МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$ ОДЗ: $10x - x^2 > 0$; $\neq 1$

$x(10-x) > 0$

$10x - x^2 > 0$ из ОДЗ.

тогда модуль $|x^2 - 10x|$ можно раскрыть только одним способом:

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x - x^2)} \geqslant 0$

$t = 10x - x^2$; $t > 0$

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geqslant 0$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geqslant 0$

Заметим, что данное неравенство равно нулю, когда $t = 9$:

$9^{\log_3 3} + 9^{\log_3 4} - 5^{\log_3 9} \geqslant 0$

$9 + 16 - 25 \geqslant 0 \Rightarrow 0 \geqslant 0$

функция $t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geqslant 0$ на отрезке $t \in [0; 9]$; на $t > 9$ функция равна нулю и убывает до $-\infty$ на $t \in [9; +\infty)$, да функция убывает и на числах $t < 9$; Но это не важно, т.к. на $t \in (0; 9]$ неравенство выполняется.

$10x - x^2 = t$

$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leqslant 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x(10-x) \geqslant 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(10-x) > 0 & x \in (0; 10) \\ (x-1)(x-9) \geqslant 0 & x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}$

$10x - x^2 \neq 1$ (из ОДЗ)

$x^2 - 10x + 1 \neq 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 1 = 24$

$x_{1,2} \neq 5 \pm 2\sqrt{6}$ $(2\sqrt{6} > 4;\ 2\sqrt{6} < 5)$

Ответ: $x \in (0; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 - 2\sqrt{6}; 1] \cup [9; 5 + 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6\geq 0$

$-32\cdot\frac{9^2}{16^2}+36\cdot\frac{9}{16}-3=-\frac{81}{8}+\frac{18\cdot 9}{8}-3$

$=\frac{18\cdot 9-81}{8}-3$

$\frac{162-81}{8}=\frac{81}{8}-3$

$=+$

$10{,}125-3$

$(x-12y)^2=2xy-12y+x+6$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y+x+6$

$-3\;36\cdot 3y^2-12x-36y-2xy+12y-x-6=45$

$108y^2-2xy-24y-13x-51=0$

$D=(-2x-24)^2+4\cdot 108(13x+51)=4x^2+96x+4\cdot 108\cdot 13+$

$x-12y=a$ $\quad a+b=2x$ $\quad a-b=b-a=24y$

$x+12y=b$

$\frac{(a+b)(b-a)}{24}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0\;;\;10x-x^2\neq 1$

$x(10-x)>0$

$x\in$

$x_B=$

$\cancel{10x-x^2}<0$

$\cancel{10x^2}-10x<0$

$\frac{16x-16}{4x-5}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$

$x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

$-32\cdot\frac{1}{4}$

$-32+70-3=1$

$-32\cdot\frac{9}{16}+36\cdot\frac{3}{4}-3=-18+27-3=6$

$4\cdot 20=80$

$-32+36-3=1$

$-32\cdot\frac{9}{16}=2\cdot 9=18$

$36\cdot\frac{9}{16}=\frac{4\cdot 9\cdot 9}{4\cdot 4}=\frac{81}{4}=20{,}25$

$-32\cdot\frac{1}{16}=-2;\quad +36\cdot\frac{1}{4}=9$

$-32\cdot\frac{9}{16}+36\cdot\frac{9}{16}-3$

$-2+9-3=4$

$20{,}25-21=-0{,}75$

$-32\cdot\frac{1}{4}$

$-8\frac{16^2}{}+36\cdot\frac{9}{?}=18$ $\quad \cancel{-8+18}-3=7$

$-8+18-3=7$

$-18+\frac{9\cdot 9}{4}-3=\frac{81}{4}-21$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$2 \leq x; y \leq 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

Запишем таблицу $f(x)$:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(x)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

x	24	25
$f(x)$	0	2

Посчитаем кол-во таких пар $(x; y)$ ~~что~~ f ~~x~~, ~~таких~~ что $f(x) - f(y) < 0$.

посчитаем сколько раз встречаются значения $f(x) = 5; 4; 3; 2; 1; 0$

$f(x)$	5	4	3	2	1	0
кол-во	1	2	1	3	7	10

когда $f(x) = 5$; $f(y) \leq 4$

$1 \cdot (2+1+3+7+10) = 23$

аналогично $f(x) = 4$; $f(y) \leq 3$

$2 \cdot (1+3+7+10) = 42$

$1 \cdot (3+7+10) = 20$

$3(7+10) = 51$

$7 \cdot 10 = 70$

Ответ: $\overbrace{23+42}^{65}+\overbrace{20+51}^{71}+70 = 206$ (141)

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3 \qquad x \in [\tfrac{1}{4}; 1]$$

$4x-5 \neq 0$; $x \neq \frac{5}{4}$

Построим графики 1) $y=\frac{16x-16}{4x-5}$; 2) $y=-32x^2+36x-3$

1)

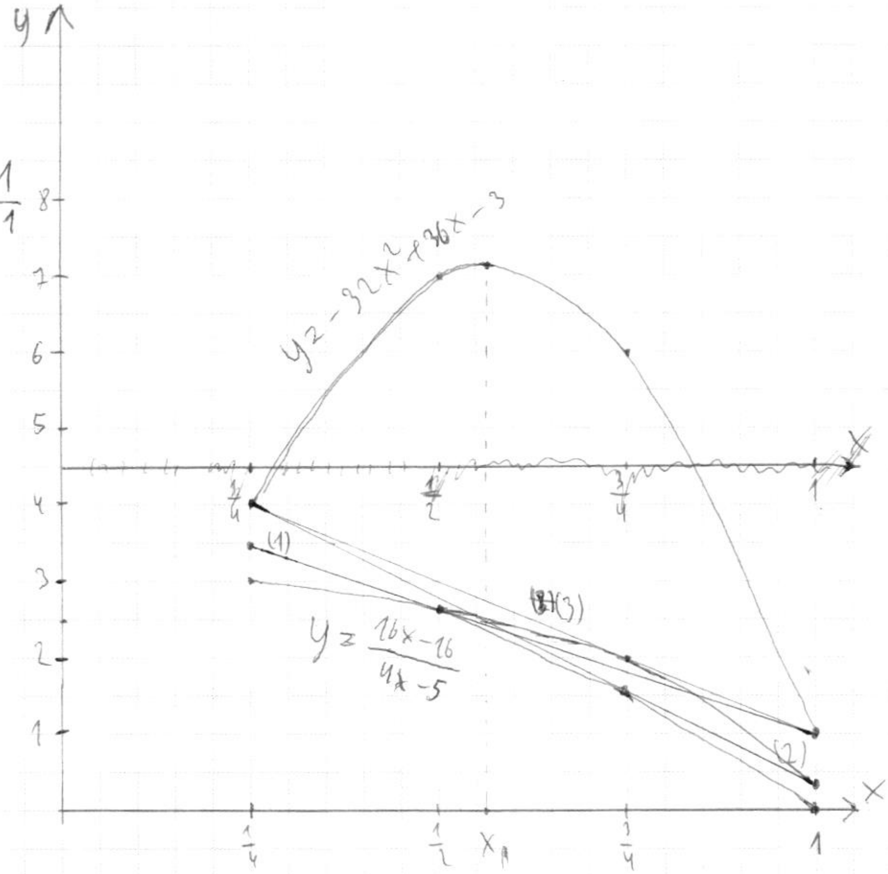
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	3	$\frac{8}{3}$	2	0

2)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	4	7	6	1

$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2\cdot 32^2} = \frac{9}{16}$

$y_B = 7{,}125$



$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

Достаточно рассмотреть 3 прямые:

1) касается графика $y=\frac{16x-16}{4x-5}$ и пересекает $y=-32x^2+36x-3$ в точке $x=1$

2) касается графика $y=\frac{16x-16}{4x-5}$ и пересекает $y=-32x^2+36x-3$ в точке $x=\frac{1}{4}$

3) пересекает график $y=-32x^2+36x-3$ в точках $x=\frac{1}{4}$; $x=1$

1) $kx+b = -32x^2+36-3 = 1$ (при $x=1$)

$k+b=1 \Rightarrow \cancel{k=}$

~~(страница 1 продол~~

$y_k = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ уравнение касательной

№ 6

$y = \frac{16x-16}{4x-5}$

$y' = \frac{(16x-16)'(4x-5) - (4x-5)'\cdot(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{16(4x-5) - 4(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{16\cdot(-5) - (-4\cdot 16)}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2}$

2) $\left.\begin{array}{l} a\cdot\frac{1}{4} + b = 4 \\ a\cdot 1 + b = 1 \end{array}\right| \Rightarrow a = -4$; $-4\cdot 1 + b = 1 \Rightarrow b = 5$

~~$b \leq 5$; a~~

1) $\left.\begin{array}{l} ax + b = y_k(x) \\ a\frac{1}{4} + b = 4 \end{array}\right| \Rightarrow a\frac{1}{4} + b = 4 = y_k(\tfrac{1}{4}) = f(x_0) + f'(x_0)(\tfrac{1}{4} - x_0)$

$y_k = \frac{16\cdot t - 16}{4t-5} + \frac{-16}{(4t-5)^2}(\frac{1}{4} - t) = 4$

$\frac{(16t-16)(4t-5) - 16\cdot\frac{1-4t}{4}}{(4t-5)^2} = 4$

$\frac{(16t-16)(4t-5) - 4 + 16t}{(4t-5)^2} = \frac{4(4t-5)^2}{(4t-5)^2}$

$\frac{(16t-16 - 4(4t-5))(4t-5) - 4 + 16t}{(4t-5)^2} = 0 \Rightarrow 4(4t-5) - 4 + 16t = 0 \Rightarrow 32t - 4 - 20 = 0$

$t = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ (точка касания) ; $b = 5$; $a = -4$ совпадает с (2)

~~при a~~ (Тогда есть только одна пара $a = -4$; $b = 5$

~~2) аналогично $a x + b$ - проходящий через (1; 1) и пересекающий параболу~~

~~$a\cdot 1 + b = 1$~~ $= y_k(x)$

~~$y_k(1)$~~

~~$y_k(1 t) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ $+ \frac{16t-16}{4x-5} - \frac{16}{(4t-5)^2}(x1 - t) = 1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$~~

~~Ответ: $a =$~~

$\boxed{\text{Ответ: } a = -4;\ b = 5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 (продолжение)

$AH = \frac{255}{16} \cdot \left(1 + \frac{15}{17}\right) = \frac{15 \cdot \cancel{17}}{16} \cdot \frac{32}{\cancel{17}} = 15 \cdot 2 = 30$

$tg \angle BEA = tg \angle HAD = \frac{DH}{AH} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$\angle BAFE = \frac{\cup BA - \cup BE}{2} = 90° - \angle \cancel{HAD}EAB = 90 - arctg \frac{2}{15}$

$\angle AFE = arctg \frac{15}{2} ; = arcctg \frac{2}{15}$

$\frac{\sin HAD}{\cos HAD} = tg HAD = \frac{2}{15}$

$15 \sin HAD = 2 \cos HAD$

$\sin HAD = \frac{2}{15} \cos HAD$

$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{4}{225} \Rightarrow 229x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{229}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{15}{\sqrt{229}}$

~~$BE = AB \sin\beta = 34 \cdot AE = AB \cdot \cos\beta = 34 \cdot \frac{15}{\sqrt{229}}$~~

$BE = AB \sin\beta = 34 \cdot \frac{2}{\sqrt{229}}$

EL

N1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

$\Downarrow$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Разложим (1)

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

а) $\sin 2\beta > 0$:

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-2\cos 2\alpha \quad (\ )^2$

~~$\sin 2\sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha - 1$~~

$1-\cos^2 2\alpha = 4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1$

$5\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha(5\cos 2\alpha + 1) = 0$

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = u$

$\Downarrow$

1) $\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2} = \pm 1 \quad \Leftarrow$

$2u = 1+u^2 \Rightarrow u^2-2u+1=0$

$(u-1)^2=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1$

2) $\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2} = -1$

$2u = -1-u^2 \Rightarrow u^2+2u+1=0$

$(u^2+1)=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1$

3) $\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2} = +\frac{\sqrt{24}}{5}$

$2u = \frac{\sqrt{24}}{5} + u^2\cdot\frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow \sqrt{24}u^2 - 10u + \sqrt{24} = 0$

$u_{1,2} = \frac{6}{\sqrt{24}};\ \frac{4}{\sqrt{24}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{\sqrt{24}};\ \frac{4}{\sqrt{24}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Дано: Ω и ω окружности $A = \Omega \cap \omega = A$; AB - диаметр; Ω; $BC \cap \omega = D$;

луч $AD \cap \Omega = E$; $EF \perp BC$; $E \in$; $F \in \Omega$; $CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

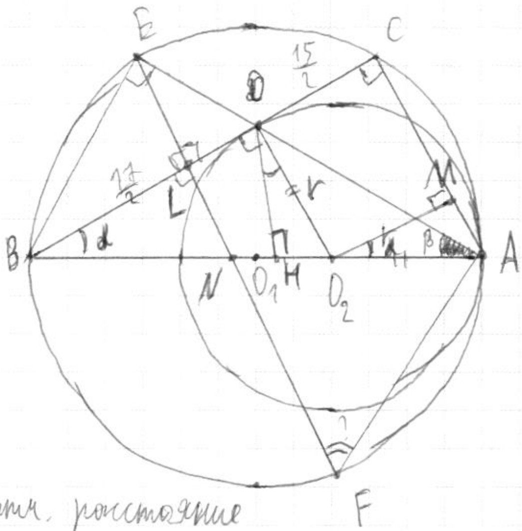
Найти: $\angle AFE = ?$ $r = ?$ $R = ?$, $S_{\triangle AFE} = ?$;

Решение: $BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16$

$\angle BDO_2 = 90°$ (BD - касат.)

$\angle BCA = 90°$ (AB - диаметр)

~~$EF \perp BC$~~



$\angle CBA = \alpha$

$tg\alpha = \frac{r}{BD}$

$\cos\alpha = \frac{DC}{r}$ ($DC = O_2M$ как кратч. расстояние между $DO_2 \parallel AC$)

$r = tg\alpha \cdot BD$, $r = \frac{DC}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} BD = \frac{DC}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha\, BD = DC$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{DC}{BD} = \cancel{\frac{17}{15}}\ \frac{15}{17}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \pm\frac{8}{17}$ $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{8}{17}$ (т.к. ~~тр~~ $\triangle ABC$ - прямоугол.)

$AB = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{16}{\frac{8}{17}} = \frac{17 \cdot 16}{8} = 2 \cdot 17 = 34 \Rightarrow R = \cancel{17}\ \frac{AB}{2} = 17$

$r = \frac{DC}{\cos\alpha} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{8}{17}} = \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 8} = \frac{255}{16}$

Опустим DH высоту на AB: $DH = BD \cdot \cos\alpha = \frac{17}{2} \cdot \frac{8}{17} = 4$

$\angle HDO_2 = \alpha$ (треугольники $\triangle BDO_2 \sim \triangle DHO_2$ по ~~осн~~ общему острому (углу))

$DHA = HO_2 + O_2A = \sin\alpha \cdot r + r = r(1 + \sin\alpha)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 ~~продолжение~~

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4) $\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2} = -\frac{\sqrt{24}}{5}$ №1 продолжение

$\frac{\sqrt{24}}{5}u^2 + 10u + \frac{\sqrt{24}}{5} = 0$

$u_{1,2} = -\frac{6}{\sqrt{24}}; -\frac{4}{\sqrt{24}}$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 1; -1; \frac{-6}{\sqrt{24}}; \frac{-4}{\sqrt{24}}; \frac{4}{\sqrt{24}}; \frac{6}{\sqrt{24}}$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

ОДЗ $2xy - 12y - x + 6 \geq 0$

$a = x - 12y$

$b = x + 12y$

$a^2 = \frac{(a+b)(a-b)}{24} - b + 6$

$b^2 - (b-a)\cdot 4{,}5 - (a+b)\cdot 12 - \frac{(b-a)^2}{}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + 9^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 ?=1}$ допустим $10x - x^2 = 9$ $x = 9; 1$

$90 + 16 \geq 81 + 25$ $(\log_3 9 = 2)$ $x^2 - 10x + 9 = 0$

$10 + 1 \geq 1 + 1$ $\frac{D}{4} = \cancel{25 - 4 \cdot 3 = 25 - 12} = \frac{b}{4} - ac = 25 - 9 = 16$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x - x^2)} \geq 0$

$x = -45 \pm 4 = 9; 1$

$\cancel{(10 \cdot 9 - 81)} + 9 + 916 - 5^2 \geq 0$

$9 + 16 - 5^2 \geq 0$

$x^2 +$

$3 + 4 - 5 \geq 0$

$81 + 256 - 625 \geq 0$

$1 + 1 - 1 \geq 0$ ✓

$f(x)$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ простое число p $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29$

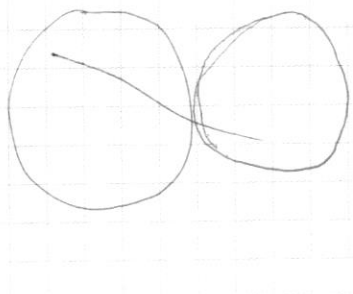
$(x; y)$ $2 \leq x \leq 25$ $f(p) = 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5$

$2 \leq y \leq 25$ $f(x/y) < 0$ $f(4) = 0$ 4 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18

$f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 0 + 0$ $f(p) = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$

6 $f(6) = 0$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b) = f(\frac{23}{5}) = 5 - 1 = -4$

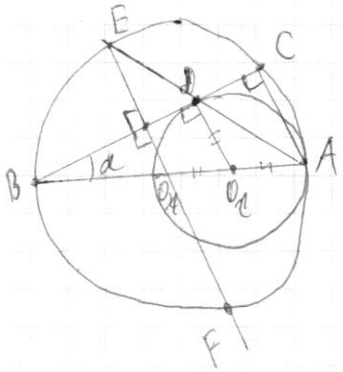


☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

AB - диаметр $CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin$ $tg\alpha = u$

$tg\frac{\alpha}{2} = u$

$\frac{\sin}{\cos} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$\sin \frac{2u}{1+u^2} = 2\alpha \sin 2\alpha$

$BC = 16$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BOA} = \frac{BO_1}{BO_2 + r}$

$B \quad \frac{\frac{17}{2}}{16} = \frac{17}{2 \cdot 16} = \frac{BO_1}{BO_1 + r}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\sin 2\alpha$

$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{4}{225}$

$\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2}$

$\frac{\frac{17}{2}}{r} = \frac{16}{AC} \Rightarrow AC =$

$225x^2 = 4 - 4x^2$

$AC \cdot \frac{17}{2} = 16 \cdot r \Rightarrow r = \frac{AC \cdot 17}{2 \cdot 16}$

$221x^2 - 4 = 0$

$x^2 =$

~~r =~~

$\frac{15}{2}$ ~~DC~~ $\cos\alpha \cdot r = DC$

~~DC - cos~~

~~$r = \cos\alpha$~~ ~~$\cos\alpha \cdot r =$~~ $DC = \frac{r}{\cos\alpha}$

$tg\alpha = \frac{r}{BD}$

$\Rightarrow r = DC \cdot \cos\alpha$

$r = BD \cdot tg\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha \cdot DC = BD \cdot tg\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\frac{15}{2}$, $\frac{17}{2}$)

$15\cos\alpha = 17 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $| \cdot \cos$

$225 + 30 = 255$

$15\cos^2\alpha = 17\sin\alpha$

$15 - \sin^2 x$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\sqrt{\ }$ $\frac{\pi}{2}$ 0

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = 2\sin(\quad) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta =$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-12x+36+36y^2-36y=9$

(x^2-6)

$x^2-144y+144y^2=2xy-12y-x+6$

$-x^2-36y^2+12x+36y=-45$

$36\cdot 3y^2-36y\cdot 3y+12x=2xy-12y-x+6-45$

108   108=

98 $+13x+2x+39=0$ $12a^2=b$

$a=x-12y$

$b=x+12y$

$\Rightarrow 2xy\, a^2+\sqrt{\dfrac{(a+b)(a-b)}{212}}-b+6$

$12a^2=a^2-b^2-12b+12\cdot 6$

$b^2-16{,}5b+-7{,}5a=45$

$\begin{cases} a= \\ b^2= \end{cases}$

$b\ 36y=$ $a^2=\dfrac{a^2-b^2}{12}=b+6\quad+|12$

$-(b-a)\cdot 4{,}5-(a+b)12=45=b^2-10{,}5b+-1\cdot a=45$

$x^2+144y^2+144y^2-36x\quad 108\ 3\ 26=9\cdot 12$

$\Downarrow\ 9\ 12y^2\ \Rightarrow\ a-(b-a)^2$

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

$\frac{D}{4}=\cancel{144}\ 36-(36y^2-36y-45)=36y^2-36y-9=0$

$\cancel{x_{1,2}=-6\pm\sqrt{36y+36y^2-9}}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)