МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1); $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (4) $\Leftrightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 4\beta = 2\cdot\frac{16}{17} - 1 = \frac{15}{17}$ (2)

$\cos(4\alpha+4\beta) = 1 - 2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$ (3)

$(3)-(2) \Leftrightarrow -2\sin 2\alpha \sin(2\alpha+4\beta) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 0\\ \sin(2\alpha+4\beta)=0\end{array}\right.$

1) $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \vee \cos 2\alpha = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha$ - определён $\Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \wedge \operatorname{tg}\alpha = 0$

2) $\sin(2\alpha+4\beta)=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{15}{17} \Rightarrow$

~~(1): $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$ $-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{8}{17}}{1+\frac{15}{17}} = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4} \vee \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{8}{17}}{1-\frac{15}{17}} = -\frac{8}{2} = -4.$

Ответ: $\{0; \frac{1}{4}; 4\}$.

№2

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{12}{9} + 1 + \frac{4}{9} \end{cases}$

Замена $3y - 2 = b$; $x - 1 = a$

$\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ba} \\ a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \wedge b^2 - 4ab + 4a^2 = ba \\ a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \wedge \underset{\text{квад. ур-ие отн-нов}}{b^2 - 5ab + 4a^2 = 0} \\ a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = a \vee b = 4a \\ b \geq 2a \\ a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{25}{9} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1) $b=a$, т.к. $b\geq 2a$, то $a\leq 0$

$a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{25}{9} \Leftrightarrow a^2=\frac{25\cdot 9}{9\cdot 10}=\frac{5}{2} \overset{a\leq 0}{\Leftrightarrow} a=-\sqrt{\frac{5}{2}}=b$

2) $b=4a$

$b\geq 2a \Leftrightarrow 4a\geq 2a \Leftrightarrow 2a\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 0$

$a^2+\frac{16a^2}{9}=\frac{25}{9} \Leftrightarrow a^2=1 \overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a=1 \Rightarrow b=4$

1) $a=-\sqrt{\frac{5}{2}}=x-1 \Rightarrow x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

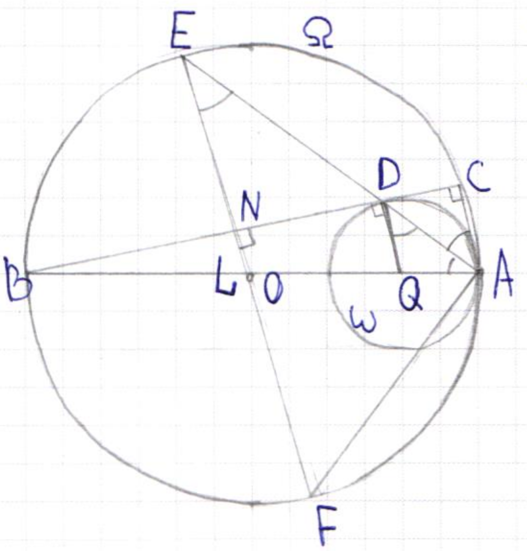
$b=-\sqrt{\frac{5}{2}}=3y-2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$

2) $a=1=x-1 \Rightarrow x=2$

$b=4=3y-2 \Rightarrow y=2$

Ответ: $\left\{\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\right); (2;2)\right\}$.

№4



] O – центр Ω, Q – центр ω; $BC \cap EF = N$

$EF \cap AB = L$

1) $EF \perp BC \wedge DQ \perp BC$ (радиус в (·) кас.) $\Rightarrow$ $DQ \parallel EF \Rightarrow \angle AEF = \angle ADQ = \angle DAQ$ ($\triangle ADQ$ – равнобед) $\Rightarrow \triangle ELA$ – равнобед $\Rightarrow L$ – (·) пересеч. сред. $\perp$ к $[EA]$ с $AB \Rightarrow$ $L \equiv O$ (т.к. O – центр Ω – опис. окр $\triangle ABE$, AB – диаметр)

2) AB – диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ = \angle BDQ$, $\angle ABC$ – общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle QBD \Rightarrow$

$\frac{BQ}{BA}=\frac{BD}{BC}$

Ω и ω кас. внутр. образом $\Rightarrow BQ = 2R-r$; $BA=2R$, где R – радиус Ω, r – радиус ω

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{13\cdot 2}{2\cdot 18} \Leftrightarrow 9(2R-r)=13R \Leftrightarrow 5R=9r \Leftrightarrow r=\frac{5}{9}R$

BD – касат. к ω; AB – сек. $\Rightarrow BD^2 = BA\cdot(BA-2r) = 2R(2R-2r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{13^2}{4} = 4\cdot R\cdot \frac{4}{9}R \overset{R>0}{\Leftrightarrow} R=\frac{13\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{39}{8} \Rightarrow r=\frac{3\cdot 13\cdot 5}{8\cdot 9}=\frac{65}{24}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

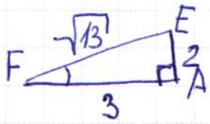
3) $\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \angle AEF = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BAC$ (т.к. $AC \parallel EF \Rightarrow \angle CAD = \angle AEF$)

$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{6\cdot\cancel{78}\cdot 8}{\cancel{8}\cdot\cancel{39}\cdot 8} = \frac{12}{13}$

$\angle BAC < \frac{\pi}{2}$ (ΔABC – прямоуг, $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \angle BAC = \arcsin\frac{12}{13} =$

$= \arccos\frac{5}{13} \Rightarrow \cos\angle AEF = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$ ($0<\angle AEF<\angle BAC$) $\Rightarrow \angle AEF = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$.



4) $AF = EF\cdot\sin\angle AEF = 2R\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} =$

$= 2\cdot\frac{39}{8}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot EF\cdot\sin\angle AFE = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{2\cdot 39}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{351}{16}$.

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$; $S_{AFE} = \frac{351}{16}$.

№6

$\forall x \in (1;3]$

$\underbrace{\frac{4x-3}{2x-2}}_{f(x)} \geq ax+b \geq \underbrace{8x^2-34x+30}_{g(x)}$

$f(x) = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$, график $f(x)$ – гипербола

$f \xrightarrow[x\to 1+0]{} +\infty$

$g(1) = 8-34+30 = 4$

$g(3) = 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 0$

$f(3) = \frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$g \cup (1;3] \Rightarrow (\forall x\in(1;3]\ ax+b \geq g(x) \Leftrightarrow a+b\geq 4 \wedge 3a+b\geq 0)$

Если (a_0, b_0) удовл. условию, то мы можем увеличивать b до тех пор, пока прямая не начнёт касаться ~~g~~ f и уменьшать, пока ~~з~~ значение в 1 или 3 не совпадёт с $g(1)$ и $g(3)$ соответственно

$f' = -\frac{2}{(2x-2)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

l - касат. к графику f в $(\cdot)\,(x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow l:\ y = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}\cdot x + 2 + \frac{x_0-1+x_0}{2(x_0-1)^2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}\cdot x + 2 + \frac{2x_0-1}{2(x_0-1)^2}$

$a = -\frac{1}{2(x_0-1)^2} \overset{x_0\in(1;3]}{\Leftrightarrow} (x_0-1)^2 = -\frac{1}{2a} \overset{a<0}{\Leftrightarrow} x_0 = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$, т.к. $x_0 > 1$

$b \leq \frac{2x_0-1}{2(x_0-1)^2} = \frac{2+2\cdot(-2a)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{a}} = -2a - 2a\cdot(-2a)^{-\frac{1}{2}} = -2a + (-2a)^{\frac{1}{2}}$

1) $a + b \geq \overset{=g(1)}{4} \Leftrightarrow b \geq 4 - a$

$-2a + \sqrt{-2a} \geq 4 - a \Leftrightarrow \sqrt{-2a} \geq 4 + a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq -4 \\ -2a \geq 16 + 8a + a^2 \end{cases} \\ a < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in [-4; -2] \\ a < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2]$

2) $3a + b \geq \overset{=g(3)}{0} \Leftrightarrow b \geq -3a$

$-2a + \sqrt{-2a} \geq -3a \Leftrightarrow \sqrt{-2a} \geq -a \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -2a \geq a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a \in [-2; 0] \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-2; 0)$

но $\begin{cases} a + b \geq 4 \\ b \geq -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -2] \\ a \in [-2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$

$a = -2 \Rightarrow \cancel{x_0 = 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.}$ $\ -2\cdot(-2) + \sqrt{-2\cdot(-2)} \geq b \Leftrightarrow$

$b \leq 6$, но $\begin{cases} b \geq 4 - (-2) = 6 \\ b \geq -3\cdot(-2) = 6 \end{cases}$

т.о. подходит только пара $(2; 6)$

Ответ: $\{(2; 6)\}$.

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$

$\log_4(x^2+6x)$ — определён $\Rightarrow x^2 + 6x > 0$

$\Leftrightarrow 4^{\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x)} + \underbrace{(x^2+6x)}_{=4^{\log_4(x^2+6x)}} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\cancel{4^{\log_4(x^2+6x)}\left(4^{\log_4 3 - 1} + 1 - 4^{\log_4 5 - 1}\right) \geq 0}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Leftrightarrow (x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x^2+6x)\Big(\underbrace{(x^2+6x)^{\log_4 3-1} + 1 - (x^2+6x)^{\log_4 5-1}}_{a=}\Big) \geq 0$

$(x^2+6x) \in (0;1)$: $(x^2+6x)^{\log_4 3-1} > 1$ т.к. $\log_4 3 < 1$

$0 < (x^2+6x)^{\log_4 5-1} < 1$ т.к. $\log_4 5 > 1$ $\Big| \Rightarrow a > 0$

$(x^2+6x) > 1$: $0 < (x^2+6x)^{\log_4 3-1} < 1 \wedge (x^2+6x)^{\log_4 5-1} > 1$

$a = (x^2+6x)^{\log_4 3-1}\left(1 - (x^2+6x)^{\log_4 5-\log_4 3}\right) + 1$

$(x^2+6x)^{\log_4 5-\log_4 3} < 1 \Leftrightarrow \underline{(\log_4 5-\log_4 3)}\,\underline{\ln(x^2+6x)} < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$a'(x) = (\log_4 3-1)(x^2+6x)^{\log_4 3-2}\cdot(2x+6) - (\log_4 5-1)(x^2+6x)^{\log_4 5-2}\cdot(2x+6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (2) $\Leftrightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}\ \frac{4}{}$ $\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 4\beta =$

$\cos 4\beta = 2\cdot\frac{16}{17}-1=\frac{15}{17}$

$tg\,\alpha - ?$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta - 1) =$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\cos(4\alpha+4\beta) = 1-\frac{2}{17}=\frac{15}{17}$

~~(1)−(2) $\Leftrightarrow 2\sin(-4\beta)\cos(2\alpha+8\beta) = \sin 2\alpha$~~

$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 0+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad -2\sin 2\alpha\,\sin(2\alpha+4\beta)=0$ $\quad \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\sin 4\beta\cos 2\alpha$

~~$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~ $\quad tg\,\alpha = \frac{0}{1+1} \neq 2$ $\quad \sqrt{1-\frac{64}{289}}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9} \end{cases}$

~~$(x-1)^2+\frac{4}{9}(x-1)^2$~~

$3y(x-1)-2(x-1)=(x-1)(3y-2)$

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{12}{9}+1+\frac{4}{9}=\frac{25}{9}$

~~$\sqrt{(x-1)(3y-2)}$~~ $\quad a=x-1;\ b=3y-2$ $\quad b^2-4ab+4a^2=ab \Leftrightarrow b^2-5ab+4a^2=0$

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ a^2+\frac{b^2}{9}=\frac{25}{9} \end{cases}$ $\quad$ ~~$x\geq 1$~~ $3y>2x \Leftrightarrow y>\frac{2}{3}x$

$-\frac{32}{17\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{15}{17}=$

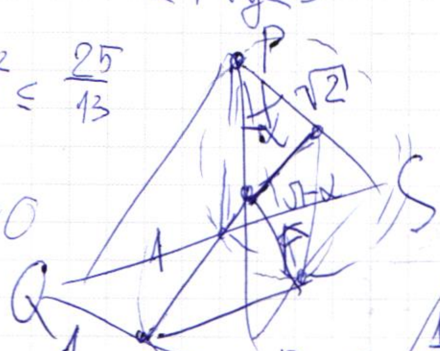
$\left[\begin{array}{l} x\geq 1 \wedge y\geq\frac{2}{3} \\ x\leq 1\wedge y\leq\frac{2}{3}\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a\end{array}\right.$

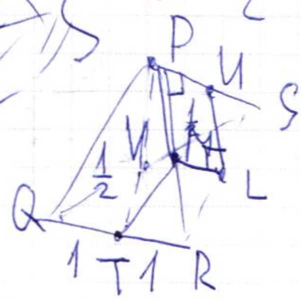
$x>1 \Rightarrow \frac{13}{9}(x-1)^2\leq\frac{25}{9} \Leftrightarrow (x-1)^2\leq\frac{25}{13}$

$\alpha = \pi-\alpha$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$

$D = 25a^2-4\cdot4a^2=9a^2\geq 0$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

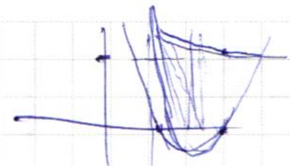
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} = (x-3)(8x-10) \Leftrightarrow 4x-3$

№3

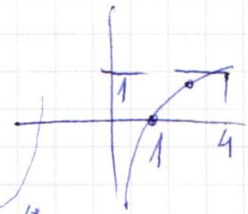
$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$



По усл. $x^2+6x>0$ $\quad 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x) \Leftrightarrow$

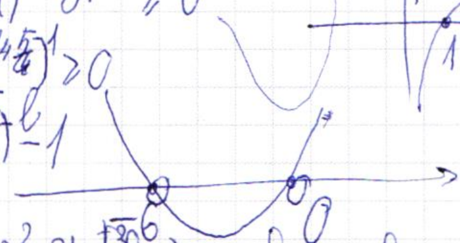
$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1\right) \Leftrightarrow$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$



$(x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - (x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}}\right) \geq 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3 - 1} \left(1 - \cancel{\log}(x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{3}}\right) - 1$



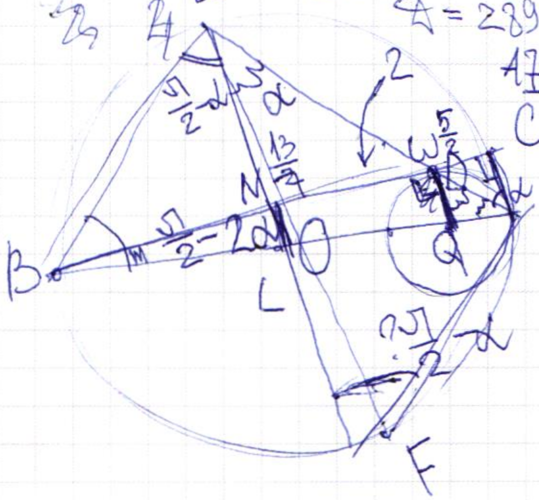
$9 \cdot 39 = 360 - 9 = 351$ $\quad \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x$ $\quad f(p) = f(p) + f(1)$

$D(f) = \mathbb{Q}^+$ $\quad \forall a, b \in D(f)$ $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$4x^2 - 17x + 15 = 0$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\forall p$ - простого $\quad f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow$

$8x^2 - 14x + 6$ $\quad \Omega$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad 30 \cdot 8$

$D = 289 - 16 \cdot 15 = 49$ $\qquad f(1) = 0$



$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$BD^2 = 4R \cdot (R-r)$

$\cancel{BD^2 = (2R-r)^2 - r^2}$

$\exists$ центр Ω - O, центр ω - Q

$EF \perp BC \wedge DQ \perp BC \Rightarrow EF \parallel DQ$

$\angle DQA = \angle QAD = \angle OEA \Rightarrow$

$EF \cap BA = L \Rightarrow \triangle ELA$ - равнобед

$\Rightarrow L$ - пересеч. ср. $\perp$ к EA и $BA \Rightarrow$

$\frac{13}{2 \cdot AD} = ED$

$\frac{BC}{BD} = \frac{2R}{2R-r}$ $\quad L \equiv O$ $\quad \frac{\pi}{2} - 2\alpha = \arccos \frac{9 \cdot 4}{39} = \arccos \frac{12}{13}$

$2\alpha = \arcsin \frac{12}{13} \Rightarrow$

$\frac{\frac{18}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{2R-r} \Leftrightarrow$ $\quad 18(2R-r) = 26R \Leftrightarrow$ $\quad 10R = 18r \Leftrightarrow$

$5R = 9r$

$CA^2 = \sqrt{\frac{39^2}{4^2} - \frac{36^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 45}{4^2}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{15}$ $\quad \frac{169}{4} = 4R^2 \cdot \frac{4}{9} R \Leftrightarrow$

$r = \frac{5}{9} R$

$\alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \Rightarrow \angle AFE = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad (3 \cdot 3)^2 = 64R^2 \Leftrightarrow R = \frac{39}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)