МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$ чушь?

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

1. (1)

$$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$$

$$\begin{cases} x-12y\geqslant 0 \\ (x-12y)^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

• $(x-12y)^2=2xy-12y-x+6$

$$x^2-24xy+144y^2-2yx+12y+x-6=0$$

$$x^2-26xy+144y^2+x+12y-6=0$$

$$(x-8y-2)(x-18y+3)=0$$

$$\begin{cases} x-12y\geqslant 0 \\ (x-8y-2)(x-18y+3)=0 \end{cases} \to \begin{cases} x\geqslant 12y \\ \left[\begin{array}{ll} x=8y+2 & а \\ x=18y-3 & б \end{array}\right. \end{cases}$$

2. (2)

$$x^2+36y^2-12x-36y=45$$

$$x^2-12x+36+36y^2-36y+9-36-9-45=0$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90=(x-6)^2+9(2y-1)^2$$

3б. $\begin{cases} x=18y-3 \\ x\geqslant 12y \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

$$(18y-3-6)^2+9(2y-1)^2=90=(18y-9)^2+9(2y-1)^2=81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=$$

$$=90\cdot(2y-1)^2\Rightarrow(2y-1)^2=1 \Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Проверим. $\begin{cases} y=0 \\ x=18y-3=-3 \\ x \geqslant 12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ -3 \geqslant 0 \end{cases}$ неверно ×

$\begin{cases} y=1 \\ x=18y-3=15 \\ x \geqslant 12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=15 \\ 15 \geqslant 12 \end{cases}$ верно ✓

3а

~~3б~~. $\begin{cases} x \geqslant 12y \\ x=8y+2 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

$(8y+2-6)^2+9(2y-1)^2=90=(8y-4)^2+9(2y-1)^2=16\cdot(2y-1)^2+9(2y-1)^2=25(2y-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2y-1)^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}=3,6$

• $\begin{cases} x=8y+2 \\ x \geqslant 12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8y+2 \\ 8y+2 \geqslant 12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8y+2 \\ 4y \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow y \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2y-1 \leqslant 0$

$2y-1 \leqslant 0$, поэтому $2y-1=-\sqrt{3,6}=-\frac{6}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2y=\frac{-6+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$ и

$\Rightarrow y=\frac{-6+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{-6\sqrt{10}+10}{2\cdot 10}=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10}$

$x=8y+2=8\cdot\left(\frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right)+2=\frac{-12\sqrt{10}+20}{5}+2=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$

$\begin{cases} x=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5} \\ y=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10} \end{cases}$

Итак, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5} \\ y=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(15;1)$, $\left(\frac{-12\sqrt{10}+30}{5};\ \frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

1. (2) $-\frac{2}{5} = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot \underset{(1)}{\sin}(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} & а \\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} & б \end{array}\right.$

2. $\underset{(1)}{-\frac{1}{\sqrt5}} = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

б) $-\frac{1}{\sqrt5} = \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}$

$-1 = \sin 2\alpha - 2\cdot\cos 2\alpha$

$-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

• $\cos\alpha = 0$
$0+3\sin^2\alpha-0=0 \to \sin\alpha=0$ ш ОТТ $\Rightarrow \cos\alpha\neq 0$

$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha=0 \quad \Big| : \cos^2\alpha$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

а ~~б~~) $-\frac{1}{\sqrt5} = \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5}$

$-1 = \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha$

$-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

$\cancel{-3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0}$

$-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

анал п.б $\cos\alpha \neq 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$$

Итак, $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$

Задача 5.

1. $f(2) = f(2\cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$
2. $f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$
3. $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

   $f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$
4.

a	f(a)
2	$[\frac{2}{4}] = 0$
3	$[\frac{3}{4}] = 0$
4	$f(2)+f(2) = 0$
5	$[\frac{5}{4}] = 1$
6	$f(2)+f(3) = 0$
7	$[\frac{7}{4}] = 1$
8	$f(4)+f(2) = 0$
9	$f(3)+f(3) = 0$
10	$f(2)+f(5) = 1$
11	$[\frac{11}{4}] = 2$
12	$f(4)+f(3) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a	f(a)
13	$[\frac{13}{4}] = 3$
14	$f(2)+f(7) = 1$
15	$f(3)+f(5) = 1$
16	$f(8)+f(2) = 0$
17	$[\frac{17}{4}] = 4$
18	$f(9)+f(2) = 0$
19	$[\frac{19}{4}] = 4$
20	$f(2)+f(10) = 1$
21	$f(3)+f(7) = 1$
22	$f(2)+f(11) = 2$
23	$[\frac{23}{4}] = 5$
24	$f(4)+f(6) = 0$
25	$f(5)+f(5) = 2$

$f(a) = 0$ для 10 a из $[2; 25]$
целых (натур)

$f(a) = 1$ для 7 шт.

$f(a) = 2$ для 3 —"—

$f(a) = 3$ для 1 —"—

$f(a) = 4$ для 2 —"—

$f(a) = 5$ для 1 —"—

$f(a) \notin \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ для 0 $a \in \mathbb{N}$ из $[2; 25]$

5. $f(x)=0$ $\quad 10 \cdot 14 = 140$ сл.

сл. выбор x $\quad$ сл. для y при $f(x) \leq f(y)$, $y \in [2; 25]$, $y \in \mathbb{N}$

$f(x)=1$ $\quad 7 \cdot 7 = 49$ сл.

$f(x)=2$ $\quad 3 \cdot 4 = 12$

$f(x)=3$ $\quad 1 \cdot 3 = 3$

$f(x)=4$ $\quad 2 \cdot 1 = 2$

$f(x)=5$ $\quad 1 \cdot 0 = 0$

Итого $140+49+12+3+2+0 = 206$ пар $(x; y)$, удовлетворяющих условию.

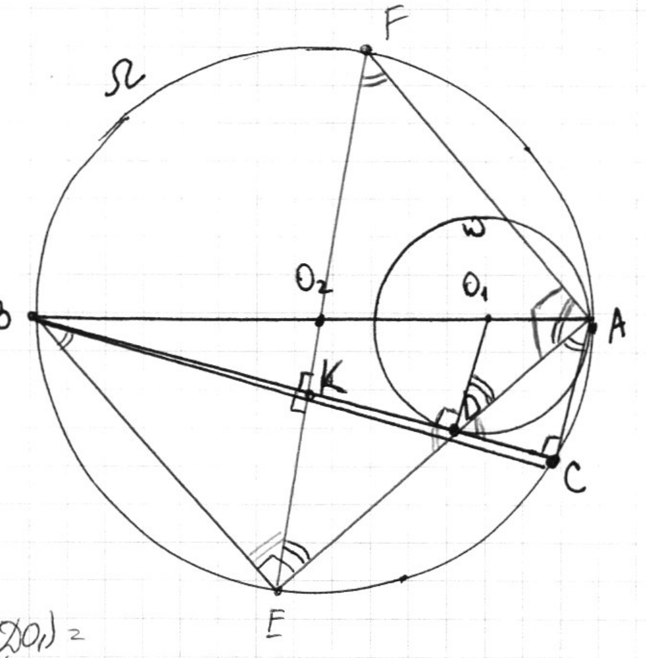
Ответ: 206 пар

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 4.

1. $O_1 \in AB$

(A – общ $(\cdot)$ кас $\Rightarrow O_1A \perp \ell$
$O_2A \perp \ell$
(ℓ – общ кас ч/з $(\cdot)$ A))



2. $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$
(впис, опир на диам AB)

$\angle O_1DC = 90^\circ$ (r в $(\cdot)$ кас)

3. Пусть $EF \cap AB = L$.

~~$\angle ELA = $~~
~~$\angle AO_2E = \angle AO_1D$~~

$\angle AO_1D = 180^\circ - \angle BO_1D =$
$= 180^\circ - (360^\circ - \angle O_1LK - \angle LKD - \angle KDO_1) =$
$= 180^\circ - (360^\circ - 180^\circ - \angle ALE) = \angle ALE$.

Тогда $\left.\begin{array}{l}\angle AO_1D = \angle ALE \\ \angle LAE = \angle O_1AD\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ALE \sim \triangle AO_1D \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle AEL = // = \angle O_1AD$
(в $\triangle O_1AD$ $O_1A = O_1D = R_1$)

4. $\angle FAE = \angle FAB + \angle BAE = \angle FEB + \angle AEF = \angle AEB = 90^\circ$
(впис, опир на $\cup BF$)

$\angle FAE$ – впис и $= 90^\circ \Rightarrow FE$ – диам, $L \equiv O_2$.

5. $\triangle BDO_1$, $\triangle BCA$ – п/у с общ $\angle B \Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R_2 - R_1}{2R_2} =$
$= \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2} + \frac{15}{2}} = \frac{17}{32} \Rightarrow \frac{2R_2 - R_1}{R_2} = \frac{17}{16} \Rightarrow 32R_2 - 16R_1 = 17R_2 \Rightarrow 15R_2 = 16R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{15}{16}R_2$

6. $\triangle BDE$, $\triangle ADC$ – п/у с равным $\angle D$ (верт) $\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADC \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow AD \cdot ED = BD \cdot CD = \frac{15 \cdot 17}{4}$.

7. $\triangle AO_1D \sim \triangle AO_2E$ (п. 4) $\Rightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AD}{AE} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{15}{16} \Rightarrow 15AE = 16AD \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = \frac{15}{16}AE$ ~~$\frac{15 \cdot 17}{4 \cdot 1}$~~ $\Rightarrow ED = \frac{1}{16}AE \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{15}{1} \Rightarrow AD = 15ED$

Из п. 6 $AD \cdot ED = \frac{15 \cdot 17}{4} = 15 \cdot ED^2 \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$, $AE = 8\sqrt{17}$

8. Из п/у $\triangle DBE$ $\sin\angle DBE = \sin\angle AEF = \frac{ED}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \sin(90^\circ - \angle AFE) =$
$= \cos\angle AFE \Rightarrow \angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9. ~~cos∠AFE~~ $\sin\angle AFE = \sqrt{1-\cos^2\angle AFE} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{AE}{EF} = \frac{8\sqrt{17}}{2R_2} = \frac{4\sqrt{17}}{R_2}$ ⇒

$\Rightarrow R_2 = \frac{4\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}{4} = 17.$

$R_1 = \frac{15}{16}R_2 = \frac{15\cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

10. $S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot 2\cdot 17\cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 8\cdot 17 = 145$

Ответ: $R_1 = R_\omega = \frac{255}{16}$

$R_2 = R_\Omega = 17$

$\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$S_{AEF} = 145$

Задача 3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ (с учётом огр)

Ограничения:
$10x - x^2 > 0$
$x^2 - 10x < 0$
$0 < x < 10.$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $a = \log_3(10x-x^2)$

• $10x - x^2 = 3^{\log_3(10x-x^2)} = 3^a$

$3^a + 3^{a\cdot\log_3 4} \geq 5^a$

$4^a + 3^a \geq 5^a \Rightarrow 3^a + 4^a \geq 5^a$

Пусть $f(a) = 3^a + 4^a$, $g(a) = 5^a$. $f(a)\nearrow$ на $(-\infty;+\infty)$, $g(a)\nearrow$ на $(-\infty;+\infty)$.

$g(a)$ возрастает быстрее, чем $f(a)$.

Пусть a_1: $f(a_1) = g(a_1)$. Тогда $f(a) \geq g(a)$ при $a \leq a_1$.

• $3^{a_1} + 4^{a_1} \geq 5^{a_1}$

$a_1 = 2$

Итак, $a \leq 2$.

Вернемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} a = \log_3(10x - x^2) \\ a \le 2 \end{cases} \to \log_3(10x - x^2) \le 2$$

$0 < 10x - x^2 \le 9$

$-9 \le x^2 - 10x < 0 \to \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \geq 9 \end{array}\right. \\ 0 < x < 10 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ 9 \le x < 10 \end{array}\right.$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

Задача 6

$\frac{16x - 16}{4x - 5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3.$

Пусть $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$, $g(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$y(x) = ax + b$

$f(x) \le y(x) \le g(x)$

1. $f(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} = \frac{4(4x-5) + 20 - 16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

Это график гиперболы с асимптотами $y = 4$ и $x = \frac{5}{4}$.

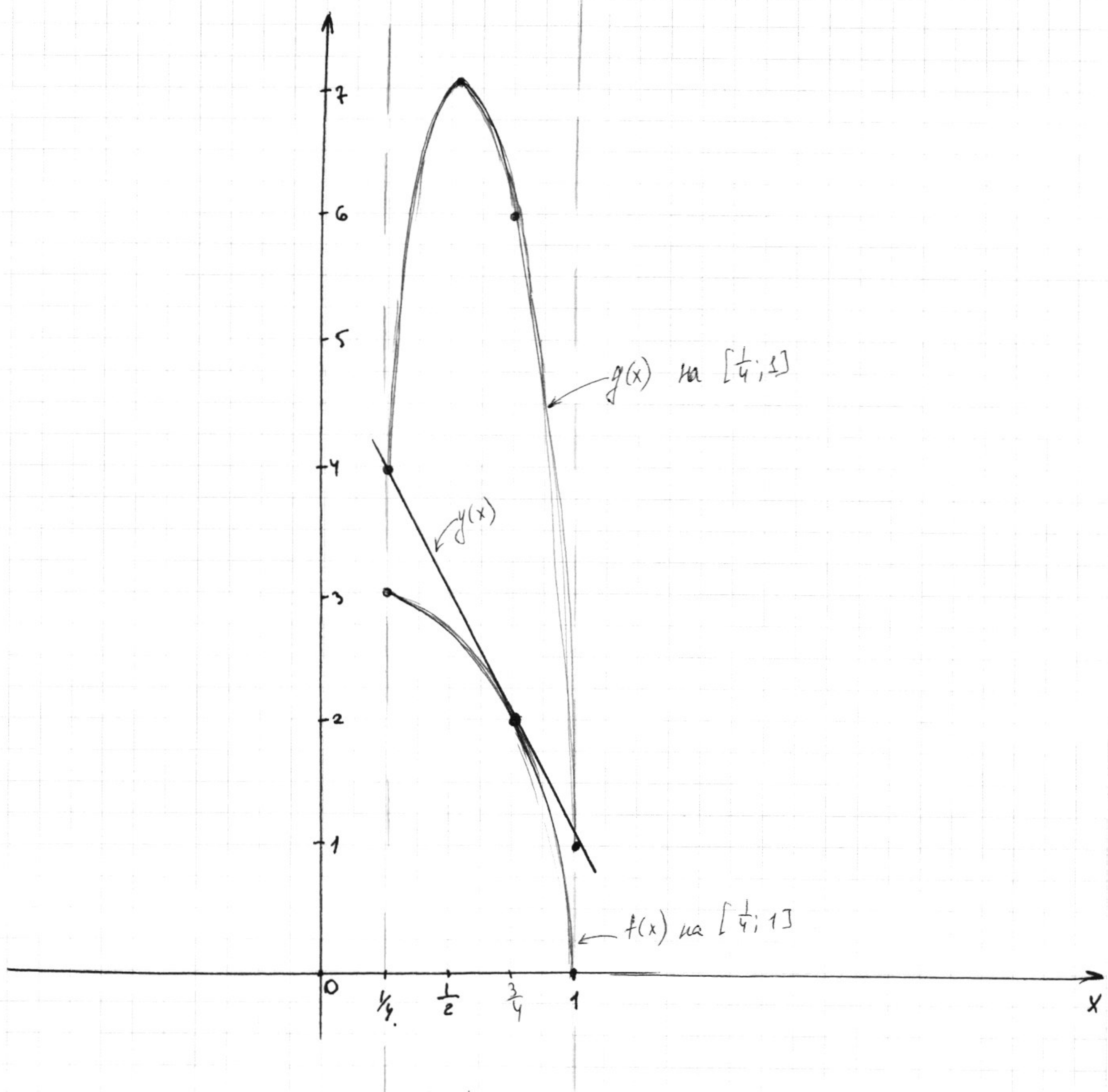
2. $g(x) = -32x^2 + 36x - 3.$

$x_в = -\frac{36}{2 \cdot (-32)} = \frac{4 \cdot 9}{4 \cdot 16} = \frac{9}{16}$. $g\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}.$

Это график параболы ветвями вниз, с вершиной в $\left(\frac{9}{16}; \frac{57}{8}\right)$

3. $y(x) = ax + b$

Это график прямой.



1. $y = ax + b$ ч/з $(1;1)$ и $(\frac{1}{4}; 4)$

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 4 = \frac{a}{4} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a = -3 \\ b = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

$y = -4x + 5$

Ответ: $(4;5)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

#6.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b$

$\frac{4(4x-5)+20-16}{4x-5} \le ax+b$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b$

$\frac{-12}{1-5}=3 \quad \frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

$\frac{8-16}{2-5}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$

$x \ne \frac{5}{4}$

$\frac{4}{4x-5}=1$

$4x-5=4$

$4x=9$

$x=\frac{9}{4}$

$-32x^2+36x-3=$

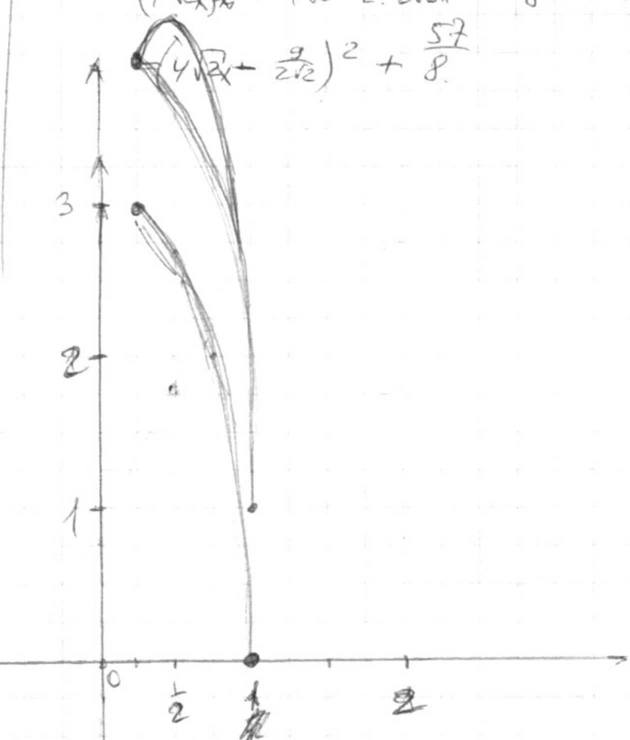
$=-(4\sqrt{2}x)^2+4\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{9}{2\sqrt{2}}x-\frac{81}{8}+\frac{81}{8}-\frac{24}{8}=$

$-(4\sqrt{2}x-\frac{9}{2\sqrt{2}})^2+\frac{57}{8}$

$\frac{81}{8}-\frac{24}{8}=\frac{57}{8}$

$\frac{36}{8\sqrt{2}}=\frac{9}{2\sqrt{2}}$

$\frac{81}{8}=10\frac{1}{8}$



$x=\frac{3}{4}$

$\frac{12-16}{3-5}=\frac{-4}{-2}=2$

$4+\frac{4}{4x-5}=0$

$4=-\frac{4}{4x-5}$

$4x-5=-1$

$4x=6$

$x=\frac{3}{2}$

$x_b=-\frac{36}{-32\cdot 2}=\frac{4\cdot 9}{4\cdot 16}=\frac{9}{16}$

$=\frac{8}{16}+\frac{1}{16}$

$-32+36-3=1$

$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=-2+9-3=4$

$-32\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{16}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=$

$=-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3=$

$=\frac{-81+81\cdot 2-24}{8}=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{8}=$

$=7\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

стр 1 done ✓

#1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin x+\sin y = 2\sin$

#2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2y(x-6)-1(x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)} & (1)\\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9-45=45 & (2)\end{cases}$$

(2) $(x-6)^2+(6y-3)^2 = 90 = 3\sqrt{10}$ ← окр.

(1) $x-12y \geq 0$

$x^2-24xy+144y^2 = 2xy-x-12y+6$

$\cancel{x^2-26xy+x+156y-6=0}$

$x^2+x-6-26y(x-6)=0$

$\cancel{x^2+(x-6)(1-26y)=0}$

$x^2-26xy+144y^2+x+12y-6=0$

$(x+ay+b)(x+cy+d) = x^2-26xy+144y^2+x+12y-6$

$x^2+xy\cdot c+xd+xy\cdot a+ac\cdot y^2+ay\cdot d+xb+bc\cdot y+bd$

$\cancel{x^2+ac\,y^2+xy(c+a)+xd+}$

$x^2+y^2\cdot ac+xy\cdot(c+a)+x\cdot(d+b)+y(ad+bc)+bd$

$ac=144$ $\quad a=18 \quad a=8$

$a+c=-26$ $\quad c=8 \quad c=18$ $\quad c^2+26c+144=0 \quad (26-c)c \quad c=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{1} = 13\pm5 \to c=18,\ c=8$

$b+d=1$ $\quad b=3 \quad / \quad b=-2$

$bd=-6$ $\quad d=-2 \quad / \quad d=3$ $\qquad (x-8y-2)(x-18y+3)=0 \ (1)$

$ad+bc=12$ $\quad -3\cdot8+2\cdot18 = 24-36=-12$

$da \quad bc$

$\frac{156}{14}\,\frac{|2}{78}$ $\quad 16$

$\overset{3}{26}\times6 = 156$

$13\times6 = 78$

$(x-8y-2)(x-18y+3) = x^2-18xy+3x-8xy+144y^2-24y-2x+36y-6 = x^2+144y^2-26xy+x+12y-6$

144×8

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ст. 2

done ✓

#3.

$$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$(10x - x^2)^{\log_3 4} + 10x - x^2 \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0$

~~Пусть $a = 10x - x^2$, $a > 0$~~

~~$a^{\log_3 4} + a \geq 5^{\log_3 a} > 0$~~

$a = 1$?

~~$\log_3 a \cdot \log_3 4$~~

~~$\log_3 (a^{\log_3 4} + a) \geq \log_3 a \cdot \log_a 5$~~

$5 = \log_3 3^5$

?

$$a^{\log_3 4} + a^{\log_3 3} \geq (a^{\log_a 5})^{\log_3 a}$$

$$a^{\log_3 3} \cdot (a^{\log_3 4 - \log_3 3} + 1) \geq a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a}$$

$$a \cdot (a^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1) \geq 5^{\log_3 a}$$

ст. 5.

1) $-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 0.$

$-tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$$

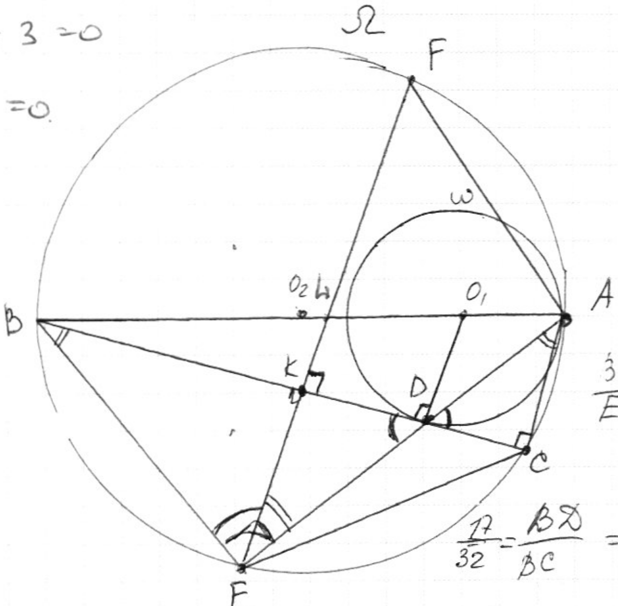
#4.

Ω и ω кас в (·) A внутр

AB - d Ω

BC - хорда Ω

BC кас ω = D



$\frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD}$

CD, BD

$\smile AF = \smile CE$

$BD = \frac{17}{2}$

$CD = \frac{15}{2}$

$BC = 16.$

$\frac{17}{32} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R_2 - R_1}{2R_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2R_2 - R_1}{R_2} = \frac{17}{16}$

$32R_2 - 16R_1 = 17R_2$

$16R_1 = 15R_2$

$R_1 = \frac{15}{16}R_2$

~~$\frac{ED}{DC} = \frac{BD}{DA}$~~

$AD \cdot ED = CD \cdot BD = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$\frac{R_2}{R_1} - 1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1}$

$\frac{ED}{AD} = \frac{AE - AD}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{R_1}{R_2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

стр 3

done ✓

#2 продолж.

(1) $\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-8y-2=0 \\ x-18y+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \to \begin{cases} x\geq 12y \\ \left[\begin{array}{l} x=8y+2, \; y\leq\frac{1}{2} \\ x=18y-3, \; y\geq\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$8y+2\geq 12y$
$2\geq 4y \to y\leq\frac{1}{2}$
$18y-3\geq 12y$
$3\leq 6y$
$y\geq\frac{1}{2}$

(2) $(x-6)^2+(6y-3)^2=90$
$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

а) $\begin{cases} x\geq 12y \\ x=8y+2 \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \to \begin{cases} x=8y+2 \\ y\leq\frac{1}{2} \\ (8y-4)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases} \to \begin{cases} x=8y+2 \\ y\leq\frac{1}{2} \\ 25(2y-1)^2=90 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x=8y+2 \\ 2y-1\leq 0 \\ (2y-1)^2=3{,}6 \end{cases} \to \begin{cases} x=8y+2 \\ 2y-1\leq 0 \\ 2y-1=-\sqrt{3{,}6} \end{cases} \to \quad 2y-1=-\frac{6}{\sqrt{10}}$

$90 \mid 5$, 18; $18 \mid 5$, 3

$\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}=3{,}6$

$\begin{cases} y=\frac{-6+\sqrt{10}}{2} \\ x=4(-6+\sqrt{10})+2=-22+4\sqrt{10} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\geq 12y \\ x=18y-3 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

$y\geq\frac{1}{2}$

$x=18y-3=15$

$(18y-9)^2+9(2y-1)^2=90=90\cdot(2y-1)^2$

$(2y-1)^2=1$

$2y-1=1$

$y=1.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

стр. 4

done ✓

Формулы

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$?

$\sin 45 + \sin 15 = 2\cdot\sin 30\cdot\cos 15 = \cos 15.$

$2 = \sin 90 + \sin 90 = 2\cdot\sin 90\cdot\cos 0 = 2\cdot1\cdot1 = 2$ ✓

$\sin 30 = 2\sin 15\cdot\cos 15 =$

$\frac{1}{4} = 4\cdot\sin^2 15\cdot(1-\sin^2 15)$

$16\cdot\sin^4 15 - 16\cdot\sin^2 15 + 1 = 0.$

$\sin^2 15 = \frac{8\pm\sqrt{64-16}}{}$

$\sin 15 = \sqrt{8-4\sqrt3} = 2\sqrt{2-\sqrt3}$

$\cos 15 =$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} =$

$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

1) $-\frac{1}{\sqrt5} = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta =$

$= \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}$

$-1 = \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha.$

2) $-\frac{1}{\sqrt5} = \ldots = \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}$

$-1 = \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha$

$-(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0.$ $\cos\alpha \neq 0$

$2\,tg\,\alpha + 3\,tg^2\alpha - 1 = 0.$

$3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

$f'(x) = \left(\frac{4}{4x-5}\right)' = 4\cdot\left(\frac{1}{4x-5}\right)' = 4\cdot\frac{-4}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2}$

$f'(x) = -4$

$\frac{4}{(4x-5)^2} = 1$

$(4x-5) = \pm 2$

$y = ax + 6.$

$7 = a + 6.$

$-32\cdot\frac{9}{16} + 27 - 3 = -18 + 24 = 6.$

$-32 + 86 - 3 = -35 + 36 = 1$

$y = -4x + 5 + y.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

#3 стр 5. продолж. done ✓

$a = \log_3(10x - x^2)$ $\quad (10x-x^2) = 3^{\log_3(10x-x^2)} = 3^a$

$(3^a)^{\log_3 4} + 3^a \geq 5^a$

$(3^{\log_3 4})^a + 3^a \geq 5^a$

$4^a + 3^a \geq 5^a$

$3^a + 4^a \geq 5^a \quad 2 > \left(\frac{5}{4}\right)^a$

$2 \cdot 4^a \geq 3^a + 4^a \geq 5^a$

$a < \log_{\frac{5}{4}} 2$

why? $\boxed{a \leq 2}$

$3\sqrt{3} + 4\sqrt{4} \geq 5\sqrt{5}$

$3\sqrt{3} + 8 \geq 5\sqrt{5}$

$>3 \quad <11$

$3\sqrt{3} + 8 > 5\sqrt{5}$

$27 + 64 + 48\sqrt{3} > 125$

$48\sqrt{3} > 34$

$22 \cdot 22 = 484$

$17 \cdot 17 = 289$

$1{,}7 \cdot 3 = 5{,}1$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$

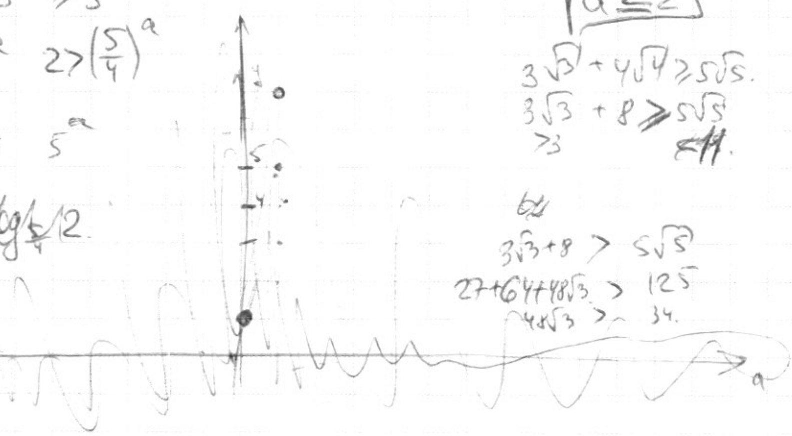
$3\sqrt{3} \approx 5{,}1$

$\sqrt{5} \approx 2{,}2$

$5\sqrt{5} \approx 11$

$64 + 27 = 91$

$125 - 91 = 34$



1. $a < 0$.

$3^{-\dots} + 4^{-\dots} \geq 5^{-\dots}$

$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$

$\frac{1}{16} > \frac{1}{25}$

2. $a = 0$

$1 + 1 \geq 1$ ✓

3. $0 < a < 1$. ✓

$\sqrt{3} + \sqrt{4} \geq \sqrt{5}$

$>1 \quad =2 \quad <3$

4. $a = 1$

$3 + 4 \geq 5$ ✓

5. $1 < a$ $\quad a = 2. \quad 9 + 16 = 25.$

$a \leq \log_5(3^a + 4^a)$

$a \leq 2.$

$\log_3(10x - x^2) \leq 2$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$-9 \leq x^2 - 10x < 0$

$\begin{cases} x(x-10) < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 10 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ 9 \leq x < 10 \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

#5. стр 6.

done ✓

$f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$ $\quad f(x) - f(y) < 0 \quad f(x) < f(y)$

$f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(2) = \cancel{[\frac{2}{4}]} = \cancel{[\ldots]} f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$154 + 49 = 203$

x	f(x)	
1	0	0
2	$[\frac{2}{4}]=0$	0
3	$[\frac{3}{4}]=0$	0
4	$f(2)+f(2)=0$	0
5	$[\frac{5}{4}]=1$	1
6	$f(2)+f(3)=0$	0
7	$[\frac{7}{4}]=1$	1
8	$f(2)+f(4)=0$	0
9	$f(3)+f(3)=0$	0
10	$f(2)+f(5)=1$	1
11	$[\frac{11}{4}]=2$	2
12	$f(3)+f(4)=0$	0
13	$[\frac{13}{4}]=3$	3
14	$f(2)+f(7)=1$	1
15	$f(3)+f(5)=1$	1
16	$f(2)+f(8)=0$	0
17	$[\frac{17}{4}]=4$	4
18	$f(2)+f(9)=0$	0
19	$[\frac{19}{4}]=4$	4
20	$f(4)+f(5)=1$	1
21	$f(3)+f(7)=1$	1
22	$f(2)+f(11)=2$	2
23	$[\frac{23}{4}]=5$	5
24	$f(4)+f(6)=0$	0
25	$f(5)+f(5)=2$	2

$f(x)=0$
$f(x)=0 \leftarrow 11$ чис
$=1 \leftarrow 7$ чис
$=2 \leftarrow 4$ чис
$=4 \leftarrow 2$ чис
$=5 \leftarrow 1$ чис.

$f(x)=0$	$11\cdot 14$	$=154$
$f(x)=1$	$7\cdot 7$	$=49$
$f(x)=2$	$4\cdot 3$	$=12$
$f(x)=4$	$2\cdot 1$	$=2$
		217 сл.

$17 \times 8 = 145$

$17 \times 15 = 185 + 17\ldots = 255$

$12 + 5 = 17$, $3+2=5$, $17+49 = 66$, $140 + 66 = 206$

$\frac{ED}{AD} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{\frac{1}{16}R_2}{\frac{15}{16}R_2} = \frac{1}{15} \Rightarrow AD = 15ED$

$AD\cdot ED = \frac{15\cdot 17}{4} = 15\cdot ED^2 = \frac{15\cdot 17}{4}$

$ED = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$R_1 = \frac{15}{16}R_2$

$BD = \frac{17}{2}$, $CD = \frac{15}{2}$. $BC = \frac{32}{2} = 16$.

$AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$ED = \frac{\sqrt{17}}{2}$ $\qquad AE = 8\sqrt{17}$

$\angle AO_1D = \angle ALE$
$\triangle AO_1D \sim \triangle ALE$
$\therefore L \equiv O_2$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)