МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

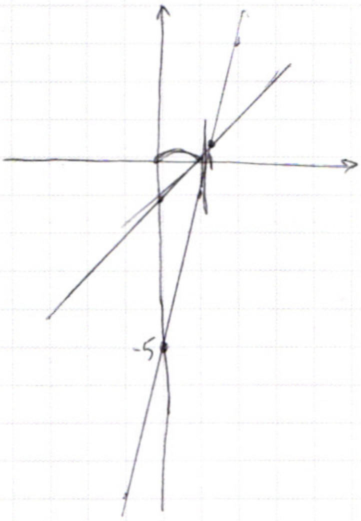
$t + t^{\log_3 4} \ge \cancel{k} + t^{\log_3 5}$

$t \ge t^{\log_3 5} - \cancel{k}\, t^{\log_3 4}$

$\frac{16x-16}{4x-5} \Leftrightarrow 16\left(\frac{x-1}{4x-5}\right)$

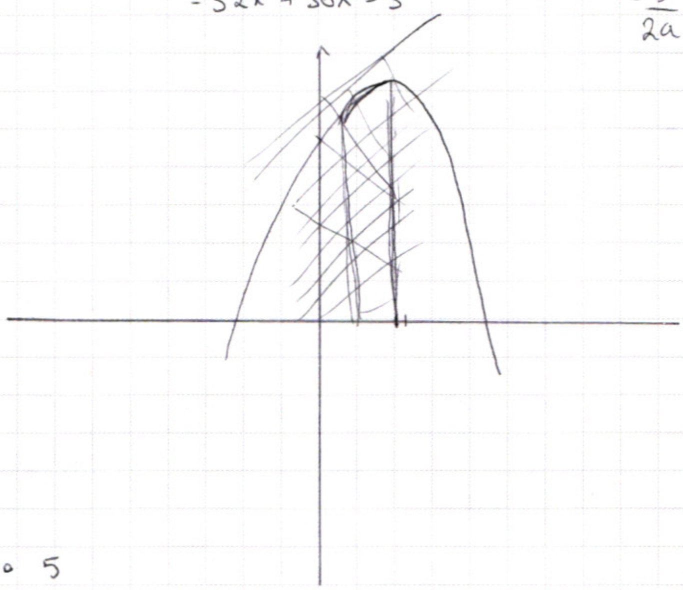
$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b$

$\frac{x-1}{4x-5} > 1$



$\left(\frac{\frac{1}{4}-1}{1-5}\right) = \frac{-\frac{3}{4}}{-4} = \frac{3}{16}$

$-32x^2+36x-3$



$\frac{-b}{2a} = \frac{-36}{-64} = \frac{36}{64} = \frac{4\cdot 9}{2^5} = \frac{9}{2^3} = \frac{9}{8}$

$-2^5 \cdot \frac{9}{2^6} + 4\cdot 9 \cdot \frac{9}{8_2} - 3 = -\frac{9}{2} + \frac{81}{2} - 3$

$\frac{81-9-6}{2} = \frac{81-15}{2}$

$\frac{81-15}{66}$ 33.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

2	•	0
3	•	0
4		0
5	•	1
6		0
7	•	1
8		0
9		0
10		1
11	•	2
12		0
13	•	3
14		1
15		1
16		0
17	•	4
18		0
19	•	4
20		1
21		1
22		2
23	•	5
24		0
25		2

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x=2 \quad f(2) = 0.$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0+0$

$f(3\cdot 2)$

4
6
8
10
12
14
16

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f\left(\frac{2y}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(2y)$

$f(2) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(2y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2y)$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$2^4 = 16$

$\cancel{2^4}$

$\frac{2^4 \cdot 17(17-2^4)}{4}$

$2^2 \cdot 17$

$\begin{array}{r} \overset{5}{17} \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

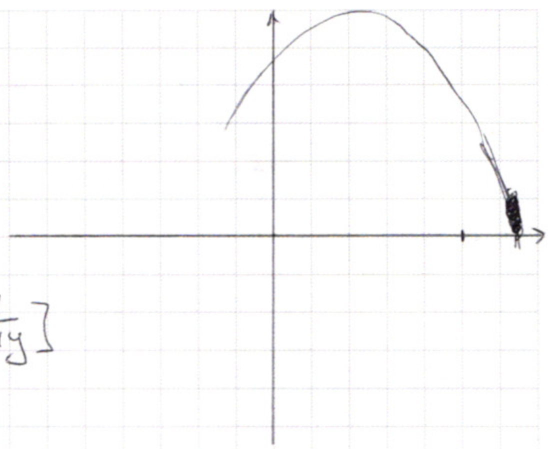
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $(x;y)$ $2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$



$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]$

2 8

3 12

5 прост. 20

7

11 8+3

13

17

19

23

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \ge (10x - x^2)^{\frac{\log_5 5}{\log_5 3}} \Leftrightarrow$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \ge (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 \ge (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$x \in (0; 10)$

$f(x) = 10x - x^2$ вершина $-\frac{10}{2(-1)} = 5.$

$f'(x) = 10 - 2x$

$10 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

$10 \cdot 5 -$

$50 - 25 = 25.$

$5^{\log_3 25}$

$10x - x^2 \in (0; 1)$

$1 + 1 \ge 1.$

$3 + 4 \ge 5.$

$(10x - x^2)^{\log_3 4} > (10x - x^2)^{\log_3 5}$

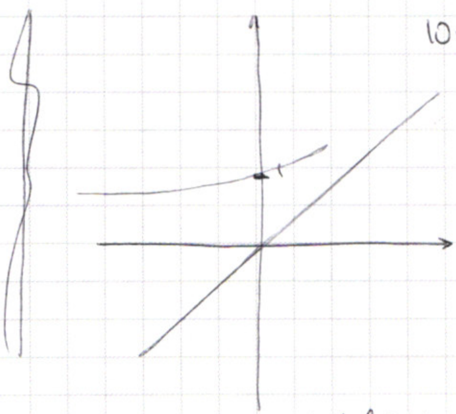
$4 < 5.$

$10x - x^2 \in (0; 1)$

$t + t^{\log_3 4} > 2t$

$t^{\log_3 4} > t \Leftrightarrow$

$t^{\log_3 5} <$



$t \ge t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t \ge t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 3}}$

$t \ge 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

$3 + 1 \ge (3 + 1)$

$t^{1 - \log_3 4} \ge t^{\log_3 5 - \log_3 4} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-2\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad 1-2\sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cos(4\alpha+4\beta)-1.$

$\cos(4\alpha+4\beta)-1.$

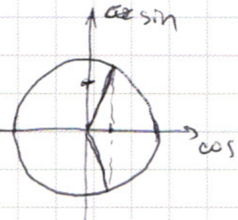
$\sin a+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\frac{a-b}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}$

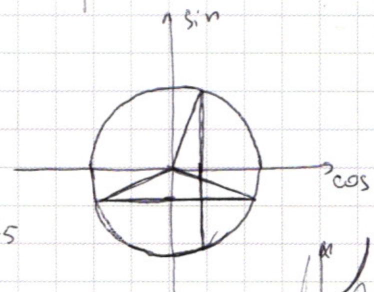
$2\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow$

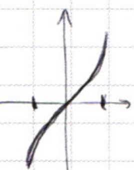
$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k_1 \\ 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k_2 \end{array}\right.$



$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_3 \\ 2\alpha+2\beta = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_4 \end{array}\right.$





$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_5 \\ 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_6 \\ 2\alpha = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_7 \\ 2\alpha = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_8 \end{array}\right.$

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

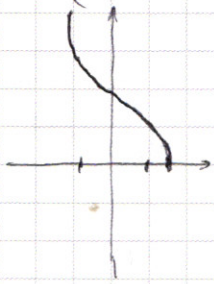
$\frac{x^2}{1-x^2}$

$tg(\arcsin) \quad \frac{1}{1+tg^2(\arcsin)} = 1-\sin^2(\arcsin) = \ldots \quad (1-x^2)(1+\ldots) = 1 \Leftrightarrow 1+\ldots = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow \ldots = \frac{1-1+x^2}{1-x^2}$

$2\alpha = 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\frac{\pi}{2}$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{2}+2\pi k_5$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k_5$



$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k_6 \qquad tg\,\alpha = -1.$

$\alpha = 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\frac{\pi}{2}+2\pi k_6$

$\alpha = \pi+2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{2}+2\pi k_7$

$\frac{\pi}{2}+2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k_7$

$\begin{array}{r} 225 \\ -\ 68 \\ \hline 157 \end{array}$

$2\alpha = \pi+\frac{\pi}{2}+2\pi k_8 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}+2\pi k_8.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$
$x^2+36y^2-12x-36y=4$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1)\\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2)\end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \quad x(x-12)+36y($

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6\\ x^2+36y^2-12x-36y=44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-26xy+12y+x+144y^2=6\\ x^2+36y^2-12x-36y=44\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\begin{array}{r}144\\ -36\\ \hline 108\end{array}$ $\quad 108y^2+13x+48y-26xy=-38.$

$\begin{array}{r}44\\ -6\\ \hline 38\end{array}$ $\quad x^2-12x+36+36\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=0$

$36|4$

$9 \quad 36+9$ $\quad (x-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \Leftrightarrow \quad x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$(x-6)^2=-36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad x^2+36y^2-12x-36y=(x-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-45=$
$=45.$

$$\begin{cases} x-6=0\\ y-\frac{1}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$2xy-12y-x+6 \Leftrightarrow$
$2y(x-6)-(x-6) \Leftrightarrow \quad (x-6)(2y-1)$

$4y^2-4y+1.$

$9(4y^2-4y+1)-9$

$$\begin{cases} (x-12y)^2=(x-6)(2y-1)\\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90\end{cases}$$

$x-12y=x-6-6(2y-1)=x-6-12y+6=x$

$x-6=a$
$2y-1=b.$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab\\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab\\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0\\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Leftrightarrow \qquad a^2=90-9b^2$$

~~$90-9b^2-13ab$~~ $\qquad 90-9b^2-13ab+36b^2=0 \Leftrightarrow$
$90-13ab+25b^2=0.$

~~$169b$~~

$\begin{array}{r}36\\ \times 4\\ \hline 144\end{array}$ $\quad D=169b^2-4\cdot 36b^2=$
$=169b^2-144b^2=25b^2$

$\begin{array}{r}169\\ -144\\ \hline 25\end{array}$ $\quad a=\dfrac{13b\pm 5b}{2} \qquad \left[\begin{array}{l} a=9b\\ a=4b\end{array}\right.$

$81b^2+9b^2=90 \Leftrightarrow \quad b^2=1 \Leftrightarrow \quad b=\pm 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$

$\cancel{10x+(10-x^2)^{\log}}$ $10x-x^2+((10x-x^2))^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \Leftrightarrow$ $\cancel{\log_5(t+t^{\log_3 4}) \geq 5\log_3 t}$

$2 \geq 5^0 \Leftrightarrow 2 \geq 1.$

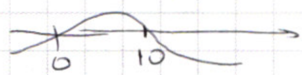
$\cancel{2+2^{lo}}$

$3+3^{\log_3 4} \geq 5^1 \Leftrightarrow 3+4 \geq 5.$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\cancel{(10x-x^2)(100+}$ $\cancel{10-x}$ $10x-x^2>0 \Leftrightarrow x(10-x)>0 \Leftrightarrow$

$x \in (0;10)$



$\log_3 4>1 \Leftrightarrow 4>3$ истина.

$10x-x^2=1 \Leftrightarrow x^2-10x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-4}}{2}.$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t<\log_3 10$

$5^{\frac{\log_5 10}{\log_5 3}}$

$\frac{1}{\log_5 3}=\frac{\log_5 5}{\log_5 3}=\log_3 5$

$t+t^{\frac{\log_5 4}{\log_5 3}} \geq$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \Leftrightarrow t+t^{\log_3 4} \geq t^{\frac{1}{\log_5 3}} \Leftrightarrow$

$t^1+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \Leftrightarrow$ $t+t^{\log_3 4} \geq \log_3 t^{\log_3 5}$

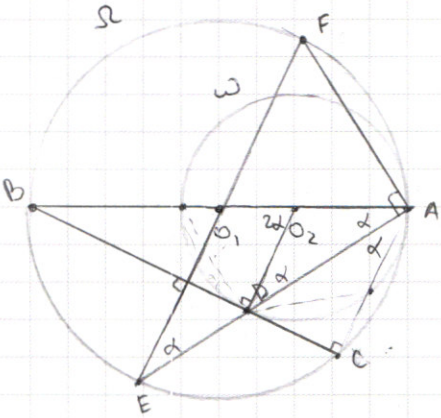
$\cancel{t(1+t^{\log_3 4-1}) \geq t^{\log_3 5}}$

$t+t^{\log_3 4} \geq 2\sqrt{t^{\log_3 4+1}} > t^{\log_3 5} \Leftrightarrow$

$t^{\log_3 4+1} > \log t^{\log_3 5}$

$\log_3 4+1>\log_3 5 \Leftrightarrow$

log



Найти $\widehat{AEF}$

Радиус

$S(AEF)$

$|CD| = \frac{15}{2}$

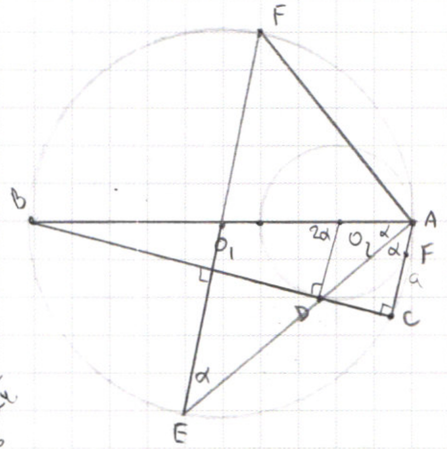
$|DB| = \frac{17}{2}$

$|BD|^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$ — степень точки B относительно ω

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = |BO_2|^2 - r^2$

$|AD||DE| = |BD||DC|$

$|CD|^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2$ — степень точки



$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2R}{|AC|}$

$\frac{17+15}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$\frac{17}{15}a = 2R \Leftrightarrow a = \frac{30}{17}R$

$(2R)^2 = a^2 + \frac{17+15}{2}$

$a = \frac{30}{17}R$

$4R^2 = a^2 + 16$

$4R^2 - \frac{900}{(17)^2}R^2 = 16$

$\frac{1156-900}{289}R^2 = 16$

$\frac{256}{289}R^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\frac{(2^4)^2}{(17)^2}R^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$\frac{2^4}{17}R = 4 \Leftrightarrow$

$\boxed{R = \frac{17}{4}}$

$(R-r)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\cancel{r^2} + R^2 - 2Rr = \cancel{r^2} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$2Rr = R^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$17 \times 17 = 289$

$289 \times 4 = 1156$

$1156 - 900 = 256$

$256 : 2 = 128$

$128 = 56 \cdot 2$

$256 \times 4 = 1024$

$2^{10} = 4 \cdot 256$

$2^4 = 8 \cdot 2 = 16$

$(2^4)^2 = 2^8$

$16^2 \cdot \frac{17}{2} > 30^2$

$225 - 187 = 38$

$225 - 68 = 157$

$225 - 136 = 89$

$17 \times 8 = 136$

$17 \times 4 = 68$

$15 \times 15 = 225$

$125 + 32 = 157$

$17 \times 15 = 255$

$17 \times 7 = 119$

$17 + 17 = 187$

$89 - 17 = 72 + 17 =$

157

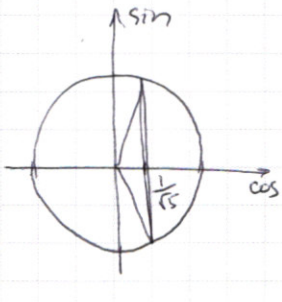
16^2

Задание.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \cancel{\sin}\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_1 \\ 2\beta = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_2 \end{array}\right.$

$k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

тогда $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_3 \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_4 \end{array}\right.$

$k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

1) $2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_5, \ k_5 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_5 \Leftrightarrow$ $\left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2}\right]$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k_5 \Leftrightarrow$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k_5$

$\operatorname{tg}\alpha = -1.$

2) $2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_6, \ k_6 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$2\alpha = 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k_6 \Leftrightarrow$

$\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\pi}{4} + \pi k_6$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \left[\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2}\right] =$

$= \frac{-\frac{1}{2}+1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}$

3) $2\alpha = -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_7, \ k_7 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$2\alpha = -\pi - \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_7 \Leftrightarrow$

$2\alpha = -\frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow$

$\alpha = -\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) =$

$= -\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)} = -\frac{-1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 3.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$$

т.к. $10x-x^2$ находится под знаком логарифма, то $10x-x^2>0$, а значит, можем раскрыть модуль

$$\Leftrightarrow \quad 10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\frac{\log_5(10x-x^2)}{\log_5 3}} \Rightarrow$$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\frac{\log_5 5}{\log_5 3}} \Leftrightarrow \quad 10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5} \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad 10x-x^2 \geq \underbrace{(10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4}}_{A}$$

~~10+~~ приведу тогда:

$$(10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4} \leq 0 \Leftrightarrow \quad (10x-x^2)^{\log_3 5} \leq (10x-x^2)^{\log_3 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10x-x^2>1 \\ \log_3 5 \leq \log_3 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 10x-x^2 \in (0;1) \\ \log_3 5 \geq \log_3 4 \end{cases} \\ 10x-x^2=1 \end{array}\right.$$

т.к. $\log_3 5 > \log_3 4$, то при $10x-x^2 \in (0;1)$ $A<0$, то есть нер-во $(*)$ будет выполняться

$10x-x^2>0 \Leftrightarrow x(10-x)>0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$

$10x-x^2<1 \Leftrightarrow x^2-10x+1>0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{10-\sqrt{96}}{2}; \frac{10+4\sqrt{6}}{2}\right)$

$10x-x^2\in(0;1) \Leftrightarrow x\in(0;5+2\sqrt{6})$ - подходит.

также при $10x-x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=5+2\sqrt{6}$

то есть $x\in(0;5+2\sqrt{6}]$ подходит.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_8,\ k_8 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$2\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k_8 \Leftrightarrow$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_8 \Leftrightarrow$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k_8$

$\operatorname{tg}\alpha = 1.$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 1;\ 3$

Задача №5

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Заметим, что если x - простое, то мы можем найти значение $f(x)$, а если x - составное, то мы можем представить его как произведение простых сомножителей, а дальше как сумму, то есть, например:

$f(6) = f(3) + f(2) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{2}{4}\right] = 0 + 0 = 0.$

составим таблицу для x и $f(x)$

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
2	0	8	0	14	1	20	1
3	0	9	0	15	1	21	1
4	0	10	1	16	0	22	2
5	1	11	2	17	4	23	5
6	0	12	0	18	0	24	0
7	1	13	3	19	4	25	2

(*)

Для $f\left(\frac{1}{y}\right)$ заметим, что $f\left(\frac{2y}{y}\right) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2y) \Leftrightarrow$ $f(2)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(2y) = -f(2) - f(y) = -f(y)$

~~Напишем таблицу значений 2y и f(2y)~~

2y	f(2y)	2y	f(2y)	2y	f(2y)	2y	f(2y)
~~4~~	~~0~~	~~16~~	~~0~~	~~28~~	~~1~~	~~40~~	
~~6~~	~~0~~	~~18~~	~~0~~	~~30~~	~~1~~	~~42~~	
~~8~~	~~0~~	~~20~~	~~1~~	~~32~~	~~0~~	~~44~~	
~~10~~	~~1~~	~~22~~	~~2~~	~~34~~	~~4~~	~~46~~	
~~12~~	~~0~~	~~24~~	~~0~~	~~36~~		~~48~~	
~~14~~	~~1~~	~~26~~	~~3~~	~~38~~		~~50~~	

т.о. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow$

$f(x) < f(y)$

x и y рассматриваются на одинаковых множествах, поэтому рассмотрим таблицу (*)

Будем рассматривать пары $f(x)=0,\ f(y)>0$; $f(x)=1\ \ f(y)>1$ и т.д.

Ответ: 1) если $x \in \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24\}$ $y \in \{5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25\}$

2) если $x \in \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21\}$ ~~$y \in \{11; 17; 19; 22;$~~ $y \in \{11; 13; 17; 19; 22; 23; 25\}$

3) если $x \in \{11; 22; 25\}$ $y \in \{13; 17; 19; 23\}$

4) если ~~$x \in \{13\}$~~ $x = 13$ $y \in \{17; 19; 23\}$

5) если $x \in \{17; 19\}$, то $y = 23$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

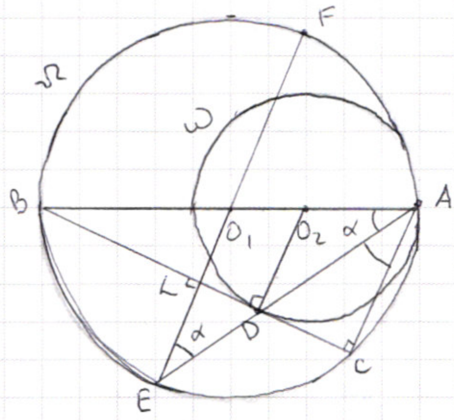
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4



Решение: пусть α - угол $F\hat{E}A$, тогда т.к. $\triangle O_1AE$ - р/б и $O_1\hat{A}E = \alpha$

т.к. $\angle L\hat{D}E = 90^\circ - \alpha$, $\angle L\hat{D}E = A\hat{D}C$ как верт $\Rightarrow$ $A\hat{D}C = 90^\circ - \alpha$, $D\hat{A}C = 90^\circ - A\hat{D}C$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $D\hat{A}C = \alpha$.

то есть AD - биссектриса в $\triangle BAC$ $\Rightarrow$

$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ $\Leftrightarrow$

$|AB| = 2R$, где R - радиус окружности Ω $\Rightarrow$ $\frac{\left(\frac{17}{2}\right)}{\left(\frac{15}{2}\right)} = \frac{2R}{|AC|}$ $\Leftrightarrow$

$\cancel{\frac{17}{15} = 2R}$ $\frac{17}{15}|AC| = 2R$ $\Leftrightarrow$ $|AC| = \frac{30R}{17}$

тогда в $\triangle BAC$ Th Пифагора:

$\begin{cases} |AC|^2 + |BC|^2 = (2R)^2 \\ |BC| = |BD| + |DC| = 16 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $|AC|^2 + 16^2 = 4R^2$, $|AC| = \frac{30R}{17}$ $\Rightarrow$ $\frac{900R^2}{289} + 16^2 = 4R^2$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $4R^2 - \frac{900R^2}{289}R^2 = 16^2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1156-900}{289}R^2 = 16^2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{256}{289}R^2 = 16^2$ $\Leftrightarrow$

$\frac{2^4}{17}R = 16$ $\Leftrightarrow$ $R = 17$.

Запишем Th Пифагора для $\triangle BO_2D$: (R - радиус Ω, r - радиус ω)

$|BO_2|^2 = |O_2D|^2 + |BD|^2$
$|BO_2| = |BA| - |O_2A| = 2R - r$
$|O_2D| = r$
$\Rightarrow$ $(2R-r)^2 = r^2 + |BD|^2$

$\Leftrightarrow$ $4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + |BD|^2$ $\Leftrightarrow$ $4Rr = 4R^2 - |BD|^2$ $\Leftrightarrow$ $r = \frac{4R^2 - |BD|^2}{4R}$

$R = 17$, $|BD| = \frac{17}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $r = \frac{4\cdot 17^2 - \frac{1}{4}\cdot 17^2}{4\cdot 17}$ $\Leftrightarrow$ $r = 17 - \frac{1}{16}\cdot 17$ $\Leftrightarrow$ $r = \frac{17\cdot 16 - 17}{16}$ $\Leftrightarrow$

$r = \frac{17\cdot 15}{16}$ $\Leftrightarrow$ $r = \frac{255}{16}$

Найдем $|AC|$ из соотношения ранее:

$$\left.\begin{array}{l}|AC| = \dfrac{30R}{17}\\ R=17\end{array}\right| \Rightarrow |AC| = 30.$$

Тогда в прямоугольном тр-ке ADC:
Th Пифагора:

$$\left.\begin{array}{l}|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2\\ |AC| = 30\\ |CD| = \dfrac{15}{2}\end{array}\right| \Rightarrow |AD|^2 = 900 + \frac{15^2}{4} \Leftrightarrow |AD|^2 = \frac{15^2\cdot 2^2\cdot 2^2 + 15^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$|AD|^2 = \frac{15^2\cdot 17}{4} \Leftrightarrow |AD| = \frac{15\sqrt{17}}{2}$$

Из теоремы о произведении отрезков хорд: для пересечения хорд AE и BC:

$$|BD||DC| = |AD||ED| \Leftrightarrow |ED| = \frac{|BD||DC|}{|AD|}$$

То есть $|ED| = \dfrac{\left(\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{17}}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$$|AD| + |ED| = \frac{16\sqrt{17}}{2}$$

Заметим, что поскольку $(EF) \perp (BC)$, а $[BC]$ - хорда Ω, то $[EF]$ проходит через центр окружности Ω, то есть $[EF]$ - диаметр и $EF = 2R = \cancel{2\cdot 30 = 8460}$, ~~а также~~ $= 2\cdot 17$
это означает, что $\triangle FAE$ - прямоугольный.

Th Пифагора для $\triangle EAF$:

$$|EF|^2 = |EA|^2 + |AF|^2 \Leftrightarrow |AF|^2 = |EF|^2 - |EA|^2 \Leftrightarrow |AF|^2 = 2^2\cdot 17^2 - (|AD| + |DE|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{|AF|^2 = 2^2\cdot 17^2 - \frac{16^2\cdot 17}{2} \Leftrightarrow |AF|^2 = 2^3\cdot 17(17 - 2^5)}$$

т.о. $|AF|^2 = 2^2\cdot 17^2 - \dfrac{16^2\cdot 17}{4} = \dfrac{2^4\cdot 17^2 - 2^8\cdot 17}{4} = \cancel{\dfrac{2^6(15^2 - 2^2\cdot 17)}{4}} =$

$= \cancel{\dfrac{2^5(225 - 68)}{4} = 2^4\cdot 89 = 2^4\cdot 157} = \dfrac{2^4\cdot 17^2 - 2^8\cdot 17}{4} = 2^2\cdot 17 = 68$

~~т.о. $|AF| = 4\sqrt{157}$~~ т.о. $|AF| = 2\sqrt{17}$

~~Тогда $S(AEF) = \frac{1}{2}|AF||AE| = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{89}\cdot\frac{16\sqrt{17}}{2} = 16\sqrt{17}\sqrt{157}$~~

~~$\cos\alpha = \dfrac{|AE|}{|EF|} = \dfrac{\left(\frac{16\sqrt{17}}{2}\right)}{60} = \dfrac{16\sqrt{17}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 15} = \dfrac{2\sqrt{17}}{15}$~~

~~$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{17}}{15}\right)$~~

$S(AEF) = \frac{1}{2}|AF||AE| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{16\sqrt{17}}{2} = 8\cdot 17 = 136$

~~$\cos\alpha = \frac{|AE|}{|EF|}$~~

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|AF|}{|AE|} = \dfrac{2\sqrt{17}}{\left(\frac{16\sqrt{17}}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$

$\widehat{EFA} = \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$

~~Ответ: $R = 30$, $r = \frac{255}{16}$, $\widehat{EFA} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{17}}{15}\right)$, $S(AEF) = 16\sqrt{17}\sqrt{157}$~~

Ответ: $R = 17$
$r = \dfrac{255}{16}$
$\widehat{EFA} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$
$S(AEF) = 136.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=x-6 \\ b=2y-1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=90 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \cancel{ab\geq 0} \quad \begin{cases} a-6b>0 \\ ab>0 \\ (a-6b)^2=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>6b \\ ab>0 \\ a^2-13b+36b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>6b \\ ab>0 \\ a=\frac{13b\pm 5b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>6b \\ ab>0 \text{ — огр.} \\ \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ 9b>6b \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ 4b>6b \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ b>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ b<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставим в (2):

1° $\begin{cases} a=9b \\ b>0 \end{cases}$ $\quad 81b^2+9b^2=90 \Leftrightarrow b^2=1 \Leftrightarrow b=\pm 1 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b=1.$

2° $\begin{matrix} a=4b \\ b<0 \end{matrix}$ $\quad 16b^2+9b^2=90 \Leftrightarrow b^2=\frac{90}{25} \Leftrightarrow b=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \overset{b<0}{\Leftrightarrow} b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

То есть $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{14\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$

* Подставим в исходные обозначения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-\frac{14\sqrt{10}}{5} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{30-14\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

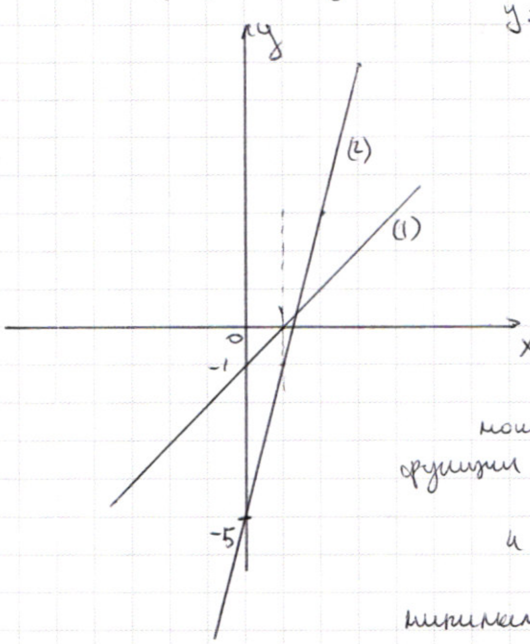
Ответ: $\left\{ (15;1);\ \left(\frac{30-14\sqrt{10}}{5};\ \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right) \right\}$

Задача № 6

Рассмотрим, какие значения может принимать $\frac{16x-16}{4x-5} = 16\frac{x-1}{4x-5}$

Построим ~~их гр~~ графики ~~$y=16x-16$~~ $y = x-1$ (1)

$y = 4x-5$ (2)



То есть на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ ~~дл~~

$x - 1 > 4x - 5$

и при этом оба графика ниже оси Ox, а значит дробь $16\frac{x-1}{4x-5}$ всегда больше ~~нуля~~ 0

Можно заметить, что наибольшее значение функции $16\frac{x-1}{4x-5}$ принимает при $x = \frac{1}{4}$, и равно $16 \cdot \frac{-\frac{3}{4}}{-4} = 3$, а наименьшее в точке $x = 1$, и значение 0.

Т.о. $16\frac{x-1}{4x-5}$ - монотонно убывающая функция, на промежутке от $\frac{1}{4}$ до 1 принимающая значения от 0 до 3.