МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \quad \begin{cases} x-12y=\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y=81 \end{cases}$$

Ограничение:

$$\begin{cases} 2xy-12y-x+6\ge 0 \\ x-12y\ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases}(x-6)(2y-1)\ge 0 \\ x-12y\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(4y^2-4y+1)-90=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2-90=0 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$, $ab\ge 0$, $a-6b\ge 0$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2-90=0 \end{cases} \quad |\uparrow^2$$ (имеем право возводить при огранич. $ab\ge 0$, $a-6b\ge 0$)

$$\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+9b^2-90=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \quad |:b^2$$

(при $b=0$ $\begin{cases} a^2=0 \\ a^2=90 \end{cases}$, решений нет)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$$

$$D=169-1\cdot 36\cdot 4=169-144=25$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13\pm 5}{2} \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=9 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$$

Получаем $\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 81b^2+9b^2=90 \\ a=9b \end{cases} \\ \begin{cases} 16b^2+9b^2=90 \\ a=4b \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b^2=1 \\ a=9b \end{cases} \\ \begin{cases} b^2=\frac{5\cdot 18}{5\cdot 5} \\ a=4b \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=9 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \\ a=4\cdot 3\frac{\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \\ a=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \end{array}\right.$$

не подх по усл. $a-6b\ge 0$

$a-6b=-9+6=-3$

$a-6b<0$

не подх по усл $a-6b\ge 0$.

Обратн. замена.

1) $\begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{6\sqrt5}{\sqrt5}-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt5}{\sqrt5}-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\right) \end{cases}$

Ответ: $(15;1)$; $\left(\frac{6(\sqrt5-2\sqrt2)}{\sqrt5}; \frac{\sqrt5-3\sqrt2}{2\sqrt5}\right)$.

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ ограничения: $10x-x^2>0$

По имеющимся ограничениям $(10x-x^2)>0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$

$(-x^2+10x)^{\log_3 4} \geq x^2-10x+5^{\log_3(10x-x^2)}$, пусть $10x-x^2=t$, $t>0$

$t\in(0,25)$

$t^{\log_3 4} \geq -t + 5^{\log_3 t}$

~~1ый способ (логарифмируя)~~

$\cancel{t^{\log_3 4}\cdot\log_5 5 \geq -t\cdot\log_5 5 + 5^{(\log_3 t)}}$

$\cancel{\log_5 5^{(t^{\log_3 4})} \geq \log_5 5^{(-t)} + 5^{\log_3 t}}$; $\cancel{\log_5 5^{(t^{\log_3 4})} - \log_5 5^{(-t)} \geq 5^{\log_3 t}}$

$\cancel{\log_5\left(\frac{5^{(t^{\log_3 4})}}{5^{(-t)}}\right) \geq 5^{\log_3 t}}$

$\cancel{\log_5\left(5^{(t^{\log_3 4})}\cdot 5^{t}\right) \geq 5^{\log_3 t}}$; $\cancel{\log_5 t^{\log_3 4+1} \geq 5^{\log_3 t}}$;

~~2ой способ~~

$t^{\log_3 4}+t \geq 5^{\log_3 t}$; $t^{\log_3(3\cdot\frac{4}{3})}+t \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{1+\log_3\frac{4}{3}}+t \geq 5^{\log_3 t}$, $t\left(t^{\log_3\frac{4}{3}}+1\right) \geq 5^{\log_3 t}$ Возьмём логарифм по осн. 3 от обеих частей.

Ф-ция $\log_3 x$ монотонно возрастает на обл. определения, поэтому при $k \geq m$ $\log_3 k \geq \log_3 m$

$\log_3\left(t\cdot\left(t^{\log_3\frac{4}{3}}+1\right)\right) \geq \log_3 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t + \log_3\left(t^{\log_3\frac{4}{3}}+1\right) \geq \log_3 t\cdot\log_3 5$.

~~1ый способ — продолжение:~~ $\cancel{\log_5 t^{\log_3 4+1} \geq 5^{\log_3 t} = \log_5 5^{(5^{\log_3 t})}}$

~~По св-ву логарифмич. ф-ции с учётом ограничений~~ $\cancel{t^{\log_3 4+1} >}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: окр-ти

Ω и ω касаются в т. A

внутренним образом.

AB – диаметр Ω

R, r – радиусы Ω и ω

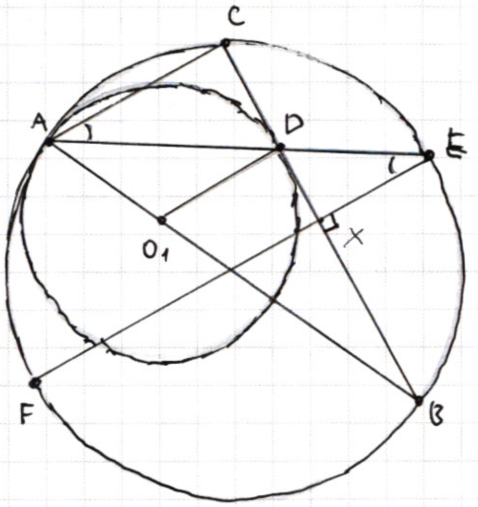
соответственно, $R > r$.

$AD \cap \Omega =$ т. E

$EF \perp BC$, $F \in$ окр-ти Ω

$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

Найти R, r, $\angle AFE$, S_{AEF} – ?



1) Окр-ти касаются внутренним образом ⇒ их центры лежат на диаметре AB большей окружности. $\angle ACB = 90°$ (вписан. $\angle$, опирающийся на диаметр AB окр-ти Ω)
Пусть O_1 – центр меньшей окр-ти.

2) $O_1D \perp BC$ (касат-ная BC к ω $\perp$ радиусу, проведенному к т. касания)

Для $\triangle O_1BD$ и $\triangle ABC$: $\angle B$ – общ., $\angle O_1DB = \angle ACB = 90°$ } $\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ по двум $\angle$ ⇒

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{CD+DB} = \frac{17}{17+15} = \frac{17}{32}$

$BA = AO_1 + O_1B = r + O_1B$

Тогда $\frac{O_1B}{r+O_1B} = \frac{17}{32}$, $32O_1B = 17r + 17O_1B$

$15O_1B = 17r$ (*)

3) Для прямоуг. $\triangle O_1DB$, по т. Пифагора $O_1D^2 + DB^2 = O_1B^2$, $r^2 + \frac{17^2}{4} = O_1B^2$ (**)

4) Решим (*) и (**): $O_1B = \frac{17}{15}r$; $\frac{15^2}{15^2} \cdot r^2 + \frac{17^2}{4} = \frac{17^2 r^2}{15^2}$, $\frac{17^2}{4} = r^2\frac{(17-15)(17+15)}{15^2}$

$r^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 2^5}$, $r = \pm\frac{17 \cdot 15}{16}$ (отрицат-ный корень не подходит).

т.е. $r = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$; $O_1B = \frac{17}{15} \cdot \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{17^2}{16}$

$17 \cdot 15 = 85 + 17\text{(0)} = 255$

$R = \frac{AB}{2} = \frac{AO_1 + O_1B}{2} = \frac{r + O_1B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{15 \cdot 17}{16} + \frac{17^2}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{16} \cdot 32 = 17$

5) Из подобных $\triangle O_1BD$ и $\triangle ABC$ $\frac{O_1D}{AC} = \frac{DB}{CB} = \frac{17}{32}$ ⇒ $AC = O_1D \cdot \frac{32}{17} = r \cdot \frac{32}{17} = \frac{17 \cdot 15}{16} \cdot \frac{32}{17} =$

$= 30$. $\triangle ACD$ – прямоуг, по т. Пифагора $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{900 \cdot \frac{4}{4} + \frac{15^2}{4}} = \sqrt{\frac{15^2}{4}(2^2 \cdot 4 + 1)} =$

$= \frac{15}{2}\sqrt{17}$

6) По св-ву пересекающихся хорд $AD \cdot DE = CD \cdot DB$ ⇒ $DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{2}{15\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

(см продолж на стр. 4)

№7.

Дано:

$KLMN$ - пирамида

A, B, C, D, E - середины KM, NM, ML, KL, NL соответственно.

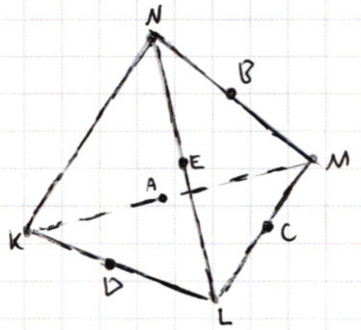
т. $N, A, B, C, D, E \in$ сфере ω

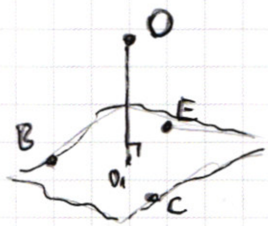
$KL = 3$

$KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$

LM - ?

R_{min} - ?





1) Рассм. (BEC), пусть центр сферы O проецируется на (BEC) как O_1.

Рассм. прямоуг $\triangle BOO_1$ ($\angle BO_1O = 90^\circ$ т.к. $OO_1 \perp (BEC)$, $BO_1 \subset (BEC)$), также $\triangle BEO_1$ (прямоугольный аналогично $\triangle BOO_1$).

$BO = OE$ (радиусы сферы), OO_1 - общ. ст. $\Rightarrow$ $\triangle BOO_1 = \triangle BEO_1 \Rightarrow BO_1 = O_1E$, аналогично доказывается, что $BO_1 = O_1C$,

т.е. O_1 - центр $\triangle BEC$.

$OB = OC = OE$, O проецируется в центр $\triangle BEC$ $\Rightarrow$ пирамида $OBEC$ - правильная, т.е. $BE = EC = BC$.

Аналогично доказывается, что $AC = AD = DC$

2) EC - ср. линия $\triangle NML$ (по опр. ср. линии $\triangle$) $\Rightarrow$ $\cancel{AC = KL = \frac{3}{2}}$, тогда

$\cancel{AB = BC = AC = \frac{3}{2}}$, $\cancel{AD = DC = AC = \frac{3}{2}}$

$EC = \frac{NM}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$EB = EC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, по опр ср. линии $\triangle$ $LM = 2EB = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Ответ: $LM = \sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $AE = AD + DE = \frac{15}{2}\sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$ №4 (продолж)

8) По т Синусов для $\triangle AFE$ $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

Пусть $EF \cap CB = X$

8) Прямоуг. $\triangle ACD$ и EXD подобны ($\angle ACD = \angle EXD = 90°$, $\angle ADC = \angle EDX$ (вертик.))

Тогда $\angle DEX = \angle DAC$, $\sin\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{15}{2} : \left(\frac{15}{2}\sqrt{17}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\angle DAC = \frac{AC}{AD} = 30 : \left(\frac{15}{2}\sqrt{17}\right) = 15\cdot 2\cdot\frac{2}{15\cdot\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда $DX = DE\cdot\sin\angle DAC = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}$

$XE = DE\cdot\cos\angle DAC = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = 2$

$XB = BD - DX = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$

По св-ву пересекающ. хорд $CX\cdot XB = FX\cdot XE \Rightarrow FX = \frac{(CD+DX)\cdot XB}{XE} =$

$= \frac{\left(\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot 8}{2} = \frac{8\cdot 8}{2} = 32$

9) $S_{AEF} = \frac{AE\cdot FE}{2}\cdot\sin\angle AEF = \frac{AE\cdot(FX+XE)}{2}\cdot\sin\angle DAC =$

$= \frac{8\sqrt{17}\cdot(32+2)}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = 4\cdot 64 = 256$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$, $S_{AEF} = 256$.

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, разделим 1ое рав-во на 2ое $(\sin(2\alpha+2\beta)\neq 0)$

Получим: $2\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot(-\sqrt5) = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{1}{5}$

1) при $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$, $\frac{4}{5}+\sin 2\alpha = -\frac{1}{5}$, $\sin 2\alpha = -1$

~~$2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$~~

~~$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$~~

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $-1 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $-1-\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$

~~tg^2~~

$\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+1=0$

$(\operatorname{tg}\alpha+1)^2=0$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$

При $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$ и $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$ получаем такой же ответ.

2) При $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{4}{5}+\sin 2\alpha = -\frac{1}{5}$

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}-\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\frac{5\cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{5(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} - \frac{3(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{5(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = 0$. $|\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha > 0$

$10\operatorname{tg}\alpha-3-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot 3=0$, $3\operatorname{tg}^2\alpha-10\operatorname{tg}\alpha+3=0$

~~$k=25$~~ ~~$D=25$~~

$3\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{3}\right)\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{9}{3}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = 3\end{array}\right.$

При $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

получаем такие же ответы ~~т.к. значение~~

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = 3\end{array}\right.$

В условии сказано, что значений не менее трёх, так что посторонних решений получено не было.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x(x-12)+36y(y-1)=45 \\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \end{cases}$$

$x-12y=\sqrt{x(2y-1)+6(1-2y)}$

$(x-6)(2y-1)$

$x-12y=$

$=(x-6)-6(2y-1)$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-12x+36+36y^2-36y=81$

$(x-6)^2+9(4y^2-4y-9)=0$

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

$k=-6$

$D_1=36-36y^2+36y+45=-36y^2+36y+81$

$$\begin{cases} \sqrt{ab}=a-6b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$ $, ab\geq 0 \quad |\uparrow^2$ $\quad a-6b\geq 0$

$(x-6)^2+9(4y^2-4y+1-10)=0$

$a^2+9(b^2-10)=0$

$\sqrt{ab}=a-6b$

$$\begin{cases} ab=a^2-36b^2-12ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-36b^2-13ab=0 \quad |:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}-36=0$

при $b=0$

$$\begin{cases} 0=a-0 \\ a+0=90 \end{cases}$$ — не под.

$\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}-36=0}$

$k^2-13k-36=0$

$D=169+36=205$

$\frac{169+36}{205}$ | 5, 41

$\frac{a}{b}=\frac{13\pm\sqrt{205}}{2}$ — отр нет!

$9b^2+\left(\frac{169+205+26\sqrt{205}}{4}\right)b^2=90$

$\frac{a}{b}=\frac{13+\sqrt{205}}{2} \cdot b$

$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+\sin2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta$

$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$D=169+$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}-36=0$

$a^2-36b^2-13ab=0$

$a^2+9b^2-90=0$

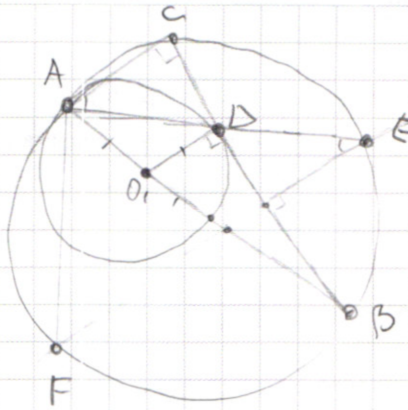
$(a+3b)^2=6ab+90$

36, 4, 120, 144, 169, 313

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$r, R - ?$

$\angle AFE - ?$

S_{AEF}

$O_1B = 17R$

$\angle ACB = 90^\circ$

$\frac{O_1B}{O_1B + R} = \frac{17}{32}$

$O_1B^2 = R^2 + \frac{289}{4}$

$\frac{289R^2}{15^2} - \frac{15^2 R^2}{15^2} = \frac{289}{4}$

$+\begin{array}{r}289\\225\end{array}$

514

257

$\frac{17}{15}$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $x \in (0, 10)$

$(10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 = t,\ t \geq 0$

$t^{\log_3 4} \geq -t + 5^{\log_3 t}$

$x_B = \frac{-10}{-2} = 5$

$50 - 25 = 25$

$2t \cdot \log_3 4 \geq 5^{\log_3 t}$

$\boxed{16^t \geq t^5}$

$f(t) = 16^t = \ln 16 \cdot 16^t$

$f(t) = t^5,\ f'(t) = 5t^4$

$x_B = \frac{-36}{-2 \cdot 32}$

$-\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$

$4 + \frac{4}{4x - 5}$

$\frac{5^c}{5^{-6}} = 5^c : \left(\frac{1}{5^6}\right) = 5^6 \cdot 5^c$

$2^{(2^3)}$

$\sin 2x + \cos 2x \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2x = -1 - 2\cos 2x$

$\log_3 t \cdot \log_3 4 \geq \cancel{\log_3 t + \log_3 5 \cdot \log_3 t}$ $\log_3(-t+5^{\log_3 t})$ $= -\log_3 t$

$a \cdot \log_3 4 - a\log_3 5 \geq \log_3 t$

$a \cdot \log_3 \frac{4}{5} \geq \log_3 t$

$t(1+t^{\log}$

$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4 + 1} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 \; t^{\log_3 (3 \cdot \frac{4}{3})} = t^{1+\log_3 \frac{4}{3}}$

$t(t^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1) \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 12} \geq \log_3 t = \frac{\ln t}{\ln 3}$

$\log_3 t + \log_3 (t^{\dots} + 1) \geq \log_3 5 \cdot \log_3 t$

$\ln(\log_3 12)$.

$\log_3 12 \cdot t^{\log_3 4} \Big/ \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t}$

$\log_3(t^{\log_3 4} + t)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

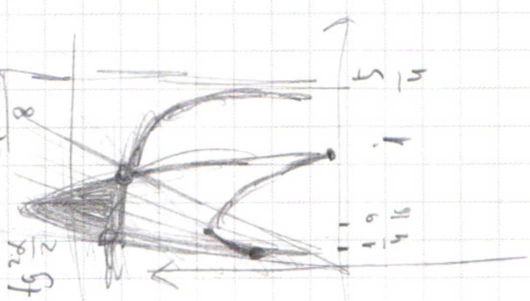
$f(ab) = f(a) + f(b)$

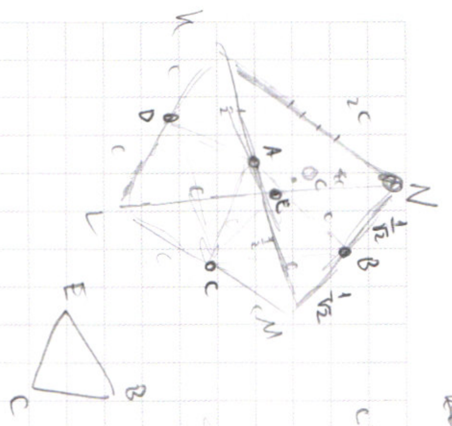
$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

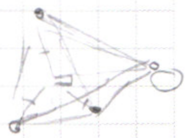
$x \in [2, 25]$

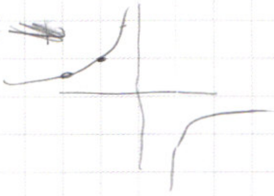
$y \in [2, 25]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$









$tg\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$2\cos 2\beta = \frac{2}{5}\cdot\sqrt5 = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow 2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos^2\beta = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$

$\sin^2\beta = \frac{2\sqrt5 - 1 - \sqrt5}{2\sqrt5} = \frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $1+x^2 = \sqrt5 - \sqrt5 x^2$

$R = \frac{17\cdot5\cdot3}{2\cdot3\cdot2} = \frac{17\cdot5}{4} = \boxed{\frac{85}{4}}$

$R\delta = \frac{\frac{85\cdot3}{12}+\frac{17}{12}}{2} = \frac{136}{12} = \boxed{\frac{34}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4 (Нумеровать только чистовики)