МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Задача 2.

Преобразуем первое ур-ние.

$(y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$ и второе тоже

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$. Пусть $a = x-1$, $b = y-6$, тогда.

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$. Возведем первое уравнение в квадрат.

$b^2 + 36a^2 - 12ab = ab \Rightarrow b^2 + 36a^2 - 13ab = 0$. Ограничение на a и b:

$ab \geq 0$.

Решим квадратное ур-ние относительно b.

Получим $b = \frac{13a \pm 5|a|}{2}$.

Подставим во второе уравнение.

$9a^2 + \left(\frac{13a \pm 5|a|}{2}\right)^2 = 90$. $36a^2 + (13a \pm 5|a|)^2 = 360$.

$230a^2 \pm 130a|a| = 360$. Пусть $a \geq 0$, тогда $|a| = a$.

$230a^2 \pm 130a^2 = 360$. $a^2 = 1$ или $a^2 = 3{,}6$. Тогда $a = 1$ или $a = \sqrt{3{,}6}$

Пусть $a < 0$, тогда $|a| = -a$.

$230a^2 \mp 130a^2 = 360$. $a^2 = 1$ или $a^2 = 3{,}6$. Тогда $a = -1$ или $a = -\sqrt{3{,}6}$.

~~Тогда~~ Когда $a \geq 0$. $b = \frac{13a \pm 5a}{2}$. Когда брали решение с $+$ получим $a = 1$, тогда $b = 9$. Когда брали решени с $-$ то $b = 4 \cdot \sqrt{3{,}6}$ и $a = \sqrt{3{,}6}$

Когда $a < 0$, то $b = \frac{13a \mp 5a}{2}$ Когда брали решение с $+$, то $a = -1$, тогда $b = -4$. Когда брали решени с $-$ то $a = -\sqrt{3{,}6}$ тогда $b = -9\sqrt{3{,}6}$.

Получим следующие решение в a и b.

$(1; 9)$ $(\sqrt{3{,}6}; 4\sqrt{3{,}6})$ $(-1; -4)$, $(-\sqrt{3{,}6}; -9\sqrt{3{,}6})$

~~Перейдем к x и y~~.

Продолжение на странице 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

Отсюда $\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$. Тогда $\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\cos 2\alpha\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ отсюда. $\cos 2\alpha=\mp\left(\frac{1+\sin 2\alpha}{4}\right)$.

$\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha=1$. Тогда. $\frac{1}{16}\left(1+\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\right)+\sin^2 2\alpha=1$.

$17\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha-15=0$. Отсюда $\sin 2\alpha=\frac{-2\pm 32}{34}$.

Пусть $\sin 2\alpha=-1$. Тогда $\cos 2\alpha=0$. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=0$.

Откуда $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$. Из основного тригонометрического тождества.

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Получаем $tg^2\alpha=1$ и $tg\alpha=\pm 1$.

Пусть $\sin 2\alpha=\frac{15}{17}$. Тогда $\cos 2\alpha=\pm\frac{8}{17}$.

Пусть $\cos 2\alpha=\frac{8}{17}$ Тогда $2\cos^2\alpha-1=\frac{8}{17}$ Тогда $\cos^2\alpha=\frac{25}{34}$.

$tg^2\alpha+1=\frac{34}{25}$. $tg^2\alpha=\frac{9}{25}$ Откуда $tg\alpha=\pm\frac{3}{5}$

Пусть $\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$. Тогда $2\cos^2\alpha-1=-\frac{8}{17}$ Тогда $\cos^2\alpha=\frac{9}{34}$.

$tg^2\alpha+1=\frac{34}{9}$ $tg^2\alpha=\frac{25}{9}$. Откуда $tg\alpha=\pm\frac{5}{3}$.

Получаем 6 решений.

Ответ. ~~tg~~ $-\frac{5}{3}$; -1; $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; 1; $\frac{5}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2 Продолжение

~~$x = a+1$ $y = b+6$. Тогда получаем следующие решения~~

~~$x = 2$; 15. $(2; 15)$, $(1+\sqrt{3{,}6}; 6+4\sqrt{3{,}6})$, $(0; 2)$.~~

Подставим полученные a и b.

Заметим, что подходят только пары

$(1; 9)$ $(\sqrt{3{,}6}; 4\sqrt{3{,}6})$

Вернемся к переменным x и y.

$x = a+1$ $y = b+6$.

$x = 2$ $y = 15$ или $x = \sqrt{3{,}6}+1$, $y = 6+4\sqrt{3{,}6}$

Ответ: $(2; 15)$, $(\sqrt{3.6}+1; 4\sqrt{3{,}6}+6)$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ $\quad \boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

Пусть $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1.$

$\cos 2\alpha = \frac{-(1+\sin 2\alpha)}{4}$

$\cos 2\alpha = \frac{\pm(1+\sin 2\alpha)}{4}.$ $\qquad 1+\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 16\sin^2 2\alpha = 16$

$17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0.$

$\sin 2\alpha = \frac{-2\pm 32}{2\cdot 17}$ $\quad \sin 2\alpha = -1$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha = 0$ $\qquad \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$ $\qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos^2\alpha = \frac{1\pm\frac{8}{17}}{2} = \frac{17}{34} \pm \frac{8}{34} = \frac{17\pm 8}{34}.$

$\tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad \cancel{\tg^2\alpha = \frac{34}{17\pm 8}}$

$\boxed{\tg^2\alpha = 1}$

$b = \frac{13a \pm 5|a|}{2}.$ $\qquad b = \frac{13a + 5|a|}{2}$ $\quad a<0 \quad a=-1$

$b = \frac{-13a+5}{2} = -4.$

$\frac{4}{3x-2} + \ldots \geq 18x^2 - 51x + 30.$

$18x^2 - 39x + 8$

$2(3x-2)^2 - 27x + 24.$

$-27x + 18 + 6$

$9(3x-2) = 27x - 18$

$2t^2 - 9t + 6 \leq \frac{4}{t}$

$2t^3 - 9t^2 + 6t - 4 \leq 0.$

$230a^2 \mp 130a|a| = 360$

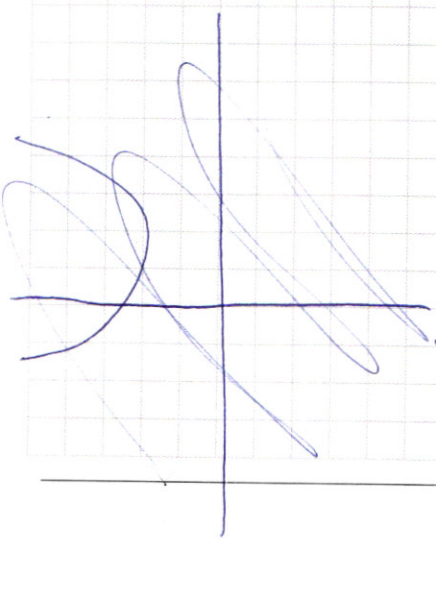
$360 = 169a^2 + 25a^2 \mp 130|a|\cdot a = 360.$

$b^2 + 9a^2 = 90.$ $\qquad b = \frac{13b \mp 5b}{2}$

$b^2 + 36a^2 - 13ab = 0$

$3(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$(y-6) - 6(x-1) = (x-1)(y-6)$



$18x^2 - 51x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 3 продолжение.

~~$0 \leq$~~ $0 < 26x - x^2 \leq 25.$

$$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(26 - x) > 0 \\ (x-25)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-26) < 0 \\ (x-25)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 26 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 25 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1. \\ 25 \leq x < 26 \end{cases}$$

Тогда $x \in (0; 1] \cup [25; 26).$

Ответ. $(0; 1] \cup [25; 26).$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}.$$

Пусть $t=26x-x^2$, тогда: Ограничение на t: $t>0$.

$|-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$. Тогда $|-t|=t$. Получаем.

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$. Воспользуемся следующим свойством. Пусть $a, b, c>0$, $a \neq 1$, тогда верно следующее. $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$. Тогда.

$t^{\log_5 12}=12^{\log_5 t}$ $t=t^{\log_5 5}=5^{\log_5 t}$. Тогда.

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$. Пусть $m=\log_5 t$ тогда неравенство принимает следующий вид.

$12^m+5^m \geq 13^m$. $13^m>0$, то поделим на 13^m.

$\left(\frac{12}{13}\right)^m+\left(\frac{5}{13}\right)^m \geq 1$. Заметим, что $f(m)=\left(\frac{12}{13}\right)^m+\left(\frac{5}{13}\right)^m$ — функция убывающая. С правой части неравенства константа. Значит неравенство переходит в равенство только один раз при $m=2$. Тогда решением неравенства является множество $m \in [-\infty; 2]$, ведь при $m \leq 2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^m+\left(\frac{5}{13}\right)^m \geq 1$, а при $m>2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^m+\left(\frac{5}{13}\right)^m<1$.

Тогда $m \leq 2$. вернемся к переменной t.

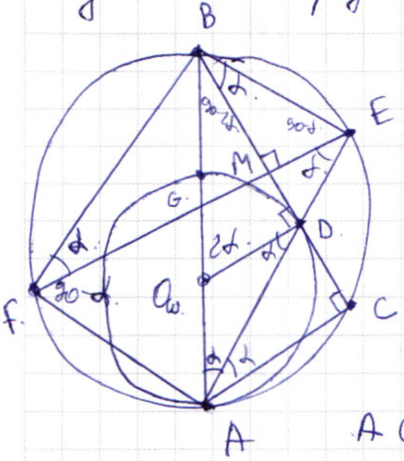
$\log_5 t \leq 2. \Leftrightarrow t \leq 25.$

Получаем, что $0<t \leq 25$.

Вернемся к переменной x. Получаем.

Продолжение на странице 5

Задача 4 продолжение.



Пусть угол $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ADO_\omega = \alpha$, — $\triangle O_\omega DA$ — р/б $O_\omega D = O_\omega A$ — радиусы.
$\angle O_\omega DA = \angle DAC = \alpha$ — $O_\omega D \parallel AC$ т.к. $O_\omega D \perp BC$ и $AC \perp BC$.

Проведем BE и BF. (Четырехугольник $ACEB$ — ~~впис~~ описанный $\Rightarrow$) $\angle CAE = \angle CBE$ — вписанные в Ω, опираются на $\breve{EC}$. Угол $\angle BO_\omega D = 2\alpha$ — внешний треугольника $\triangle ADO_\omega$. Тогда $\angle ABC = 90 - 2\alpha$.
Тогда угол $\angle ABE = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$. $\angle EFA = \angle EBA = 90 - \alpha$ — вписанные, опираются на дугу $\breve{AE}$ $\angle AFE = 90 - \alpha$ Найдем $\angle \alpha$. Рассмотрим $\triangle ABC$. $\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{2R} = \frac{25 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{5}{13}$.
Найдем $\sin\alpha$. ~~(Пусть $t = \sin\alpha$, тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$~~
~~$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. $\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ $\frac{5^2}{13^2} = 2^2 \cdot t^2(1-t^2)$).~~
~~Решим квадратное уравнение относительно t. угол $\alpha < \pi$, тогда $\sin\alpha > 0$ $\sin\alpha = \sqrt{\frac{12}{13}}$)~~ $\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$.
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ откуда $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ Тогда $\cos(AFE) = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ тогда $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

Ответ. $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

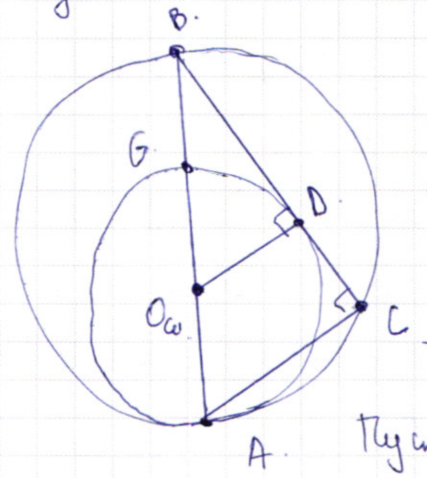
$\angle BFE = \angle BAE = \alpha$ вписанный Ω опирается на дугу $\breve{BE}$
$\angle CBE = \angle CAE = \alpha$ вписанный в Ω опирается на дугу $\breve{EC}$.
$\angle BEA = 90^\circ$ — AB — диаметр. $\angle BEF = 90 - \alpha$. — $\triangle BEM$ — прямоугольный. — $EM \perp BC$. тогда $\angle FEA = \alpha = 90 - (90 - \alpha)$
Рассмотрим $\triangle AFE$: $\angle F = 90 - \alpha$, $\angle E\,\alpha$, тогда угол $\angle A = 90^\circ$. $\triangle AFE$ — прямоугольный.

Продолжение на странице. 8

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Заметим, что на AB лежит как центр большей окружности, так и малой окружности. Пусть AB пересекает повторно окружность ω в точке G, тогда AG — диаметр. Пусть центр окружности ω — O_ω. Пусть радиус $\omega - r$, $\Omega - R$. тогда.

Т.к. BD касательная, то $BD^2 = BG \cdot BA$. по теореме о пересекающихся хордах (ну или степень точки B относительно ω). По условию $BD = 13$. $BG = 2R - 2r$, $AB = 2R$. Тогда $4R(R-r) = 169$. Проведем $O_\omega D$ и AC.

$\angle BDO_\omega = 90°$ — угол между радиусом и касательной, $\angle BCA = 90°$ — угол, опирается на диаметр. Тогда треугольники $\triangle BO_\omega D$ и $\triangle BAC$ — подобны по двум углам. $\angle B$ — общий, $\angle D = \angle C = 90°$.

Получаем $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_\omega}{BA}$ $\quad \frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 26R = 50R - 25r \Rightarrow$

$\Rightarrow 24R = 25r \Rightarrow R = \frac{25}{24}r$. Тогда.

$4 \cdot \frac{25}{24}r \cdot \frac{1}{24}r = 169. \Rightarrow r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{5^2} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 12}{5}$. $\quad R = \frac{13 \cdot 12}{5} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5 \cdot 13}{2}$.

Ответ: радиусы окружностей ω и Ω $\frac{13 \cdot 12}{5}$ и $\frac{5 \cdot 13}{2}$ соответственно.

Продолжение на странице 7

Задача 4 Продолжение

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{26}}$. Рассмотрим $\triangle$ BED. $\angle E = 90°$.

$BE = BD\cos\alpha = 13\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\cdot 5$.

Найдем. EA. Рассмотрим $\triangle ABE$. $\angle E = 90°$.

По теореме Пифагора. $EA = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 25\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Найдем $tg\,\alpha$. $tg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5$.

Рассмотрим $\triangle$ AFE. – прямоугольный. $AF = \frac{AE}{tg\,\alpha} = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$

Тогда $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}\cdot 5\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} = 125\cdot\frac{13}{4}$

Ответ. $S_{\triangle AFE} = 125\cdot\frac{13}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9a^2+b^2=90$ $\quad b-6a=\sqrt{ab}$. $\quad$ $b^2+36a^2-13ab=$

$b^2+9a^2-90=0$

~~$6(b-6a)^2=90$~~

~~$(9a-b)^2=90-6(b-6a)^2$~~

$\sqrt{169a^2-144a^2}=5|a|$

~~$27a^2-130b+90=0$~~

$b=9a$ или $4a$.

$b=\frac{13a\pm 5|a|}{2}$

~~$b=4a$ или $9a$~~

$b=9a$ или $b=4a$

$a^2=\frac{18}{5}$

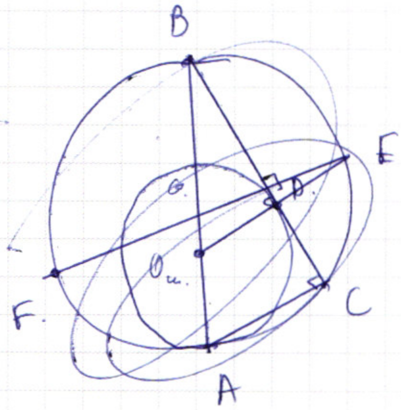
$90a^2=90$ $\boxed{a=\pm 1}$ $\quad 25a^2=90.$

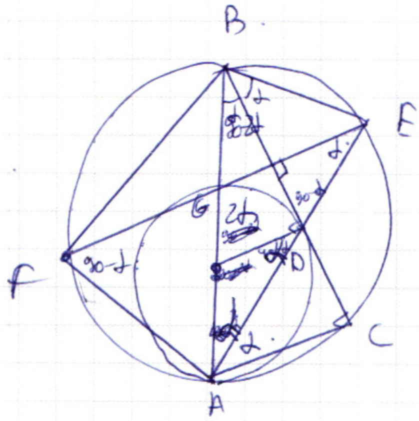
$a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$b=\pm 9$ $\quad b=\pm 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$.

$c, b, a>0,\ a\neq 1$





$12^x+5^x-13^x\geq 0.$

$\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x-1\geq 0.$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

$f(x)=12^x+5^x-13^x\geq 0$

$f'(x)=12^x\ln 12+5^x\ln 5-13^x\ln 13$

$\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x\geq 1$

$f(x)=1-\left(\frac{5}{13}\right)^x-\left(\frac{12}{13}\right)^x$

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2\beta)+\sin(x-2\beta)=-\frac{2}{17}$

$2\sin x\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{17}$.

$\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\cos 2\alpha\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1$

$\cos 2\alpha=\frac{-1-\sin 2\alpha}{4}$

$\cos^2 2\alpha=\frac{1}{16}+\frac{\sin^2 2\alpha}{16}+8\sin\alpha$

$17\sin^2\alpha+2\sin\alpha-15=0.$

$\frac{17\sin^2\alpha}{16}+\frac{2\sin\alpha}{8}=\frac{15}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 5 продолжение.

Получаем 9 чисел -0, 8 чисел -1, 3 числа -2, 2 числа -3, 2 числа 4, 1 число 5.

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

Нужно чтобы $f(x)$ был меньше $f(y)$.

Посчитаем кол-во пар таких чисел.

Если $f(x)=0$, то $f(y)$ может равняться 1, 2, 3, 4, 5.

Тогда всего способов. $9\cdot16$.

Если $f(x)=1$, то $f(y)$ может равняться 2, 3, 4, 5.

Тогда всего способов $8\cdot8$.

Если $f(x)=2$, то $f(y)$ может равняться 3, 4, 5

Тогда способов $3\cdot5$

Если $f(x)=3$, то $f(y)$ может равняться 4, 5.

Тогда способов $2\cdot3$.

Если $f(x)=4$, то $f(y)$ может равняться 5.

Тогда способов $2\cdot1$.

Всего пар $(x;y)$ $\quad 9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=231$

Ответ 231

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$. Пусть $a=1$, $b=1$, тогда

$f(1)=2f(1)$, тогда $f(1)=0$.

Пусть $b=\frac{1}{a}$, тогда $f(a\cdot\frac{1}{a})=f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})=0$, тогда

$f(a)=-f(\frac{1}{a}) \Leftrightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$.

Найдем значение функции при $x\in[1;28]$, $x\in\mathbb{N}$

$f(1)=0$. $f(2)=[\frac{2}{4}]=0$. (2-простое). $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$ (3-простое).

$f(4)=f(2)+f(2)=0$. $f(5)=[\frac{5}{4}]=1$ (5-простое). $f(6)=f(2)+f(3)=0$.

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$ (7-простое). $f(8)=f(4)+f(2)=0$. $f(9)=f(3)+f(3)=0$. $f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=[\frac{11}{4}]=2$ (11-простое). $f(12)=f(6)+f(2)=0$ $f(13)=[\frac{13}{4}]=3$ (13-простое)

$f(14)=f(7)+f(2)=1$ $f(15)=f(3)+f(5)=1$ $f(16)=f(8)+f(2)=0$ $f(17)=[\frac{17}{4}]=4$ (17-

$f(19)=[\frac{19}{4}]=4$ (19-простое).

-простое). $f(18)=f(9)+f(2)=0$. $f(20)=f(10)+f(2)=1$ $f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$ $f(23)=[\frac{23}{4}]=5$ (23-простое) $f(24)=f(12)+f(2)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$ $f(26)=f(13)+f(2)=3$ $f(27)=f(9)+f(3)=0$ $f(28)=$

$=f(7)+f(4)=1$. Запишем в таблицу значения от 4 до 28.

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
4	0	10	1	16	0	22	2	28	1
5	1	11	2	17	4	23	5		
6	0	12	0	18	0	24	0		
7	1	13	3	19	4	25	2		
8	0	14	1	20	1	26	3		
9	0	15	1	21	1	27	0		

Продолжение на странице 10

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 6.

Пусть $u(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$ $v(x)=18x^2-51x+28$.

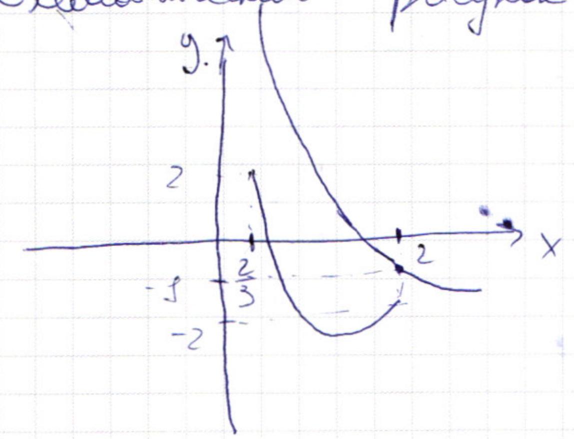
$v\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=2$. $v(2)=18\cdot4-102+28=-2$.

вершина параболы $v(x)$ ~~при~~ $x_в=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$u(x)$ – гипербола.

$u(x)=\frac{4-6x+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$. $u(2)=-1$

Схематический рисунок



Отметим крайние положения. К примеру, когда $ax+b$ касается гиперболы. $u'(x)=-\frac{12}{(3x-2)^2}$ При $x=2$. $u'(x)=-\frac{12}{16}=$

$=-\frac{3}{4}$. Тогда если $a=-\frac{3}{4}+0$. решение не подходит так как ~~пр~~ прямая с наклоном $a=-\frac{3}{4}$ проходящая через $(2;-1)$ пересекает параболу

Когда точка проходит через $\frac{2}{3};2$ и $2;-2$.

$a=-3$. ~~b~~ ~~$\frac{2}{3}\cdot(-3)+2$~~ $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{-3}+b=2$ ~~b=~~ $b=2+\frac{2}{9}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

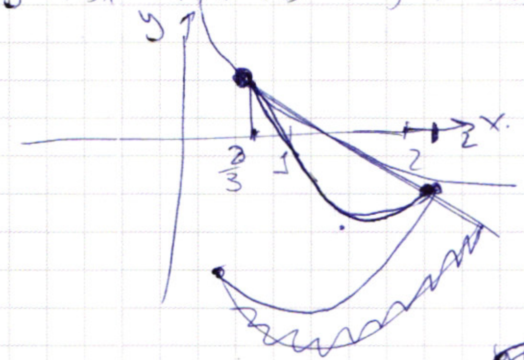
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 18x^2 - 51x + 28$ $\quad y(0) = 28 \quad y(1) = -5 \quad y(2) = -2$ $\quad \cancel{72 - 102 + 28}$



$x = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$ $\quad y\left(\frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2.$

$\frac{4}{3x-2} - 2.$

$y(2) = -8$

$y(x) = \frac{4}{3x-2} - 2.$

$y\left(\frac{2}{3}\right)$

$y(2) =$

$-3.$

$y(x) = \frac{4}{3x-2}$

$y(x)' = -\frac{3 \cdot 4}{3x-2} = -3.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$. $\quad |x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$
$f(25)=2$
$f(26)=2$
$f(27)=0$
$f(28)=1$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $\quad t=26x-x^2>0$

$f(x)-f(y)<0$ $\quad |-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5(t)}$

9–0. 8–1 3–2 2–3 2–4 1–5

$9\cdot16+8\cdot8+2\cdot3+2$.

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\log_b c=\log_c \log_b a$

$\frac{1}{\log_b a}=\log_b a$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$.

$\log_b c=\log_a c$ $\quad \log_b a\cdot\log_a c$.

$\log_b\frac{c}{a}=\log_a c$.

$\log_b\frac{c}{a}=\frac{\log_b c}{\log_b a}$.

$12^{\log_5|t|}+t\geq 13^{\log_5 t}$.

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 t\leq 2$.

$t\leq 25$.

$26x-x^2\leq 25$

$x^2-26x+25\geq 0$.

$\frac{144}{64}=208$ $\quad +\frac{208}{23}$ $\quad 231$

$9a^2+b^2=90$ $\quad b^2+36a^2-12ab=ab$.

$b-6a=\sqrt{ab}$.

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$R=\frac{13\cdot12}{5}$ $\quad r=\frac{13\cdot12}{5}$ $\quad \frac{5\cdot13}{2}$

$4(R^2-rR)=169$

$2(R-r)\cdot2R=13^2$

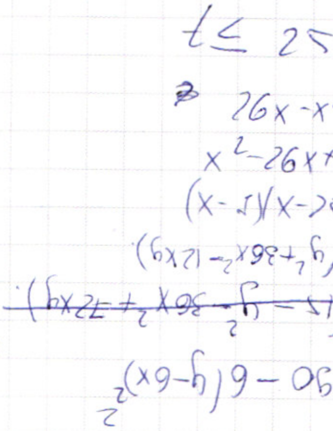
$R=\frac{25}{24}r$.

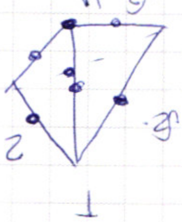
$25r=24R$.

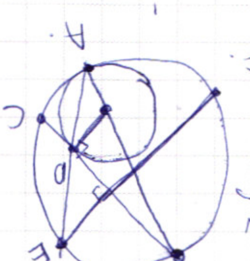
$\frac{r}{12}=\frac{2R}{25}$

CD=12 BD=13.

$25\cdot13^2-\frac{25\cdot13}{2}=\sqrt{25\cdot13}$







черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\boxed{0<x<26}$

$\sin(x+2\beta)+\sin(x-2\beta) = -\frac{2}{17}$ $\qquad$ $x\le 1$ $\quad$ $x\ge 25$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \cancel{\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta\right)} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \cancel{\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta\right)} = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\qquad$ $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $(0;1]\cup[25;26)$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 1 = \mp 4\cos 2\alpha$ $\qquad$ $\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1.$

$\sin^2 2\alpha + 1 + 2\sin 2\alpha = 16\cos^2 2\alpha = 16 - 16\sin^2 2\alpha$

$17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0.$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4+60\cdot 17}}{17}$ $\qquad$ $4\cdot17\cdot60$ ... $1024 = 32$

$\sin 2\alpha = \frac{-2\pm 32}{34}$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = -1$ $\quad$ $\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$

~~$\cos 2\alpha = 0$~~

$-\frac{1}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \frac{1}{4} = 0$ $\qquad$ $+\frac{1}{4} = \sin^2\alpha - \sin^4\alpha.$

$\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ $\quad$ $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}.$

$\sin\alpha = \frac{-2\mp 32}{34}$

~~$4+60\cdot17$~~

~~$(3x-y+3)^2 = 90-6(y-6x)$~~

$(3x-3-y+6)^2 = 90-6(y-6x)$

~~$(y-6x)^2 \cdot 3(x-3)(y-6)$~~

$9(x-3)^2+(y-6)^2 = 90$ $\qquad$ ~~$9(x-1)^2+(y-6)^2$~~

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 90$ $\qquad$ ~~$9x^2-18x+9+y^2-12y+36$~~

$y-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)} = y-6x$

$y = \sqrt{6-y}$ $\quad$ $y=2.$ $\quad$ $4-48=45$

$f(0) = f(0)$ $\quad$ $f(1) = f(1)+f(1)$ $\quad$ $\boxed{f(1)=0}$ $\quad$ $\boxed{f(2)=0}$ $\quad$ $f(4)=0$ $\quad$ $f(8)=0$

$f(3)=0$ $\quad$ $f(6)=0$ $\quad$ $f(9)=0$ $\quad$ $f(12)=0$ $\quad$ $f(15)=1$ $\quad$ $f(5)=1$

$-2+\frac{4}{3x-2} \ge ax+b \ge 18x^2-51x+28$

$\frac{4}{3x-2} \ge ax+b+2 \ge 18x^2-51x+30 \ge 0$ $\qquad$ $3(6x^2-17x+10)$

$ax+b \ge 18x^2-51x+28$ $\qquad$ $18x^2-(51+a)x+28-b\le 0.$

$\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$ $\quad$ $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ $\quad$ $\frac{12}{13} = 1-2\sin^2\alpha$ $\quad$ $\sin^2\alpha = \frac{1}{26}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{26}$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\frac{5^2}{13^2 2^2}t^2 + \frac{5}{13^2 2^2}t - 1 = 0.$

$f(\alpha) = (\alpha-1)\frac{5^2}{13^2 2^2}$ $\quad$ $\sin^2\alpha/(\sin^2\alpha - 1) = \frac{5^2}{13^2 2^2}$

$\frac{12}{13}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad$ $= 1 + \frac{15}{8}$

☑ черновик $\qquad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)