МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

$0; -2; -\frac{1}{2}; \varnothing$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$(6;2)\ ;\ (2-\sqrt{2{,}5};\ 1-\sqrt{2{,}5})$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

$[-24; -18) \cup (0; 6]$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

\+

40

~ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad tg\,\alpha - ?$$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= 2\cdot\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta =$

$= 2\cdot\cos 2\beta(\cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) =$

$= 2\cdot\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

3) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot 2\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$

т. к. $\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

Если $\sin 2\alpha = 0$, то $\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pi k + \frac{\pi}{2}$

~~$tg\alpha = 0$~~ $tg\,\alpha$ не опр.

1) $2\sin 2\alpha + \cancel{2}\cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{\cancel{3}5} \cdot \sin(2\alpha+\varphi) = -1$, где $\begin{cases} \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$

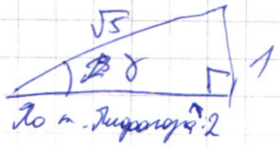
$\sin(2\alpha + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) + 2\pi n \\ 2\alpha + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) + 2\pi m \end{array} \right.$ $m, n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{array} \right. \Rightarrow tg\,\alpha$ определен при

$\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n \Rightarrow tg\,\alpha = tg\left(-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) =$

$= -tg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$



$\Rightarrow tg\,\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{-tg}$ $tg\,\alpha = -tg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\frac{1}{2}$

2)

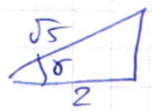
$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{5} \cdot \sin\left(2\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -1$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi l;\ l \in Z \\ 2\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi v;\ v \in Z \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi l \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi v \end{array} \right. \quad l, v \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi v\right) = -ctg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) \end{array} \right. \Rightarrow$



$ctg\,\gamma = 2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -ctg(\gamma) = -2 \end{array} \right.$

Ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = -2$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \\ x \geq 2y \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = \cancel{xy-1}\, x(y-1)-2(y-1) \\ x \geq 2y \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ x\geq 2y \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$, тогда $x-2y=a-2b$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$$a=\frac{5b\pm 3b}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \quad \text{I} \\ a=b \quad \text{II} \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

I $\quad a=4b \Rightarrow 16b^2+9b^2=25 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \end{array}\right.$$

II $\quad a=b \Rightarrow 10b^2=25$

$b=\pm\sqrt{2{,}5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{2{,}5} \\ a=\sqrt{2{,}5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\sqrt{2{,}5} \\ a=-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \end{array}\right.$

$a=x-2$, $b=y-1 \Rightarrow x=a+2$, $y=b+1$

1) $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow x=6$, $y=2$

2) $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \Rightarrow y=0$, $x=-2$ т.к $x\geq 2y$ – неверно

3) $\begin{cases} b=\sqrt{2{,}5} \\ a=\sqrt{2{,}5} \end{cases} \Rightarrow x=2+\sqrt{2{,}5}$, $y=1+\sqrt{2{,}5}$ ~~x<0, y>0~~ $x\geq 2y$ – неверно

4) $\begin{cases} b=-\sqrt{2{,}5} \\ a=-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \Rightarrow x=2-\sqrt{2{,}5}$, $y=1-\sqrt{2{,}5}$; $x>0$, $y<0$

Т.к $x\geq 2y \Rightarrow$ подходят лишь два решения: $(6;2)$; $(2-\sqrt{2{,}5}; 1-\sqrt{2{,}5})$

Ответ: $(6;2)$; $(2-\sqrt{2{,}5}; 1-\sqrt{2{,}5})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 7^{\log_2 8}=7^3$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ $\quad 8^{\log_2 7}=7^3$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta-\sin 2\alpha+2\cdot\cos 2\alpha\cdot\cancel{\sin 4\beta}\ \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{7}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=f([\frac{p}{4}])$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(1)=f(p)+f(\frac{1}{p})$

$f(1)=[p/4]+[\frac{1}{p}/4]$

$f(\frac{x}{y})=1 \quad \frac{x}{y}=p\Rightarrow$

$x=py\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f(p)+f(y)$

$f(x)=[p/4]+f(y)$

$\frac{x}{y}\neq p\Rightarrow$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$; x-?

Пусть $t = x^2+18$; по ОДЗ $x^2+18>0 \Rightarrow t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2+18x| = |t| = t$ т.к $t>0$

$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13} - t$

~~$t^{\log}$ Пусть~~ $13^{\log_{12}t} - 5^{\log_{12}t} - 12^{\log_{12}t} \leq 0$

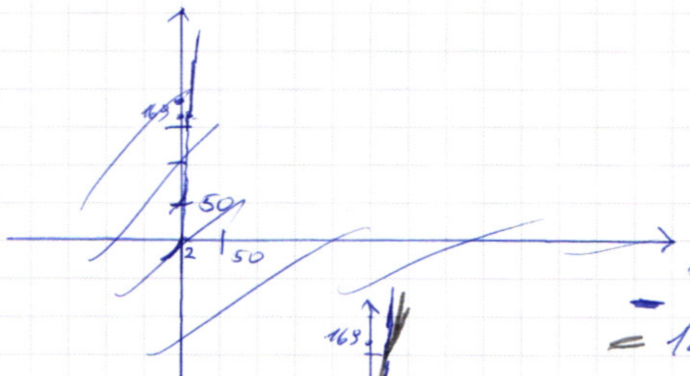
Пусть $y = \log_{12}t$

~~$13t$~~ $13^y \leq 12^y + 5^y$

$13^y = 12^y + 5^y$ при $y=2$, а по графикам функций можно понять, что при $y>2$ 13^y возрастает быстрее чем 12^y+5^y и что при $y<2$ $13^y < 12^y + 5^y \Rightarrow y \leq 2$

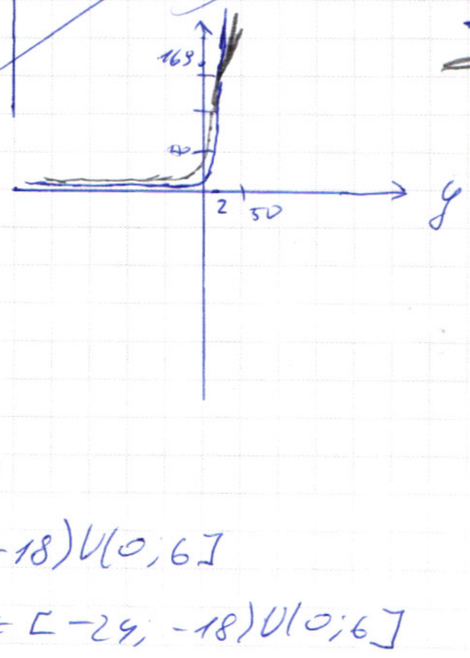
$\log_{12}t \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < t \leq 144$



$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 & \text{(I)} \\ x^2+18x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

— 13^y
— 12^y+5^y



(I) $x^2+18x-144 \leq 0$

$D = 324+576 = 900$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-24 \end{array}\right.$

$(x-6)(x+24) \leq 0$

$-24 \leq x \leq 6$

(II) $x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$\begin{cases} -24 \leq x \leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

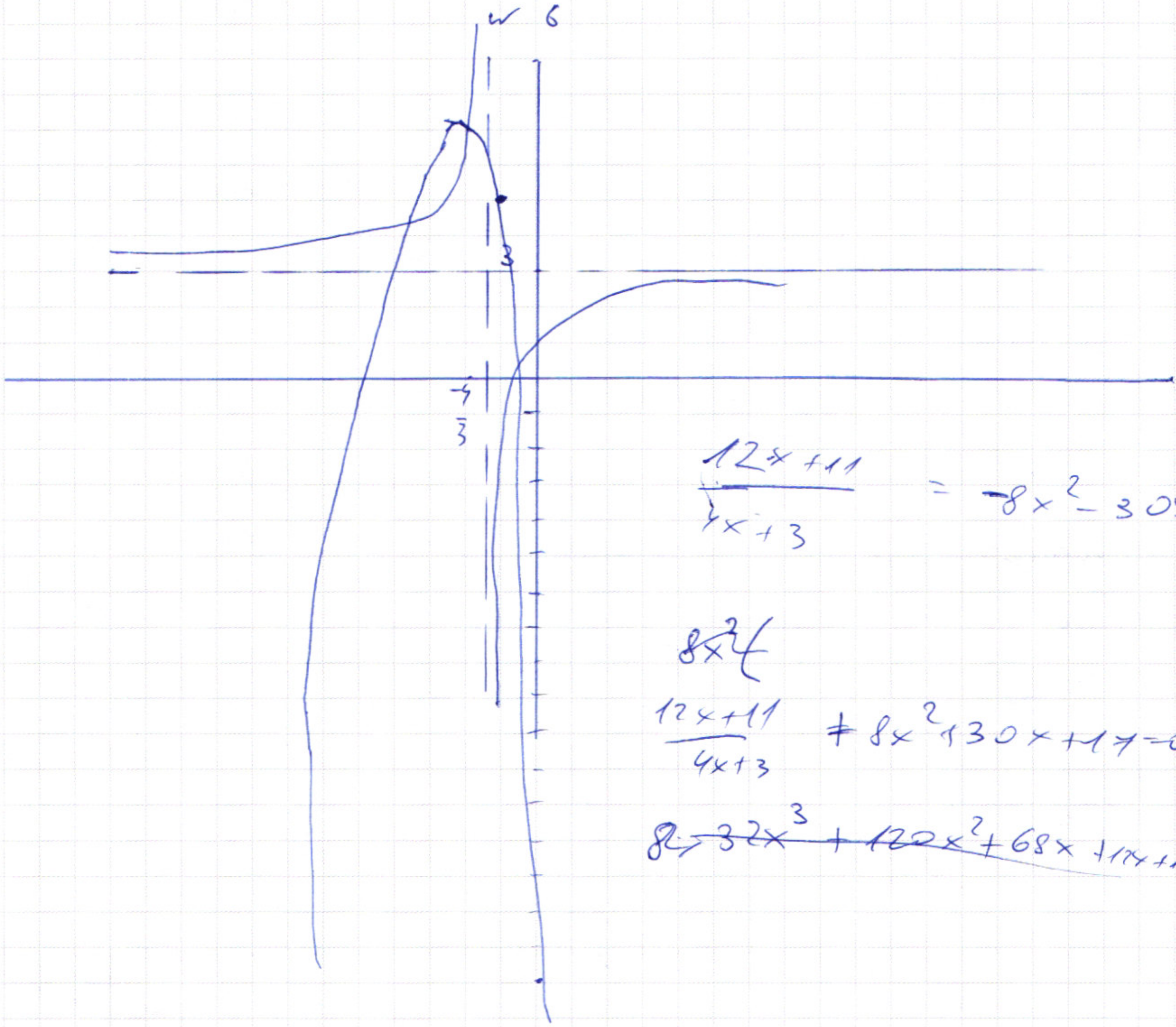
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{12x+11}{4x+3} = -8x^2 - 30x - 17.$$

$8x^2($

$$\frac{12x+11}{4x+3} + 8x^2 + 30x + 17 = 0.$$

$8\cancel{(32x^3 + 120x^2 + 68x + 17x + 11}$

$\cancel{2 = \sqrt{12 - 6 - 4 + 2}}$

$\cancel{36 + 36 - 16 - 36}$

$\cancel{6^2 + 9 \cdot 4 - 4 \cdot 6 - 36}$

$2 -$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

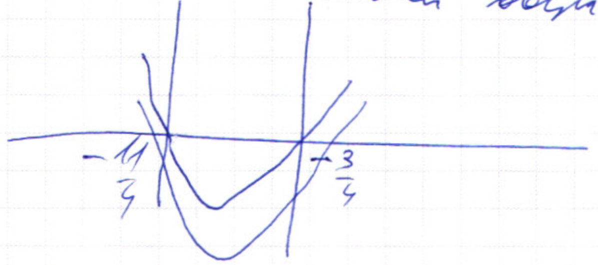
a, b — ?

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}) \Rightarrow 4x+3<0$

(1) $-8x^2-30x-17 \ge ax+b$

$f(x)$ $8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0$ — парабола с ветвями вверх

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}) \Rightarrow$



$\Rightarrow \begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 & (1) \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 & (2) \end{cases}$

(1) $f(-\frac{11}{4}) \le 0 \Rightarrow 8 \cdot \frac{121}{16} - \frac{11}{4}(a+30)+b+17 \le 0$

$\frac{121}{2} - \frac{11}{4}(a+30)+b+17 \le 0$

$-b \ge \frac{155}{2} - \frac{11}{4}a - \frac{165}{2}$

$-b \ge 5 - \frac{11}{4}a$

$b \le \frac{11}{4}a - 5.$

(2) $8 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4}(a+30)+b+17 \le 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{4}a - \frac{45}{2} + b + 17 \le 0$

$-\frac{3}{4}a - 1 \le -b \Rightarrow b \le \frac{3}{4}a+1 \Rightarrow \begin{cases} b \le \frac{11}{4}a - 5 \\ b \le \frac{3}{4}a+1 \end{cases}$

(11) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \Rightarrow$ т.к. $4x+3<0$ $12x+11 \ge 4ax^2+4xb+3ax+3b$

$4ax^2+x(4b+3a-12)+(3b-11) \le 0$

При $a=0$: $x(4b-12)+(3b-11) \le 0$

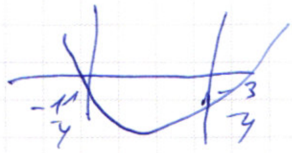
~~$x \le 11-3b$~~ при $b=3$: верно

при $b \ne 3$: $x \le \frac{11-3b}{4b-12} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ чтобы было верно при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ $-\frac{3}{4} \le \frac{11-3b}{4b-12} \Rightarrow 36-12b \le 44-12b$ верно при $\forall b$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При ~~b~~ $a>0$



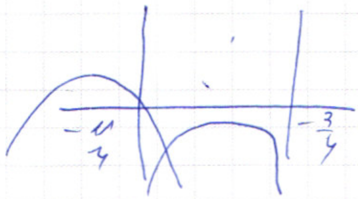
$$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a\cdot\frac{121}{16} - \frac{11}{4}\cdot(4b+3a-12)+3b-11\le 0 \\ 4a\cdot\frac{9}{16} - \frac{3}{4}(4b+3a-12)+3b-11\le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 121a - 44b - 33a + 132 + 3b - 11 \le 0 \\ \cancel{9a} - 12b - \cancel{9a} + 36 + 3b - 11 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 88a \le 41b - 121 \\ a>0 \\ b \ge \frac{25}{9} \end{cases}$$

При $a<0$



$$\left[\begin{array}{l} D<0 \\ \begin{cases} \frac{-4b-3a-12}{8a} < -\frac{11}{4} \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-4b-3a-12}{8a} > -\frac{3}{4} \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

D ~~$<0 \Rightarrow$~~

~~Ответ: $(0, 1)$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b>0$ $\quad x,y\in\mathbb{N}$ $\quad 1\le x,y\le 24$ $\quad$ кол-во пар $f(\frac{x}{y})<0$ - ?

$f(p)=[p/4]$

1) $f(1)=f(\frac{1}{p})+f(p)=f(\frac{1}{p})+[p/4]$

2) $f(2)=[2/4]=0$ $\quad f(6)=f(2)+f(3)=0+0=0$

$f(3)=[3/4]=0$

3) $f(6)=f(1)+f(6) \Rightarrow 0=f(1)+0$

$f(1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{p})+[p/4]=0$

$f(\frac{1}{p})=-[p/4]$

Т.к $[p/4]>0 \Rightarrow f(\frac{1}{p})<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\frac{x}{y}=\frac{1}{p}$ верно. $(\frac{y}{x}=p)$

Пары x,y: (1;2); (1;3); (1;5); (1;7); (1;11); (1;13); (1;17); (1;19); (1;23); (2;4); (2;6); (2;10); (2;14); (2;22); (3;6); (3;9); (3;15); (3;21); (4;8); (4;12); (4;20); (5;10); (5;15); (6;12); (6;18); (7;14); (7;21); (8;16); (8;24); (9;18); (10;20); (11;22); (12;24) — 33 пары

$f(1)=f(\frac{1}{n})+f(n)=0$, где $n\in\mathbb{Q}$

$f(n)=-f(\frac{1}{n})$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	0	$[2/4]=0$	$[3/4]=0$	$f(2)+f(2)=0$	$[5/4]=1$
n	6	7	8	9	
$f(n)$	$f(2)+f(3)=0$	$[7/4]=1$	$f(2)+f(4)=0$	$f(3)+f(3)=0$	
n	10	11	12	13	14
$f(n)$	$f(2)+f(5)=1$	$[11/4]=2$	$f(6)+f(2)=0$	$[13/4]=3$	$f(2)+f(7)=1$
n	15	16	17	18	19
$f(n)$	$f(3)+f(5)=1$	$f(8)+f(2)=0$	$[17/4]=4$	$f(2)+f(9)=0$	$[19/4]=4$
n	20	21	22	23	24
$f(n)$	$f(4)+f(5)=1$	$f(7)+f(3)=1$	$f(11)+f(2)=2$	$[23/4]=5$	$f(12)+f(2)=0$

Т.е. при $n \in N$; $1 \le n \le 24$: $f(n) > 0$ при

$n=5$; $n=7$; $n=10$; $n=11$; $n=13$; $n=14$; $n=15$; $n=17$;

$n=19$; $n=20$; $n=21$; $n=22$; $n=23$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n) \Rightarrow$ при max n $f\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \Rightarrow$

т.к. простые числа мы уже учли (33 пары), то остались $n=10$;

$n=14$; $n=15$; $n=20$; $n=21$; $n=22$: $n = \frac{x}{y}$; $1 \le x, y \le 24$

$(20;2)$; $(20;1)$; $(14;1)$; $(15;1)$; $(20;1)$; $(21;1)$; $(22;1)$

ещё 7 пар

$33+7 = 40$ пар

Ответ: 40 пар

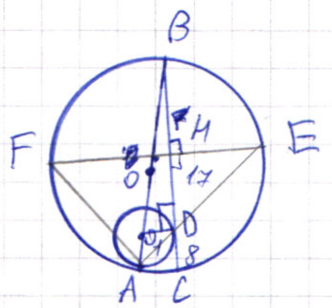
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:
окр. O, O_1
AB-диам.
$BC \perp O_1 D$
$CD = 8$
$BD = 17$

r, R; S_{AEF} – ?
$\angle AFE$

1) $O_1 \in AB$ по св-ву кас. окр.

2) В $\triangle BO_1D$:

$BO_1 = BA - AO_1 = 2R - r$

$O_1D = r$

По теореме Пифагора в $\triangle DO_1B$:

$BO_1^2 = BD^2 + O_1D^2$

$(2R - r)^2 = 289 + r^2$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = 289 + r^2$

$R^2 - Rr = \frac{289}{4}$

~~Br=~~ .

□ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(1)=f(\frac{1}{n})+f(n)=0$

$f(n)\geq 0$

$f(\frac{1}{n})\leq 0$ 2

5

~~f(~~ 1

$f(1)=$

$ax+6 \le -8x^2 + \cancel{b} - 30x - 17$

$-8x^2 - x(30+a) - (17+6) \ge 0$

$x \in (-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{D<0} \\ \cancel{\begin{cases} x_B \le -\frac{11}{4} \\ f(-\frac{11}{4}) \end{cases}} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \ge 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \ge 0 \end{cases}$$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$-f(\frac{1}{2}) = f(2)$

$f(\frac{1}{8}) = f($

$f(\frac{1}{8}) = \cancel{f(2)} + f(8) + f(\frac{1}{64})$

$f(\frac{1}{64}) = f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8})$

$f(8) = -f(\frac{1}{8})$

$\cancel{f(\frac{1}{n^2}) = f(2) + f(\frac{1}{2n^2})}$

$\cancel{f(\frac{1}{2n^2}) = f(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n})}$

$\cancel{x^2} + 9y^2 - 4\cancel{x} - 18 - \cancel{x^2} - 4y + xy - \cancel{x} - 2y + 2 = 12,$

$9y^2 - 6y - 5x - \cancel{30}^{28} + xy = 0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

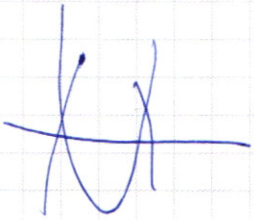
$\cancel{-(12-3\cdot 11}$

$\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right)' = 12\cdot(4x+3)-(12x+11)\,4=0$ $\quad x \neq -\frac{3}{4}$

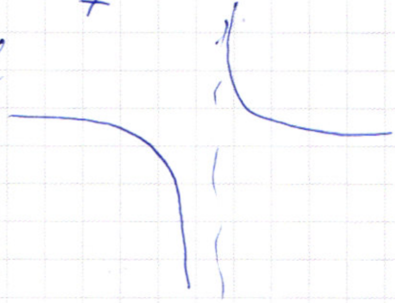
$48x+36-48x-44=0$

$12\cdot(4x+3)-4(12x+13)$

$\frac{11}{3} \to 3\,23$

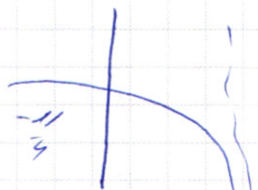


$\frac{-33+11}{-7} = \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7}$



$x\in$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$



$-\frac{11}{4}$

$\cancel{ax^2}+$

$4ax^2+4bx+3ax+3b \le 12x+11$

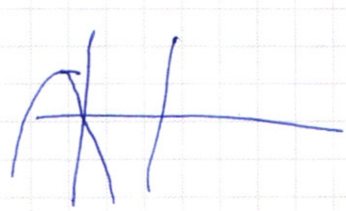
$4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11\le 0$ $\quad x\in\left[-\frac{11}{3};-\frac{3}{4}\right)$

$\left[\begin{cases} f(-\frac{3}{4})<0 \\ f(-\frac{11}{4})<0 \\ a>0 \end{cases}\right.$

$\begin{cases} \cancel{f(4b+3a-D<0} \\ a<0 \end{cases}$

0

x_b



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(6)=0$

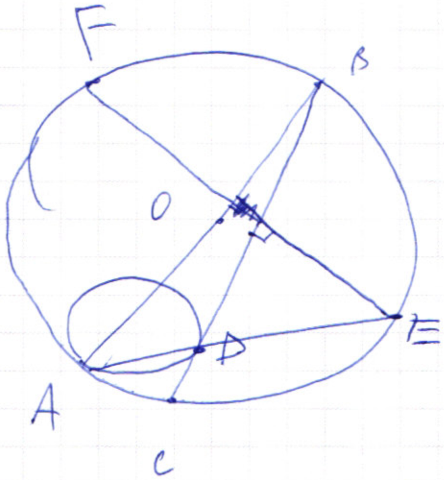
$tg 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$f(6)=f(1)+f(6) \Rightarrow f(1)=0$

$f(4)=0$

~~$f(5)=0$~~

$f(5)=1$



$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

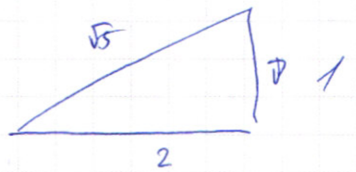
$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=2$

$f(16)=0$

$f(17)=4$



$f(0{,}25)=f(0{,}5)+f(\ldots)$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin 4\beta=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta-\cancel{1}^{\sin 2\alpha}+2\cos 2\alpha\cdot\sin \underbrace{\cancel{4\beta}}_{2\beta\cdot\cos 2\beta}=-\frac{4}{5}$

$\begin{cases}\sin(x+2y)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(x+2y)=\cancel{-\frac{4}{5}}+\sin(x)=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$x+y=\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})$

$\sin(\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})+y)=-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos y+\sin y\cdot\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}$

$-2\cos y+\sin y\cdot\sqrt5=-\frac{8}{\sqrt5}$

$\sin\varphi=\frac{-2}{3}$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt5}{}$

$3\cdot\sin(y-\arcsin(-\frac{2}{3}))=-\frac{8}{\sqrt5}$

$y-\arcsin(-\frac{2}{3})=\cancel{8}\arcsin(-\frac{8}{3\sqrt5})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=2y$

$2y^2-2y-2y+2=0$

$(y^2-2y+1)=0$

$y=1$

$4y^2+9y^2-8y-18y=12$

$13y^2-26y=12$

$-\frac{3}{4}\le\frac{11-3b}{4b-12}$

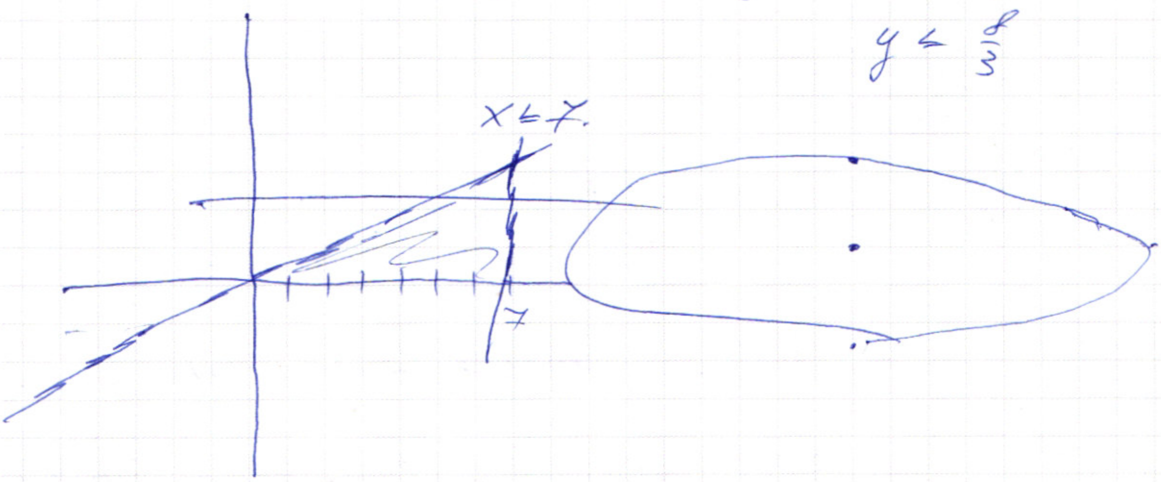
$-12b+36\le 44-12b \Rightarrow 44$

$\ge y \quad y\le\frac{x}{2}$

$x\ge 2y$

$y-1\le\frac{5}{3}$

$y\le\frac{8}{3}$



$\cancel{x^2}-4x+4+9y^2-18y+9-2x^2+8xy-8y^2+2xy-2x-4y+4=25$

$(-x^2-4x)\ (y^2-22y)\ -6x+10xy=8$

$f(1)=-\frac{p}{4}$

$1\le x,y\le 24$

$f(\frac{x}{y})<0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f(2)=0;\ f(3)=0$

$f(6)=f(1)+f(6)$

$f(1)=0$

$\cancel{f(2)=f(1)\cdot f(2)}$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$a-2b$

$\sin 2\alpha$

$x-2=a$

$y-1=b$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$

$(2y-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$,

$(y-1)^2 = \frac{25}{13}$

$\cdot -\frac{4}{5}^2$ $\cdot -\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

$tg\alpha = \cancel{\frac{2tg2\alpha}{}}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$-\frac{25}{13} \le y-1 \le \frac{25}{13}$

$-\frac{12}{13} \le y \le \frac{38}{14}$

$a=(2y-2)(y-1)$

$y=1$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$.

$-\frac{1}{\sqrt5 \cos 2\alpha} = tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta$.

$x = 2y + b$ $b=0$

$b^2 = (2y+b)$

$-\frac{4}{5\cos 2\alpha} = tg 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta$.

$\frac{4}{\sqrt5} \cdot tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt5} \cdot \sin 2\beta = tg 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta$

$tg 2\alpha\left(\frac{4}{\sqrt5} \cdot \cos 2\beta - \cos 4\beta\right) = \sin 4\beta - \frac{4}{\sqrt5} \cdot \sin 2\beta$.

$tg 2\alpha\left(\frac{4}{\sqrt5}\cos 2\beta - \cos 4\beta\right) = \sin 2\beta\left(2\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt5} \cdot \sin 2\beta\right)$

$tg 2\alpha\left(\frac{4}{\sqrt5}\cos 2\beta\right.$

$-12x - 11 = (8x^2 + 30x + 17)(4x+3)$

$-12x - 11 = 32x^3 + 24x^2 + 120x^2 + 90x + 68x + 51$

$32x^3 + 144x^2 + 170x + 62 = 0$

$16x^3 + 72x^2 + 85x + 31 = 0$

$\cancel{16 \cdot \frac{-121 \cdot 11}{64_4} + \frac{72}{8}^{18} \cdot \frac{121}{16_{32}} - 85 \cdot \frac{11}{4}} + 31 = 0$

$\cancel{-121 \cdot 11 + 18 \cdot 121 - 85 \cdot 11} + 31 \cdot 4 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9\cdot(y-1)^2=25$

$\cancel{(x-2y)^2=\cancel{xy}\ y(x-2)-(x-2)=y-1)}$

$(x-2y)^2=x(y-1)-2(y-1)$

$(x-2y)^2=(x-2)\cdot(y-1)$

при $x\neq2$ $y-1=\dfrac{(x-2y)^2}{(x-2)}$

$(x-2)^2+9\cdot\dfrac{(x-2y)^4}{(x-2)^2}=25$

$\begin{cases}(x-2y)^2=\cancel{xy-x-2y+2}\ (x-2)(y-1)\\(x-2)^2+9(y-1)^2=25\end{cases}$

$\cancel{x^2-6xy+4y^2=}$

$(x-2y)^2=\cancel{2x}\ \cancel{2x}\ (x-2y)+2-2x+xy$

$(x-2y)(x-2y-1)=xy+2-2x$

$\begin{cases}(a-2b)^2=ab\\a^2+9b^2=25\end{cases}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a=\dfrac{5b\pm3b}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq 2y$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 18y + 9) = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2 + 18x)^{\log_{12} 13} - 18x$

$x^2 + 18x = t \; ; \; t > 0$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$ $\qquad$ ~~$t = 13^y$~~ $\quad$ ~~$t=1$ верно~~

$5^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t} - t$ $\qquad 2^{\log_2 4} = 4^{\log_2 2}$ $\qquad 3^{\log_3 2^8} = 8^{\log_2 3} = 2^{3 \cdot \log_2 3} = 3^3$

$13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t} - t \leq 0$ $\qquad \log_{12} t = y \Rightarrow 12^y = t$

$13^y - 5^y - 12^y \leq 0$ $\qquad 13^y - 12^y - 5^y \leq 0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x^2+18x = t$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$\cancel{t^{\log_{12} 13}} \cancel{t^{\log_{12} 5}}$

1. $t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 12} \leq 0$

$13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t} - 12^{\log_{12} t} \leq 0$

$\cancel{f(t)' = t^{\log_{12} 13} \cdot \ln t}$

$13^y - 5^y - 12^y \leq 0$

$13^y \leq 12^y + 5^y$

$y \leq 2$ — ?

$\ln 13 \cdot 13^y$ $(12+1)^y$

$12^y \cdot \ln 12 + \ln 5 \cdot 5^y$

$\log_{12} t \leq 2$

$18^2 = \cancel{374}$

$400 - 80 + 4 = 324$

$0 < t \leq 144$

$x^2 + 18x \in (0; 144]$

$x^2 + 18x \leq 144$

$x^2 - 18x - 144 \leq 0$

$D = 324 + 576 = 900$

$x = \frac{18 \pm 30}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 24 \\ x = -6 \end{array}\right.$

$(x-24)(x+6) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 24$

$x^2 + 18x > 0 \Rightarrow x(x+18) > 0$

$\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -18 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (0; 24]$

sin2

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)