ и $x\in N$: $f(x)=0 \Leftrightarrow$ 17 штук; а все остальные в табличке выше;

1) Если x такое что $f(x)=0$, то y - одно из 7 чисел $\{5;7;11;13;17;19;23\} \Rightarrow 7\cdot 17$ вариантов;

2) Если $f(x)=1$, то $2\cdot 5$ вар.

3) Если $f(x)=2$, то 4 вар 4) Если $f(x)=3$: 3 вар; 5) Если $f(x)=4$; 2 вар итого:

$17\cdot 7+10+4+3+2=138$ вариантов.

Ответ: 138

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\ge|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \quad \text{Пусть } x^2-18x=t>0.$$

$5^{\log_{12}t}+t\ge t^{\log_{12}13}$; Пусть $t=12^k \Rightarrow 5^k+12^k\ge 13^k$; При $k=2$ равенство $\Rightarrow k\ge 2 \Rightarrow t\ge 144 \Rightarrow x^2-18x-144\ge 0$; $D=18^2+4\cdot 12^2=$ $=9\cdot 4\cdot 13 \Rightarrow x_{1;2}=\frac{18\pm 6\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x\in(-\infty;9-3\sqrt{13})\cup(9+3\sqrt{13};+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;9-3\sqrt{13})\cup(9+3\sqrt{13};+\infty)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

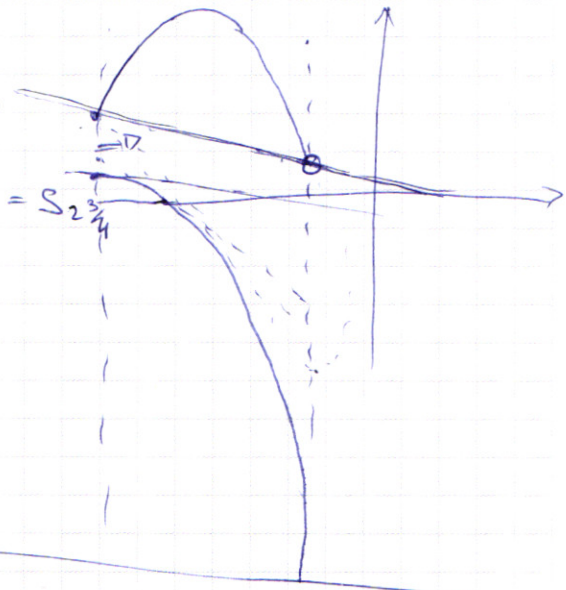
$3 + \frac{1/2}{x+3/4}$; $x = -11/4$ $y = 3 + \frac{1/2}{-8/4} = 3 + -\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$;

$-8x^2 - 30x + 17 = 0$

$b = -\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$x = -\frac{3}{4}$; $y = -\frac{9}{2} + \frac{\overset{45}{15\cdot 3}}{2} - 17 = \frac{36-34}{2} = 1$.

$x = -11/4$; $y = -\frac{121}{2} + \frac{\overset{165}{15\cdot 11}}{2} - 17 = \frac{44-34}{2} = 5$ $2\frac{3}{4}$



$f'(x) = \left(3 + \frac{2}{4x+3}\right)' = \frac{2}{4(4x+3)^2} = \frac{1}{2(4x+3)^2} =$

$\frac{1}{2\cdot 64} = \frac{1}{128}$ $\Rightarrow$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t \cdot t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 12} = t \cdot t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$5^{\log_{12} t} = t^{\log_t 5^{\log_{12} t}}$

$5^{\log_{12} t}$

$1 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12} t}$

$3^2 \cdot 2^2$

$\underbrace{9\cdot 4}\cdot 9 + \underbrace{9\cdot 4}\cdot 4 =$

$t + t \cdot \frac{12}{5}^{\log_{12} t} \geq \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12} t}$

$5^{\log_{12} t} \geq t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$\frac{5^{\log_{12} t}}{t} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$.

$\exists\ t = 12^k$

$5^k + \cancel{12^k} \geq 13^k$; $\cancel{12^k}$ $\Rightarrow$ $5^k + 12^k \geq 13^k$

12^k

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) - \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$ $\quad \alpha+\beta=a \quad \alpha-\beta=b \quad \alpha=\frac{a+b}{2} \quad \beta=\frac{a-b}{2}$

$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; $\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}} \Rightarrow |\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \mp\frac{1}{\sqrt5}$?

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ($1-\sin^2\alpha$; $2\cos^2\alpha - 1$)

] $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$2\sin 2\alpha + \underbrace{\cos 2\alpha}_{1-2\sin^2\alpha} = \cancel{1} \Rightarrow \cancel{8}\sin 2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$ $\quad \boxed{tg\alpha = 0}$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \cos^2\alpha$ $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\cos\alpha = \sin\alpha \;:\; \cos\alpha \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 2}$ $\quad$ Проблема с знаком!!!

] $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$; $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \underbrace{\cos^2\alpha}_{-1+\sin^2\alpha} = -1 \Rightarrow \sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$tg\alpha = 0$

$\sin\alpha = -4\cos\alpha \;;\; \cos\alpha$

$\boxed{tg\alpha = -4}$

$tg\alpha \neq 0$

$a = \sqrt{b}(2\sqrt b \sqrt a)$.

№2.

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$ $\quad$ Замена: $x-2 = a \quad x = a+2$; $y - 1 = b \quad y = b+1$

$x(y-1) - 2(y-1) = (x-2)(y-1)$ $\quad a - 2b = \sqrt{ab} \quad a - 2b > 0 \quad \boxed{a > 2b}$

$a^2 + 9b^2 = 5^2$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$ $\quad a^2 = 25 - 9b^2$

$a<0;\ b<0$; $a>0;\ b>0$ $\Big\}\ a > 2b$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 5^2 \end{cases}$ $\quad 1)\ a =$ $\quad 25 - 9b^2 > 4b^2$

$6ab \quad +6ab \quad 25 > 13b^2$

$(a+3b)^2 = 25 \quad (a-2b)^2$

$5a(2a+b) = 25 \Rightarrow b(2a+b) = 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$ab=(a-2b)^2 \Rightarrow a^2+4b^2-4ab \Rightarrow$

$5ab=a^2+4b^2$

$5ab+5b^2=25$ $\quad b^2+ab=5$ $\quad b(a+b)=5$ $\quad 6ab=a^2+5+3b^2$

$(a+3b)^2=a^2+30+3b^2$ $\quad t^2+$ $\quad 5ab=a^2+4b^2$ $\quad \boxed{a>2b}$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$ab=(a-2b)^2 \Rightarrow 5ab=$

$\Rightarrow$ ~~$(a+3b)^2=25+6ab \Rightarrow ab=\frac{(a+3b-5)(a+3b+5)}{6}$~~

~~$(a+3b)^2=25+6ab$~~

~~$b<1$~~ 3

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a^2=-4b^2+5ab$ $\quad a=\pm 4$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab-5=0$

$\frac{b^2-5-2b^2}{b}=\sqrt{b^2-5}$

$-\left(\frac{b^2+5}{b}\right)=\sqrt{b^2-5}$

$\frac{5-3b^2}{b}$

$ab=5-b^2$

~~$\frac{b^2-5}{b}=a$~~ $\quad \frac{9\cdot5}{2}=\frac{45}{2}$

~~$(a+3b)^2=6b^2-5$~~

$a=\frac{5}{2}$

$a=\frac{5-b^2}{b}$ $\quad \frac{25-10b^2+b^4}{b^2}+9b^2=25$

~~$\frac{b^2-5}{b}>2b$~~

$\frac{25-10b^2+10b^4-25b^2}{b^2}=0$

~~$\frac{5-b^2}{b}=a$ $\quad b^2-5>2b^2$~~

$-5>b^2$

$\frac{10b^4-35b^2+25}{b^2}=0$ $\quad b_1^2=1$ $\quad b_2^2=\frac{5}{2}$

$\frac{25}{2}-\frac{30}{2}+5$

$\log_a b+\log_a c=$

$5(2b^4-7b^2+5)$

$b=\pm 1$ $\quad a=\pm 4$ $\quad \boxed{\begin{matrix} b=1 \\ a=4 \end{matrix}}$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=\pm\sqrt{10}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

№3

$e^x=e^y \Rightarrow$

$\log_2 13=\frac{\log_t 13}{\log_t 12}$ $\quad$ ОДЗ: $x^2+18x>0$ $\quad \ln e\, e^x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

t. $\quad t>0$.

$5^{\log_{12} t}+t\geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad >1$

$\boxed{\text{при } t<1 \text{ н-во верно.}}$

$\log_{12} 11$ ..

$5^{\log_{12} t} \geq t\left(t^{\log_{12} 13-1}-1\right)$ $\quad >0$

$\log_{12} 12$

$\exists t>1$. $\quad \exists\ 12>t>1$

$\log_{12}\frac{13}{12}\ 1+\frac{1}{12}$.

$5^{\log_{12} t}-t^{\log_{12} 13}\geq -t$.

$t^{\log_{12} 13}=x$

$5^{\log_{12} t}-t^{\log_{12} 13}\geq t$

$\left(5^{\log_{12} t}\right)'=5^{\log_{12} t}\ \ln\ \log_2 t$

$t=\sqrt[\log_{12} 13]{x}$

$5=t^{\log_t 5}$ $\quad$ ~~$=t^{\frac{\log_{12} 5}{\log_{12} t}}$~~ $\quad -t^{\frac{\log_t 13}{\log_t 12}}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\geq 2\sqrt{5^{\log_{12} t}\cdot t}$

$7\times 8 = 56$

$t \geq t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12} t}$

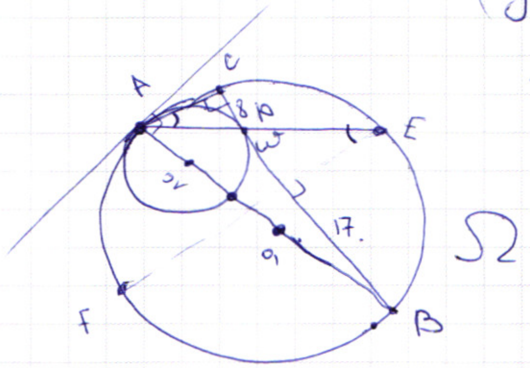
$t^{\log_{12}13} = x$ ~~$x = \sqrt{t}$~~

~~$t = \left(\sqrt[\log_{12}13]{x}\right)$~~

$(\log_{12}13 - 1)\, t^{\log_{12}13 - 1}$

$5^{\log_{12} t}\cdot \ln \log_{12} 13 \cdot \frac{1}{12 t}$

~~A - ср. EF.~~



$\angle AFE$ - ?

S, r - ?

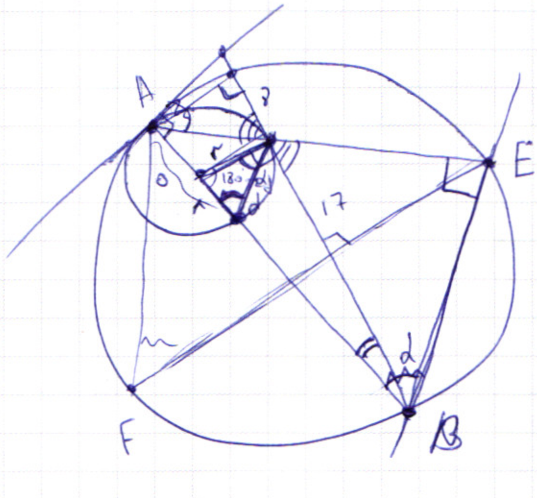
$\overset{\smile}{CE} = \overset{\smile}{AF}$

$S_\triangle AEF$

$CD = 8$

$BD = 17$

$\frac{85}{6} - \frac{136}{15}$



$$\begin{cases} (2R - 2r)\cdot 2R = 17^2 \\ \frac{25}{17} = \frac{\cancel{2R - r}\ 2R}{2R - r} \end{cases}$$

~~$16R = 34R - 17r \Rightarrow$~~

~~$18R = 17r \Rightarrow r = \frac{17}{18}R$~~

$50R - 25r = 34R$

$16R = 25r$

$r = \frac{16}{25}R$

$\frac{32}{25}\cdot 2\frac{(50-32)}{25}R^2 = 17^2 \Rightarrow$

$R^2 = \frac{17^2\cdot 5^2}{6^2} \Rightarrow$

$R = \frac{17\cdot 5}{6}$

$r = \frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot 5}{6} = \frac{17\cdot 8}{15}$

$\frac{85}{6} = 14\frac{1}{6} - 9\frac{1}{15}$

$R - r$

$\boxed{5\frac{1}{10}} = 5{,}1$

$\frac{5}{30} - \frac{2}{30} = \boxed{\frac{1}{10}}$

$5\frac{1}{10} + 14\frac{1}{6} = 19\frac{16}{60} = 19\frac{8}{30} = \boxed{19\frac{4}{15}}$

285 $\frac{289}{15\cdot 17}$

$19 \times 15 = 285$

$15 \times 17 = 255$

$17\times 5 = 85$

$17 + 8 = 25$

$34 - 16 = 18$

$136 : 15$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{10}$ $\cos\ 2\alpha - 90 = \boxed{\cos 2\alpha \sin 90} = \cos 2\alpha.$

$90 - \alpha.$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$564 \,|\, 2$, -4, 16, 282

$\frac{289+275}{289 \cdot 2} = \frac{564}{289 \cdot 2} = \frac{282}{289}$

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad \boxed{f(1) = f(a) + f(\tfrac{1}{a})}$

a и $\frac{1}{a}$

$\cancel{f(0) = f(0) + f(a)}$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0. \Rightarrow f(a) = -f(\tfrac{1}{a}).$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = \boxed{f(x) - f(y)} < 0 \Rightarrow$

$f(1) = 0 \quad f(2) = [\frac{2}{4}] = 0. \quad f(3) = 0 \quad f(4) = 0$

$f(5) = 1;\ f(6) = 0;\ f(7) = 1;\ f(8) = 0;\ f(9) = 0;\ f(10) = 0;\ f(11) = 2;\ f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) =$

$\boxed{2\ 3\ 5\ 7}\ 9\ \boxed{11\ 13}\ 15\ \boxed{17\ 19}\ 21\ \boxed{23}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

$24 - 7$ $\quad 20 - 3 = 17$

$17 \times 7 = 119$

$+129$, 9, 138

$\frac{12x+11}{4x+3}$

$12x + 11 \,|\, 4x+3$, $-12x + 9$, 3, 2

$\frac{36}{2} - 17 = -$

$\boxed{3 + \frac{2}{4x+3}}$

$-\frac{9}{2} + \frac{\cancel{90}\ 45}{2} - 17$

$3 + \frac{1/2}{x + 3/4}$

150, 15, 165, -121, 44, -34

$-8x^2 - 30x - 17 \quad ; \quad x = -\frac{11}{4}$

$y = -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17.$

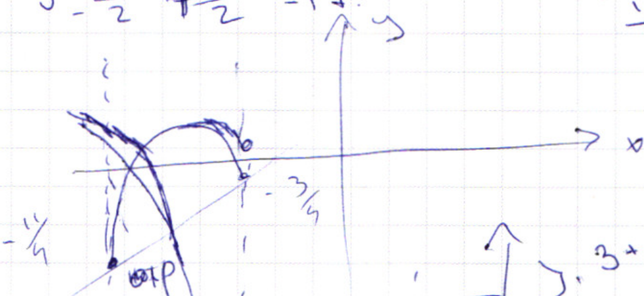
$= 6$

$D = 900 - 4 \cdot 8 \cdot 17.$

$b_0 = -\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8}.$

$\frac{-\frac{121}{2} + \frac{\overset{165}{15 \cdot 11}}{2} - 17}{} = \Rightarrow$

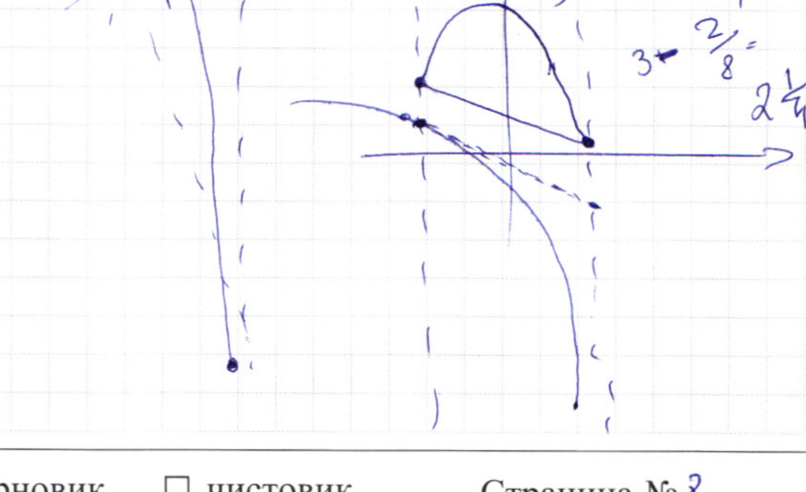
$\frac{44}{2} = S$



$y,\ 3 + \frac{1/2}{-3/4}$

$3 - \frac{2}{8} =$

$2\frac{1}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)