МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}};\quad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

есть два случая: $\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{17}$

1) $\sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{17}$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0$$

2) $\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{17}$

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{8}{17}\right)+\pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{8}{17}\right)+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

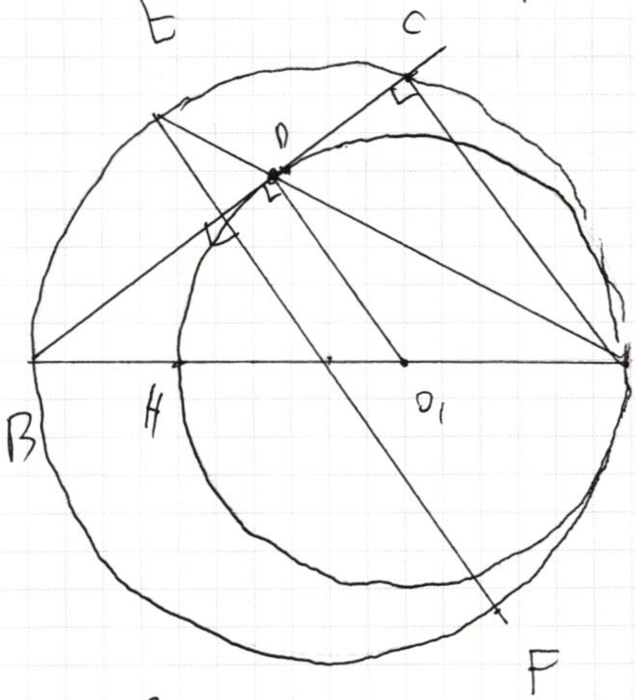
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№1 (продолжение)

Получилось ровно три потенциальных значений $tg\alpha$. По усл. все подходят.

Ответ: 1; $tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{8}{17}\right)\right)$; $tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{8}{17}\right)\right)$

№4



$CD=\frac{5}{2}$; $BD=\frac{13}{2}$

r − радиус ω

R − радиус Ω

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр Ω)

$AC \parallel O_1D \parallel EF$

$\exists\ R = 18x$

$$BD^2 = BH\cdot BA = BA\cdot(36x-2r) = 36x(36x-2r) = \frac{169}{4}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle O_1BD \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{36x-r}{36x} = \frac{13}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{36x} = \frac{5}{18} \Rightarrow r = 10x$$

$$\frac{169}{4} = 36x(36x-20x) \Rightarrow x = \frac{13}{2\cdot 6\cdot 4} = \frac{13}{48}$$

$$r = \frac{130}{48};\ R = \frac{18\cdot 13}{48}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3}\sqrt{(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

] $x-1=a$; $y-\frac{2}{3}=b$

$x=a+1$; $y=b+\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 3b-2a=\sqrt{3}\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b-2a\geq 0 \\ 9b^2-12ab+4a^2=3ab \\ a^2+b^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

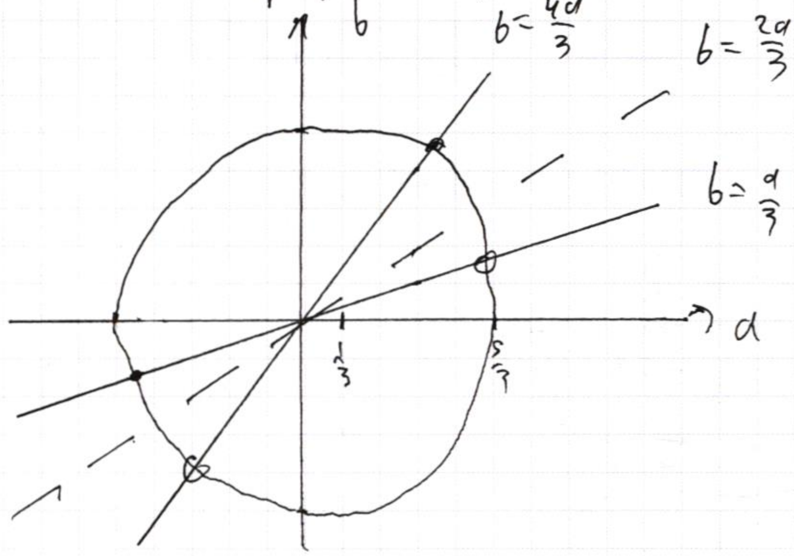
$a=0$ не корень второго ур.

$$\begin{cases} 3b-2a\geq 0 \\ 9(\frac{b}{a})^2-15(\frac{b}{a})^2+4=0 \Rightarrow b=\frac{4a}{3};\quad b=\frac{a}{3} \\ a^2+b^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)



Из графика и подставляя одни уравнения в другие $a=1;\ b=\frac{4}{3}$ и $a=-\frac{5}{\sqrt{10}};\ b=-\frac{5}{3\sqrt{10}}$

Тогда решения системы:

$x=2;\ y=2$ и $x=-\frac{5}{\sqrt{10}}+1;\ y=-\frac{5}{3\sqrt{10}}+\frac{2}{3}$

Ответ: $(2;2);\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}+1;\ -\frac{5}{3\sqrt{10}}+\frac{2}{3}\right)$

№3

На ОДЗ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$x^2+6x=t$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$$\begin{cases} t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5} \\ t>0 \end{cases}$$ (модуль можно убрать, т.к. $t>0$).

при $t \in (0;1]$ правая часть не больше t, левая - не меньше t, поэтому $t \in (0;1]$ - решения неравенства.

$f(t) = t^{\log_4 3} + t$

$g(t) = t^{\log_4 5}$

$f'(t) = 1 + \log_4(3) \cdot t^{\log_4(\frac{3}{4})}$

$g'(t) = \log_4(5) \cdot t^{\log_4(\frac{5}{4})}$

~~При $t>0$ обе производные~~ и обе ~~функции ↑↑.~~

~~$f'(16) = g'(16)$ и g'~~

При $t>1$ $f'(t)$ ↓↓, $g'(t)$ ↑↑, обе функции ↑↑.

$f(16)=g(16)$; $g'(16) > f'(16) \Rightarrow t>16$ не решения неравенства.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

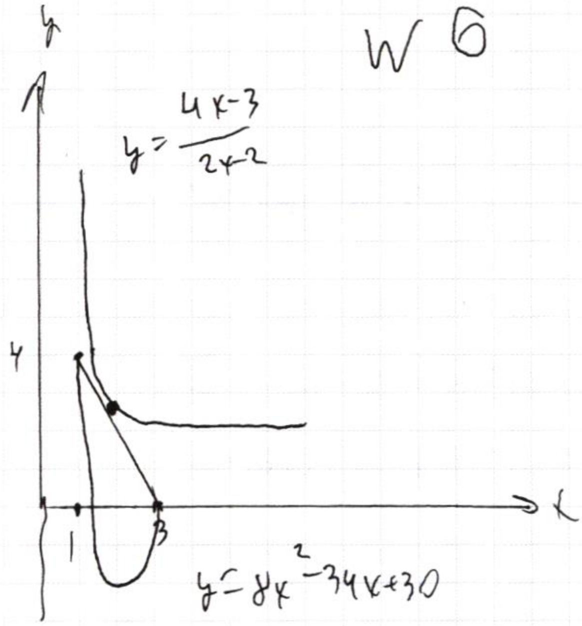
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



∢ $y = -2x+6$

Можно найти точки пересечения прямой $y=-2x+6$ с $y = \frac{4x-3}{2x-2}$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (2x-3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ это

прямая ~~касс~~ касается $y = \frac{4x-3}{2x-2}$.
Тогда очевидно, что никакая другая прямая не удовл. нер-ву.

Ответ: $a = -2$; $b = 6$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

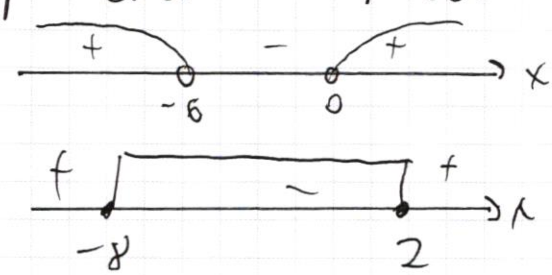
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

при $t>1$ у уравнения $f(t)=g(t)$ не более одного корня, значит, $t \in (1;16]$ - решения нер-ва.

Итого $t \in (0;16]$ - решения нер-ва.

$$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$$



Ответ:

$x \in [-8;-6) \cup (0;2]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha = x \quad 2\beta = y$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\left(\frac{x}{2}\right) = ?$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\underline{\sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{8}{17}}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$

$3y(x-1) - 2(x-1)$

$(x-1)(3y-2)$

$3xy - 2x - 3y + 2$

$3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$x^2 - 2x + 1$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} = 4 + 3 + \frac{4}{3}$

$2\sqrt{3}\, t = -6$

$t = \sqrt{3}$

$(x\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + \left(y\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$

$(x\sqrt{3} + \sqrt{3})^2$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cancel{3x^2 + 6x + 3}$

$\cancel{x\sqrt{3}\, t = }$

$\sqrt{3}$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$3 \qquad \frac{12}{3} + \frac{9}{3} + \frac{4}{3}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-1) \quad (3y-2)\geq 0$

$3y-2x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(x-1)(y-\frac{2}{3})}$

$(40-1)^2=1600-240+9$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$

a b

$a^2+b^2=(\frac{5}{3})^2$

$x-1=a \quad x=a+1$

$y-\frac{2}{3}=b \quad y=b+\frac{2}{3}$

$3y-2x=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{ab}$

$3y-2x=3b+2-2a-2=3b-2a$

$3b-2a=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{ab}$

$9b^2-12ab+4a^2=\frac{ab}{3}$

$a^2+b^2=(\frac{5}{3})^2$

$27b^2-36ab+12a^2=ab$

$\begin{cases}27b^2-37ab+12a^2=0\\ 3b-2a\geq 0\end{cases}$

$3y-2x-3y+2$

$27(\frac{b}{a})^2-37(\frac{b}{a})+12=0$

$D=1369-1296=73$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y-2x=\frac{\sqrt{(x-1)(y-\frac{2}{3})}}{\sqrt{3}}$

$a=x-1 \quad x=a+1$

$b=y-\frac{2}{3} \quad y=b+\frac{2}{3}$

$3b-2a=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$

$3b+2-2a-2$

$9b^2-12ab+4a^2=\frac{ab}{3}$

$(40-3)^2=1600-240+9$

$27b^2-37ab+12a^2=0$

$D=1369-1296=73$

$\frac{b}{a}=\frac{37\pm\sqrt{73}}{54}$

5
48
27
336
96
1296

37
37
259
111
1369

1369
-1296
73

27
4
108
12
216
108
1296

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underbrace{(x-1)}_{a}^2 + \underbrace{(y-\frac{2}{3})}_{b}^2 = (\frac{5}{3})^2$

$3y-2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y-2x = \sqrt{3}\sqrt{(x-1)(y-\frac{2}{3})}$

$\cancel{3b-2a=} 3ab$

$9b^2-12ab+4a^2=3ab$

$9b^2-15ab+4a^2=0$

$9(\frac{b}{a})^2-15(\frac{b}{a})+4=0$

$\cancel{\sqrt{16-\frac{15\cdot4}{3}}}+4$

$\cancel{1}$

$b=\frac{4a}{3}$

$b=\frac{a}{3}$

5
16
9
$\sqrt{4}$

54
+25

$D=225-144=81$

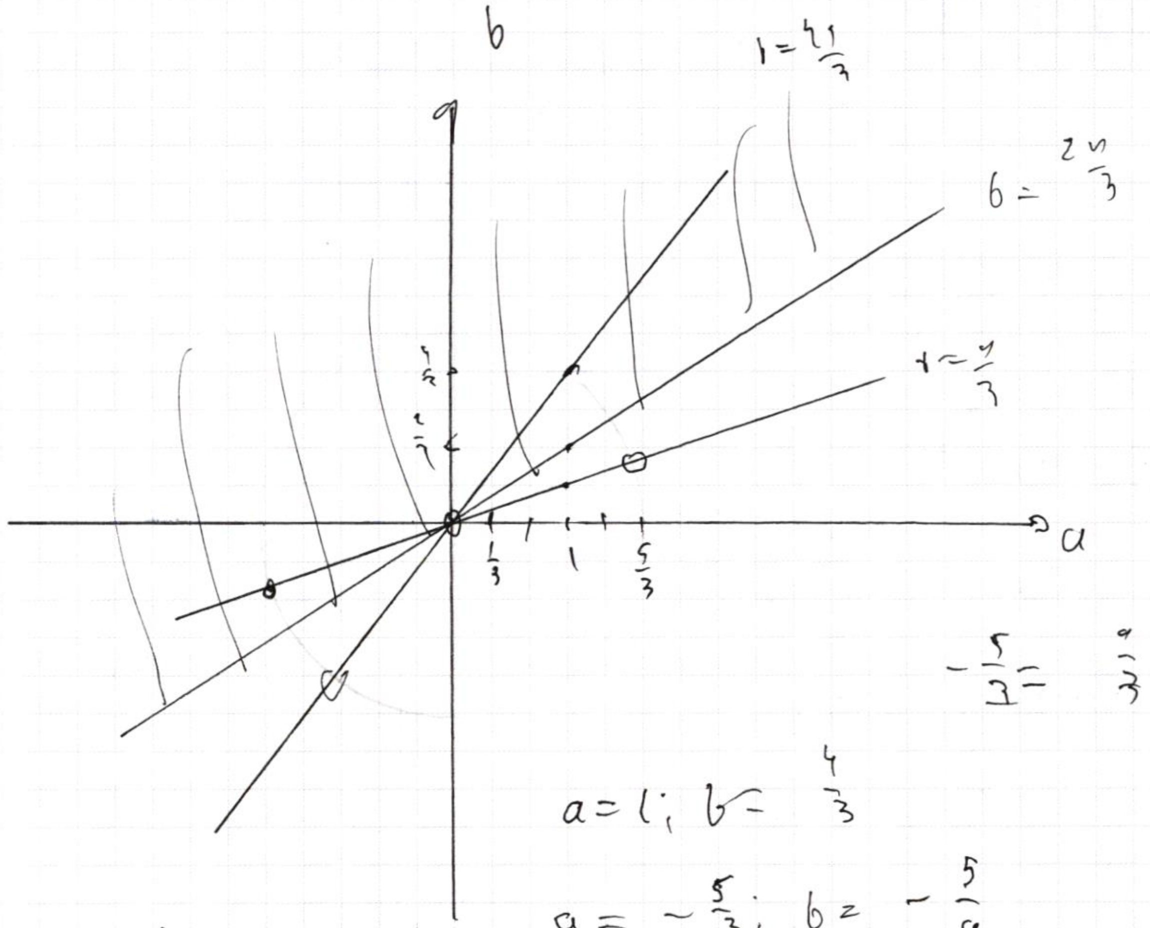
$\frac{b}{a}=\frac{15\pm9}{18}$

$\frac{b}{a}=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$

$\frac{b}{a}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

$3b-2a\geq0$

$3b\geq2a \quad b\geq\frac{2a}{3}$



$\cancel{2y}$ 2-8

$-\frac{5}{3}=\frac{a}{3}$

$a=1;\ b=\frac{4}{3}$

$a=-\frac{5}{3};\ b=-\frac{5}{9}$

$\frac{25}{9}$

$b=\frac{a}{3}$

$\frac{10a^2}{9}=\frac{25}{9}$ $\quad a^2=\frac{25}{10}$

$a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{25}{9}$

$a=-\frac{5}{\sqrt{10}}$

$b=-\frac{5}{3\sqrt{10}}$

$\frac{9}{9}+$ $\quad \frac{9\cdot 25}{\cancel{4}\cdot 10}+\frac{25}{\cancel{9}\cdot 10}=\frac{25}{\cancel{9}}$

$x=a+1$

$y=b+\frac{2}{3}$

$a=-\frac{5}{3}$ $\quad b=-\frac{5}{9}$

$a=1$

$b=\frac{4}{3}$

$x=2;\ y=2$

$x=-\frac{5}{\sqrt{10}}+1;\ y=-\frac{5}{3\sqrt{10}}+\frac{2}{3}$ $\quad \sqrt{\left(-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)}$

$\frac{25}{10}+\frac{25}{9\cdot 10}$ $\quad -\frac{5}{\sqrt{10}}+2+\frac{10}{\sqrt{10}}-2=\frac{5}{\sqrt{10}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$ p - простое

$3\le x\le 27$

$3\le y\le 27$

$f(\frac{x}{y})<0$

$3\le y\le 27$

$f(2)=0$

$f(6)=0$

$\frac{1}{3}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{27}$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(2)=2f(\sqrt{2})=0$

$f(7)=1$

$f(\sqrt{2})=0$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(4)=2f(2)=0$

$\frac{x}{y}$

~~x 5~~ $3\le x\le 27$

$3\le y\le 27$

$\frac{3}{27}\le\frac{x}{y}\le 9$ $\frac{1}{3}\le\frac{x}{y}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

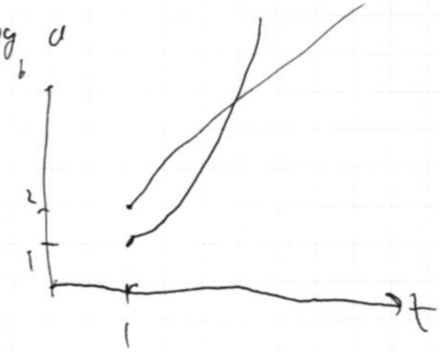
x^2+6x-t

$$3^{\log_4(t)}+t=5^{\log_4 5}$$

$t>0$

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

~~$\log_b a$~~ $\log_b a$



$$t^{\log_4 3}+t^1=t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t}+t=5^{\log_4 t}$$

$t>0$

$\Downarrow$

$t\in(0;1]$

$$g(t)=t^{\log_4 5}$$

$$f(t)=t^{\log_4 3}+t$$

$$g'(t)=\log_4(5)\cdot t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$f'(t)=\log_4(3)\cdot t^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)}+1$$

~~$\log_4(3)\cdot t^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)}=-1$~~

$$\log_4(5)\cdot t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}\qquad \log_4(3)\ t^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)}+1$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

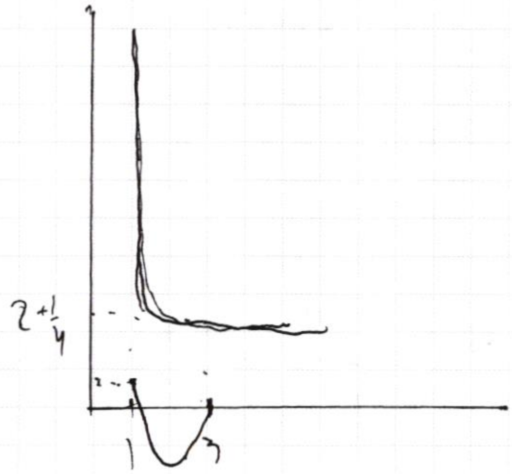
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$8+30-34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$g(x) = x^2 + \ldots$

$f(x) = $ —

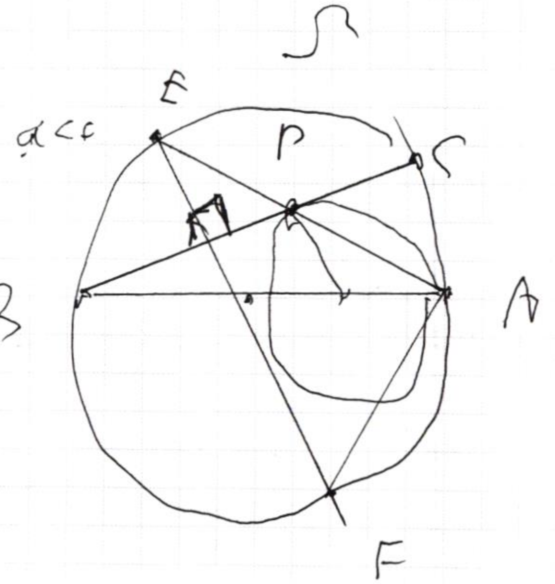
$f(x) = ax + b$

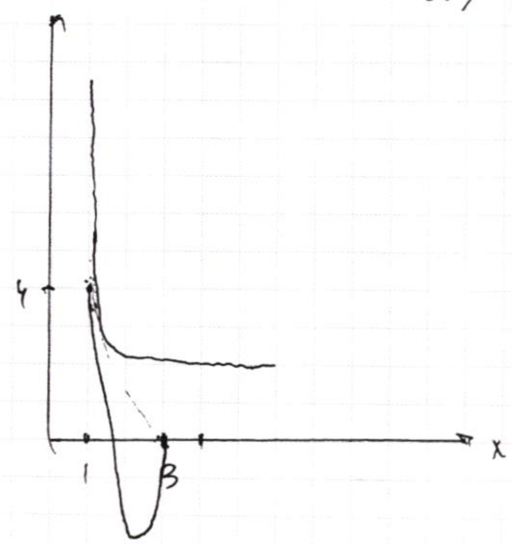
$f(1) \geq g(A)$

$f(3) \geq g(1)$

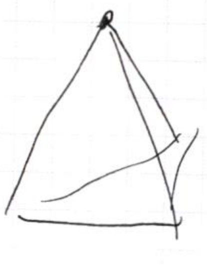
~~$a=0$~~ $b\,E$

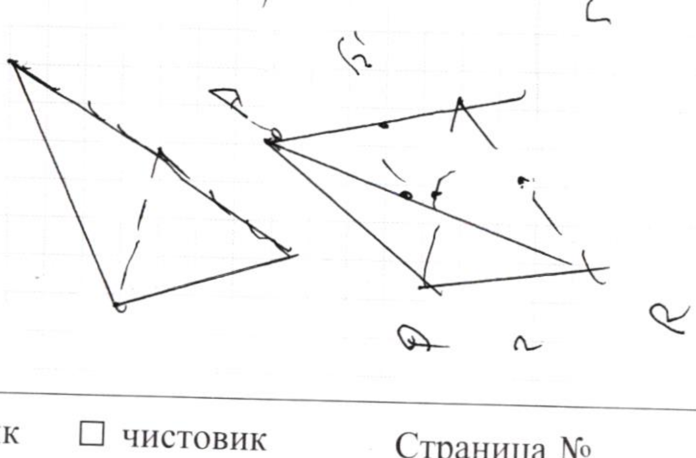
$a \neq 0$





$4x-3 = 2(x-1) \cdot 8(x-3)(x-\frac{5}{7})$.





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{9}{4} = 3a + b =$

4
17
17
17 9

$8x^2 - 34x + 30$

$D = 289 - 240 = 49$

17
3
11

$4x^2 - 17x + 15 = 0$

$x = \frac{17 \pm 7}{8} = \frac{5}{4}; 3$

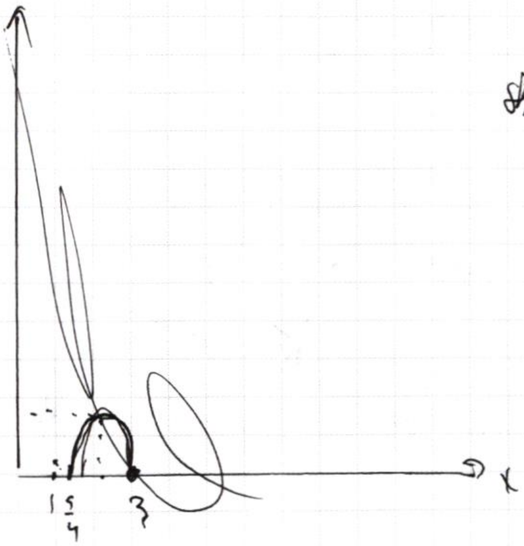
$36 - 51 + 15$

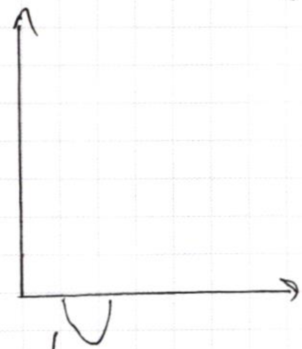
$\frac{25}{4} - \frac{17 \cdot 5}{4} + \frac{60}{4}$

$x_B = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{8}$

$\frac{8 \cdot 17}{8} - \frac{34 \cdot 17}{8} + \frac{240}{8}$

289





$\frac{4x - 4 + 1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$\frac{1}{2x-2}$

$2 + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2x}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \pm\frac{4}{17}$ $\quad \frac{4}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{4}{17}$ $\quad \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{17}$

1) $\sin 2\alpha = 0$ $\quad 2\alpha = \pi k \quad k\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi k}{2}$

2) $\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) + 2\pi k$

$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad 2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) + 2\pi k$

$-\operatorname{tg}$ $\quad \frac{\sin\pi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\pi}{\cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}(0) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 + 6x = t^2$

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}$

$t \in (0;1]$ √ $t^{??} + t = t^2$

$(\log_4 3 \cdot t^{\log_4(\frac{3}{4})} + 1$ $\log_4 5 \cdot t^{\log_4(\frac{5}{4})}$

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}$

$(1;4)$ $(3;0)$

$-2(x-1) + 4$

$\log_4 5$

$-2x + 6$

$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6$

$4x-3 = -2(x-3) \cdot 2(x-1)$

$4x-3 = -4(x^2-4x+3)$

$\frac{9}{4}$

3

$4x-3 = -4x^2 + 16x - 12$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$D = 144 - 144 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\lg_4 3} + t \geq t^{\lg_4 5}$

$3^{2\cdot 3}$

$\log_4 5 \cdot t^{\lg \frac{5}{4}}$

$\lg_4 \quad \log_4 3 \cdot t^{\lg_4\left(\frac{3}{4}\right)} + 1 \wedge \log_4 5 \cdot t^{\lg \frac{5}{4}}$

$3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\lg_4 t}$ $\quad t=16$

25

$\log_4 5 \cdot \frac{16^{\log_4 5}}{16} = \frac{25}{16} \cdot \lg_4 25$

$\frac{\lg_4 3 \cdot t^{\lg_4 3}}{t}$

$\log_4 3 \cdot \frac{16^{\lg_4 3}}{16} = \frac{9}{16} \cdot \lg_4 3$

?

$t \in (0; 16)$

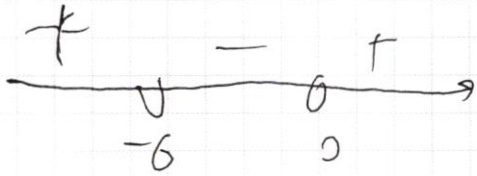
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

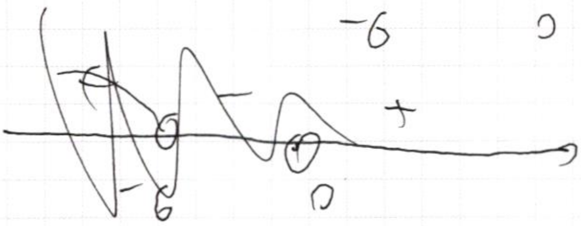
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$0 < x^2+6x \le 16$



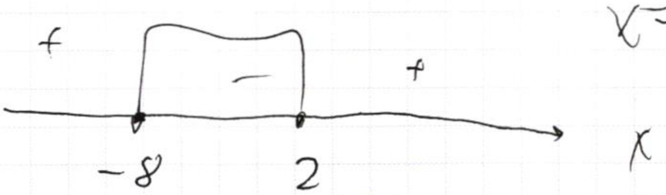
$0 < x(x+6)$

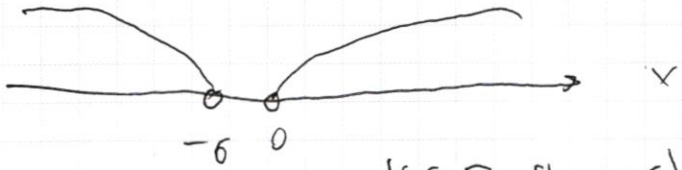


$x^2+6x-16 \le 0$

$D = 36+64=100$

$x = \frac{-6 \pm 10}{2} = -8; 2$





$x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

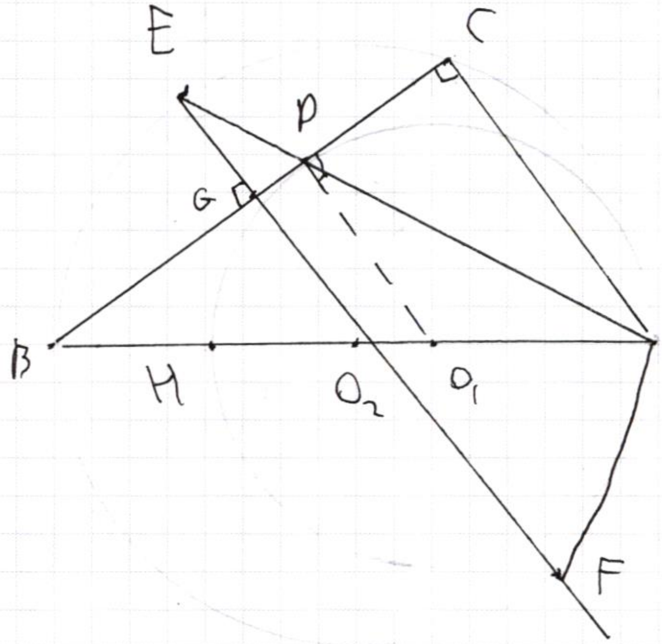
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13
13
39
13

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$BC = \frac{18}{2}$.



1'

$AB = 18x$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{O_1A}{BO_1} = \frac{5?}{2\cdot 13} = \frac{5x}{13x}$$

$$CD\cdot BD = AD\cdot ED = \frac{5\cdot 13}{4}$$

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DG}{CD} = \frac{EQ}{AC}$$

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AB-r}{AB}$$

$$\frac{13}{2\cdot 18} = \frac{18x-r}{18x}$$

$$\frac{13}{18} = 1 - \frac{r}{18x}$$

$$\frac{r}{18x} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{13\cdot 2}{2\cdot 18} = \frac{13}{18}$$

$DG + CD = \cancel{BC}$

$$BD^2 = BH\cdot BA$$

$$\frac{169}{4} = 18x\cdot BH$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{f(1)}$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$\frac{169}{4}=36x\cdot 10x$

$x=\sqrt{\frac{13\cdot 13}{2\cdot 2\cdot 6\cdot 6\cdot 4\cdot 4}}=\frac{13}{2\cdot 6\cdot 4}$

$\frac{13}{18}=\frac{36x-r}{36x}$

$f\left(\frac{2}{5}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{1}{5}\right)$

$\frac{r}{2x}=5$

$r=10x$

$R=18R$

к - т $f\left(\frac{2}{k}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{2}{k}\right)=f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{3}{k}\right)=f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{5}{k}\right)=1+f\left(\frac{1}{k}\right)$

$\frac{169}{4}=18x\cdot 8x$

$x^2=\frac{169}{4\cdot 9\cdot 2\cdot 8}=$

$=\frac{13\cdot 13}{8\cdot 8\cdot 3\cdot 3}$

$x=\frac{13}{24}$

$f(k)+f(2)=f(2k)=f(k)$

$f(k)=f(2k)$

$f(3k)=f(k)$

$f(5k)=1+f(k)$

$\frac{169}{4}=18x(AB-2r)$

$\frac{169}{4}=18x(18x-2r)$

$\frac{r}{18x}=\frac{5}{18}$

$r=5x$

√☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Г-10x Р-18x

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \pm\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\pm\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\sin 2\beta \pm \sin 2\alpha = \pm\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta + 4\sin 2\beta - \frac{8}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} =$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $\qquad x+y=\alpha$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ $\qquad x-y=\beta$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ $\qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta)\cos \cancel{2}2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)$ $\cos 4\beta = -\frac{4}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 4\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin 4\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}} \sin t + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos t + \sin t = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)$ $\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$