МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)=$

$=\sin(2\alpha)(2\cos^2(2\beta)-1)+\sin 2\alpha+2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=$

$=2\cos(2\beta)(\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha))=$

$=2\cos(2\beta)\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{4}{5}$

1))

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ (по ОТТ)

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

Обозначим $t=\sin 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-t^2}$

$2t+\sqrt{1-t^2}=-1$

$2t-\sqrt{1-t^2}=-1$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \cos 2\alpha=1 \ (3.1) \\ \cos 2\alpha=-\frac{3}{5} \ (2.2) \end{array}$

$1-t^2=(-1-2t)^2$

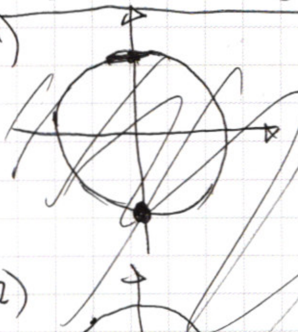
$1-t^2=1+4t^2+4t$

$0=5t^2+4t=t\cdot(5t+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \quad \cancel{\Rightarrow \cos 2\alpha=1} \\ t=-\frac{4}{5} \quad \cancel{\Rightarrow \cos 2\alpha=\frac{3}{5}} \end{array}\right.$

1) $\sin 2\alpha=0 \Rightarrow 0+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\alpha=-1$

2) $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \Rightarrow$ $\cancel{\frac{8}{5\sqrt5}}$ $-\frac{8}{5}+\cos 2\alpha=-1 \Rightarrow \cos 2\alpha=\frac{3}{5}$.

1)



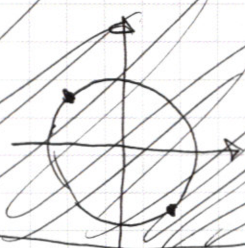
$\cancel{\sin 2\alpha=0}$

$\cancel{\cos 2\alpha=-1}$

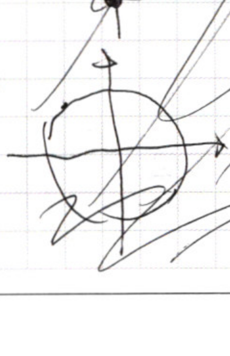
$\cancel{\Rightarrow 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

$\cancel{\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

$\cancel{tg\,\alpha=-1}$



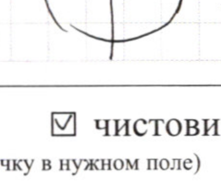
2)



$\cancel{\cos 2\alpha=\frac{3}{5}}$

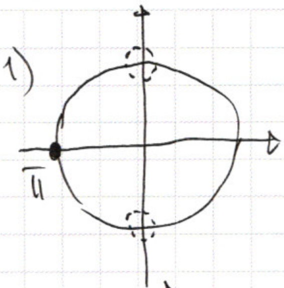
$\cancel{\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}} \Rightarrow$

3.1)



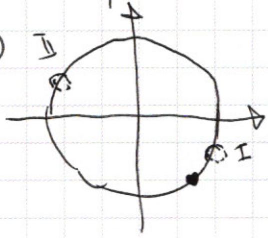
$2\alpha=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\,\alpha=0.$

1) 

$\left.\begin{matrix}\sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -1\end{matrix}\right| \Rightarrow 2\alpha = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $tg\,\alpha$ – не определен.

2) 

$\left.\begin{matrix}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5}\end{matrix}\right| \Rightarrow 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = -\frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

I $\quad \alpha = -\frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (III четверть)

$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2}$

II $\quad \alpha = \pi - \frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{8}{5}$

$2 \cdot \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

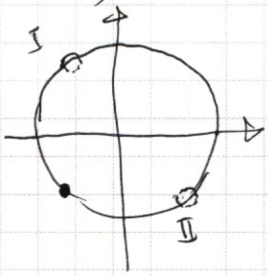
Аналогично $t = \sin 2\alpha \Rightarrow \quad 2t \pm \sqrt{1-t^2} = -1$

$(2t+1) = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow \left[\begin{matrix}t = 0 \\ t = -\frac{4}{5}\end{matrix}\right.$

1) $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -1$ Аналогично $tg\,\alpha$ – неопр.

2) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow 2\alpha = \pi + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

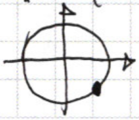


I $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

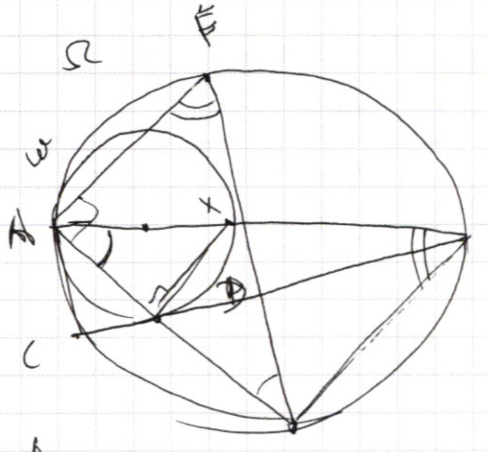
$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg\,\alpha = -2$

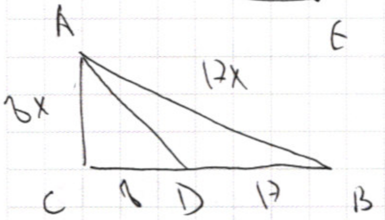
II Аналогично $tg\,\alpha = -2$

3) ~~$\cos 2\alpha$~~ $\sin 2\alpha = 0 \quad \cos 2\alpha = 1 \quad (3.1)$ $\qquad$ Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0.$

4) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$  (1.2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





№4

По т. об окружности, вписанной в сегмент: E – середина дуги BC => AE – бис-са ∠BAC.

Рассмотрим прям. △ABC (т.к. AB-диаметр)

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{8}$ => Обозначим $AB = 17x$, $AC = 8x$.

(т.к. AD – бис-са)

Тогда по Т. Пифагора для △ABC:

$289x^2 = 64x^2 + 625$

$225x^2 = 625$

$9x^2 = 25 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

$AB = \frac{17\cdot5}{3} = \frac{85}{3}$

Обозначим вторую т. пересечения AB с ω за т. X.

Тогда степень т. B отн. окр. ω: $BD^2 = BX\cdot BA$

$\overset{\shortparallel}{289} = BX\cdot\frac{85}{3} = \frac{17\cdot5}{3}$

$BX = \frac{17\cdot3}{5} = \frac{51}{5} = 10\frac{1}{5} = 10{,}2$

$\Rightarrow AX = AB - BX = \frac{17\cdot5^2 - 17\cdot3^2}{15} = \frac{17\cdot16}{15} = \frac{272}{15}$

AD – бис-са в △ABC = $AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot CD = 8\cdot17\cdot\frac{25}{9} - 8\cdot17 = 8\cdot17\cdot\frac{16}{9} \Rightarrow AD = \frac{4}{3}\sqrt{17\cdot8}$

Тогда по т. Пифагора в △ADX (AX-диаметр => ∠ADX = 90°):

$DX^2 = AX^2 - AD^2 = \frac{17^2\cdot16^2}{15^2} - \frac{16}{9}\cdot17\cdot8 = \frac{16\cdot17}{9}\left(\frac{17\cdot16 - 25\cdot8}{25}\right) = \cancel{\frac{16\cdot17\cdot272}{15^2}} = \cancel{\frac{16\cdot17}{15^2}} \Rightarrow \cancel{DX = \frac{16\cdot17}{15}}$

$\cancel{DX = AX}$ $\cancel{DX = \sqrt{\frac{16\cdot17\cdot4}{15^2}}}$ $DX = \frac{16\cdot17\cdot6^2\cdot2}{15^2} = \frac{24}{15}\sqrt{34}$

$\cos\angle DAX = \frac{AD}{AX} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\sqrt{17\cdot 8}\cdot 15}{17\cdot 16} = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

$\angle DAX = \angle EAB = 90° - \angle ABE = 90° - \angle AFE$ (как впис. $\angle$)

EF — диаметр, т.к. E — середина дуги BC и $EF \perp BC$ $\Big| \Rightarrow$

$90° - \angle AFE = \angle AEF \Rightarrow \cos\angle AEF = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AEF = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\triangle AXP \sim \triangle ABE$ (т.к. прям. $\triangle$ с общим углом) $k = \frac{AB}{AX} = \frac{17\cdot 5\cdot 15}{3\cdot 17\cdot 16} = \frac{25}{16}$

$S_{\triangle APX} = \frac{1}{2}AD\cdot DX = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{17\cdot 8}\cdot\frac{24}{5}\sqrt{34} = \frac{16\cdot 17\cdot 4}{5} = \frac{948}{5}$

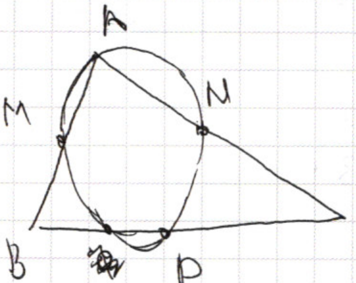
$S_{\triangle ABE} = k^2\cdot S_{\triangle ADX} = \frac{25^2}{16^2}\cdot\frac{16\cdot 17\cdot 4}{5} = \frac{125\cdot 17}{4} = \frac{2125}{4} = 531,25$

$\triangle ABE = \triangle EFA$ (по 2 катетам — AE — общий и диаметры) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle EFA} = 531,25$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{3}$, $R_\omega = \frac{272}{15}$, $\angle AFE = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$, $S_{\triangle AFE} = 531,25$

№7

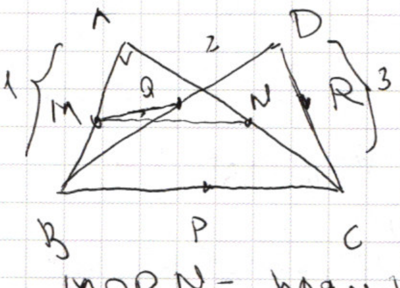


Рассмотрим пл-ть ABC: т. M, N, P — середины ст. AB, AC, BC соответственно и т. A лежат на одной сфере и в одной пл-ти $\Rightarrow AMPN$ впис.

$\triangle MAN = \triangle NPA$ (по 3 сторонам: $AM = \frac{1}{2}AB = PN$, аналогично AN и MN общ.)

$\Rightarrow \angle MAN = \angle MPN$, и по впис. четырех-ку $\angle MAN + \angle MPN = 180° \Rightarrow$

$\angle MAN = \angle MPN = 90° \Rightarrow \triangle BAC$ — прям. $\triangle \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1 + AC^2}$



Заметим, что $RNMQ$ — пар-м (где R — серед. CD),

(т.к. MQ и RN — ср. лин. $\Rightarrow MQ \parallel AD \parallel RN$ Q — серед. BD)

$MQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}RN$)

И при этом $MQRN$ — впис. (т.к. на одной пл-ти) $\Rightarrow$

$MQRN$ — прям-к.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$ При этом: ОДЗ: $(x-2)\cdot(y-1)\geq 0$

$x^2+4y^2-4xy-xy+x+2y-2=0$

$x^2+x\cdot(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$D = 1+25y^2-10y-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1-3y+3}{2}=y+1$

$x_2=\frac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2$

$x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2-$ [illegible] $=0$

I $\cancel{9y^2+18y+9+}$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$D=16+24=40$

$y_1=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

II $16y^2+4-16y+9y^2-16y-8-18y-12=0$

$25y^2-50y-16=0$

$D=2500+1600=4100$

$y_1=\frac{50\pm10\sqrt{41}}{50}=1\pm\frac{\sqrt{41}}{5} \Rightarrow x=4\pm\frac{4\sqrt{41}}{5}-2=2\pm\frac{4\sqrt{41}}{5}$.

~~Ответ:~~ $\cancel{\left(2\pm\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\ \left(2\pm\frac{4\sqrt{41}}{5};\ 1\pm\frac{\sqrt{41}}{5}\right)}$

ОДЗ: $(x-2)(y-1) \geq 0$ и $x-2y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2y$

I $\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2}; 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$x \leq 2y$ $\qquad$ $2-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$ – подходит.

II $\left(2+\frac{4\sqrt{41}}{5}; 1+\frac{4\sqrt{41}}{5}\right)$ $\left(2-\frac{4\sqrt{41}}{5}; 1-\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$

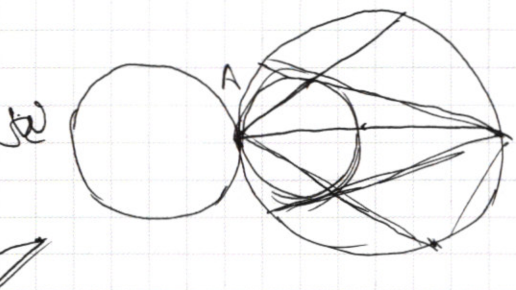
$x \geq 2y$, т.к. $\frac{4\sqrt{41}}{5} \geq \frac{2\sqrt{41}}{5}$ $\qquad$ $x \leq 2y$

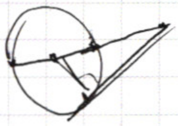
Ответ: $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(2+\frac{4\sqrt{41}}{5}; 1+\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} ay = bx \quad a = \\ xy = 8\cdot 17 \\ b(a+b) = 17^2 \end{cases}$$

$\frac{a}{x} = \frac{a+b}{x+y} = \frac{b}{y}$





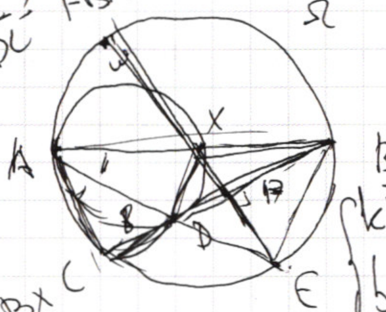
$x\cdot y = 8\cdot 17$

$17^2 = (b-a)\cdot a$

$\frac{17^2}{x}$

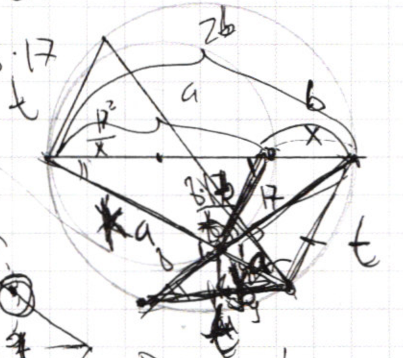
$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BD}{FBX}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$



$BD^2 = BX\cdot BA = 17^2$

$AD\cdot DE = 8\cdot 17$

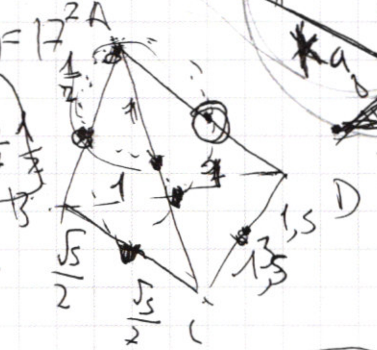


$BD\cdot BC = AB\cdot BX$

$$\begin{cases} k^2\cdot a\cdot b = 8\cdot 17 \\ b\cdot(a+b) = 17^2 \end{cases}$$

$\frac{k^2 a}{a+b} = \frac{8}{17}$

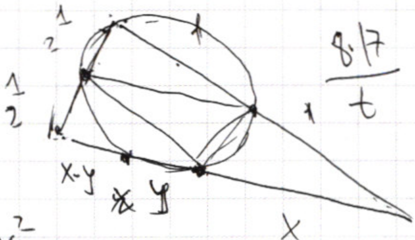
$R = \frac{ab c}{4S}$



$\frac{8}{a} = \frac{b}{17}$

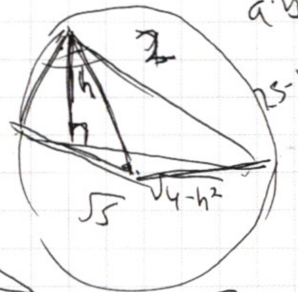
$a\cdot b = 8\cdot 17$

$\cos\varphi = \frac{1+4-5}{}$



$\frac{8\cdot 17}{t}$

$\frac{ka}{a} = k$



$25 - 16 = 3$

$\frac{1}{2}\cdot 1 = x\cdot x^2$

$\frac{1}{2} = x^3 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\frac{8\cdot 17}{t^2} = k$

$\frac{1}{2}\cdot 1 = (x-y)\cdot x \qquad \frac{1}{2} = x^2 - xy$

$x\cdot y = 1 \qquad x\cdot(x+xy) = 2$

$$\begin{cases} x^2 - xy = \frac{1}{2} \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$$

$2x^2 = \frac{5}{2}$

$x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

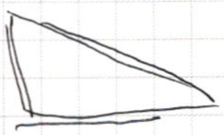
$y =$

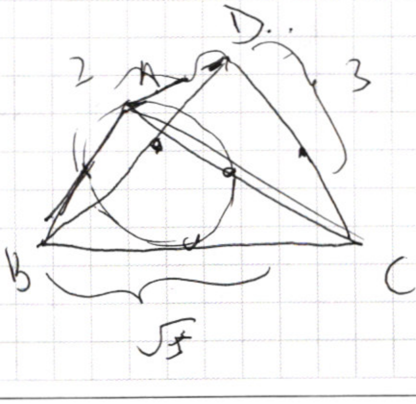
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

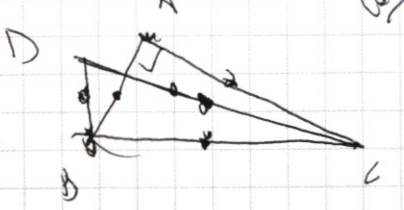
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta +$

$+ \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$

$$\begin{cases} a\cdot\sqrt{1-a^2} + b\cdot\sqrt{1-b^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ a\cdot(1-b^2) - a\cdot b^2 + 2\sqrt{1-a^2}\cdot b\cdot\sqrt{1-b^2} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$3^{\frac{13}{8}} = 3$

$x \geq 2y$

$x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$x\cdot(y-1) - 2\cdot(y-1)$

$x-2y = \sqrt{(y-1)\cdot(x-2)}$ $\quad (x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0$ $\quad x^2 + 4y^2 - 2xy = xy - x - 2y + 2$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 - 25 = 0$ $\quad x^2 + x + 4y^2 - 2y - 3xy + 2 = 0$

$4\cdot(y-1)^2 + 9\cdot(y-1)^2 - 25 =$ $\quad x^2 + x\cdot(1-3y) + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$0 \geq 13\cdot(y-1)^2 - 25$ $\quad D = 1 + 9y^2 - 6y + 16y^2 + 8y - 8 =$

$25 \geq 13\cdot(y-1)^2$ $\quad 48 + 16 = 64$ $\quad = 25y^2 + 2y - 7$

$\frac{5}{\sqrt{13}} \geq (y-1)$

64

$D = 16 - 36y^2 + 72y + 48 = -36y^2 + 72y + 64$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

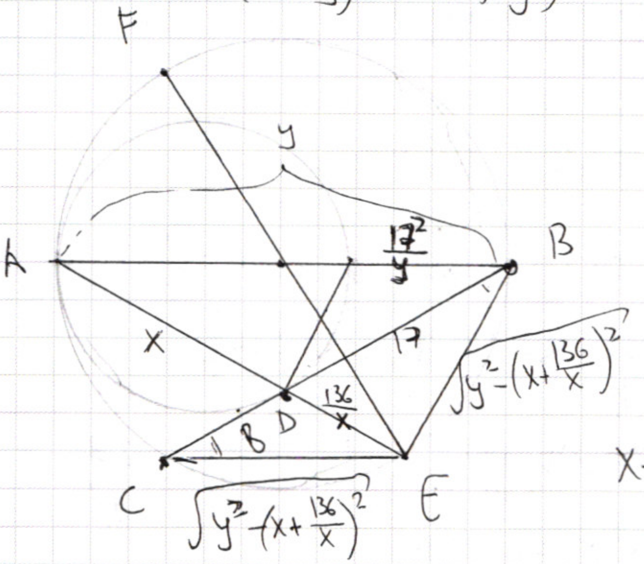
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ \cancel{x^2+9y^2}=(x-2)^2+(3y-3)^2=1 \end{cases}$$

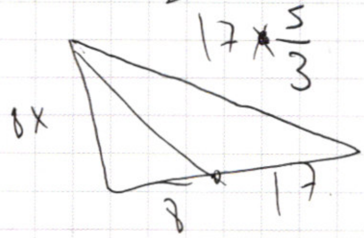
13 +13



$\frac{17\cdot 8}{x}$

$x+\frac{136}{x}=\frac{x^2+136}{x}$

$$\frac{\frac{136}{x}}{\sqrt{y^2-(x+\frac{136}{x})^2}}=\frac{\frac{17y^2}{17}}{17}=\frac{1}{y^2}$$



$17\cdot\frac{5}{3}$

$$\frac{(8\cdot 17)^2\cdot y^4}{x^2}=y^2-(x+\frac{136}{x})^2$$

$17^2x^2-64x^2=625$

$225x^2=625$

$9\cdot x^2=25$

$x=\frac{5}{3}$

$17\cdot 16=102$ $\quad$ $17\cdot 8=136$ $\quad$ $136\cdot 2=272$

$\frac{17}{2}$

$272=4\cdot 68=4\cdot 34\times 272$

$72=6^2\cdot 2-$

$125\times 17=2125$

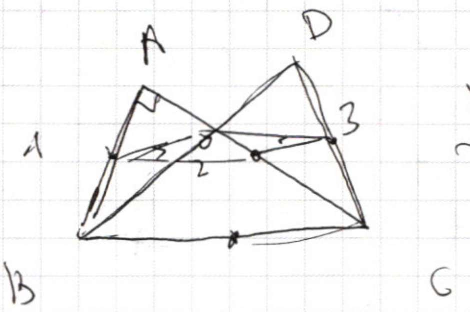
$1\le x\le 24$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-10y+9$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

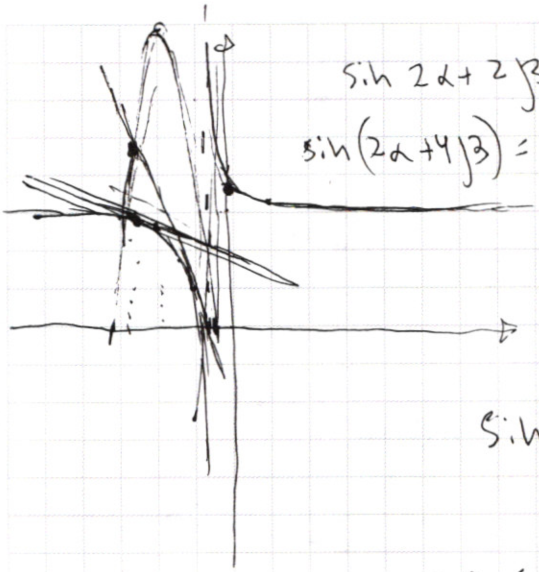
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin 2\alpha + 2\beta = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{-33+44}{-11+9} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8}$

$2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin 2\beta \cdot \cos^2\beta$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2 - 30 - 17$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} - 8 \cdot \frac{11^2}{16^2} + 30 \frac{11}{4} + 17 = \quad 22 - 17 = 5$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{15^2}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{15^2}{8} - 17 = \frac{225 - 136}{8} =$

$= \frac{89}{8} \approx 11$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

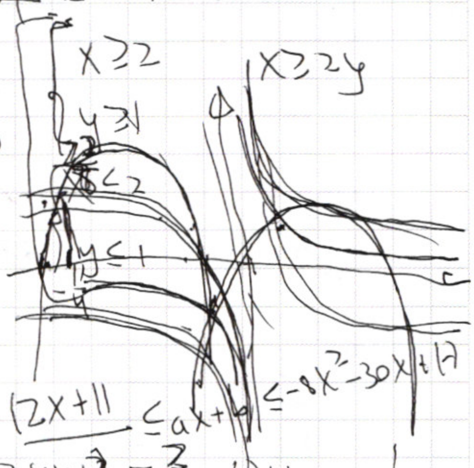
$\frac{1}{x}$

$(x-2)^2 = 25 - 9(y-1)^2$

$x \ge 2$

$y \ge 1$

$x \ge 2y$



$\le -8x^2 - 30x + 17$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$

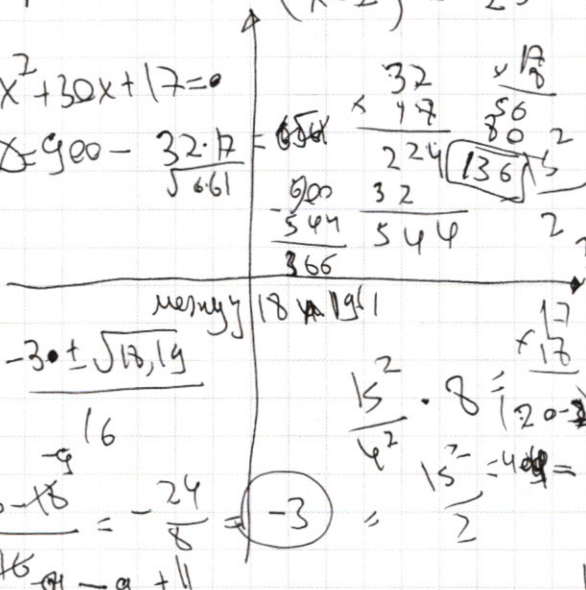
$D = 900 - 32 \cdot 17 = 356$

$\sqrt{661}$

$32 \cdot 17 = 224 + 320 = 544$; $900 - 544 = 356$; $\boxed{136}$

$18^2 = 324$

между 18 и 19



$\frac{2}{-1} =$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + 4$

$-\frac{2}{9} - (2+1) = \frac{-1}{-1}$

$-12 + 3 = -9$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \boxed{3 + \frac{2}{4x+3}}$ — гипербола

$x = \frac{-30 \pm \sqrt{18,19}}{16}$

$17 \cdot 17 = 289$

$\frac{15^2}{4^2} \cdot 8 = \frac{15^2}{2} = 400$

$-8x^2 - 30x + 17 = -8(x^2 + \frac{30}{8}x) + \frac{17}{8} =$

$= -8(x^2 + \frac{15}{8})^2 + \frac{15^2}{2} + \frac{17}{8}$

$\frac{-24+11}{-8+3} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

$\frac{-30-18}{16} = -\frac{24}{8} = -3$

$-9 + 11$

$3 + \frac{2}{12+3}$

$\frac{-\frac{11}{4} \cdot 3 + 11}{-11 + 3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8}$

$\frac{-30+18}{16} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)