МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Решение.

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2(\sin(2\alpha+2\beta))\cdot\cos 2\beta =$

$= 2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

2) $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta$, значит

$\sin(2\alpha+2\beta)+\cos 2\beta = 0.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2

Решение.

1) $9x^2+y^2-18x-12y=(3x-3)^2+(y-6)^2-45=45 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3x-3)^2+(y-6)^2=90$

2) $(y-6x)^2=xy-6x-y+6 \Leftrightarrow y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$. Решаем относительно y:

$D=(13x-1)^2-4(36x^2+6x-6)=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$=(5(x-1))^2$

$y_1=\frac{+13x-1+5x-5}{2}=\frac{18x-6}{2}=9x-3.$

$y_2=\frac{13x-1-5x+5}{2}=\frac{8x+4}{2}=4x+2.$

3) Подставим получаем:

1) $(3x-3)^2+(9x-9)^2=90$

$(x-1)^2+(3x-3)^2=10.$

$10(x-1)^2=10$

$(x-1)^2=1$

$x_1=0$ или $x_2=2$

Тогда: $y_1=-3$; $y_2=15.$

$(0;-3)$ не подходит, т.к $y-6x$ должно >0.

Ответ: $(2;15)$; $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1; -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$.

2) $(3x-3)^2+(4x-4)^2=90.$

~~$9x^2-18x+9+16x^2-64x+64=90$~~

~~$25x^2-82x+71=90$~~

~~$25x^2-82x-19=0$~~

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=25(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$

$x_1=3\sqrt{\frac{2}{5}}+1$ $\qquad$ $x_2=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1.$

$y_1=12\sqrt{\frac{2}{5}}+6$ не подходит $\qquad$ $y_2=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Решение.

1) По условию получаем, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$. $f(1) = 0$, т.к $f(1) = 2f(1)$. $f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

2) $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$, т.к $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое.

3) $f(4) = 2f(2) = 0$; $f(6) = f(2)+f(3) = 0$; $f(8) = f(2)+f(4) = 0$; $f(9) = f(3)+f(3) = 0$; $f(10) = f(2)+f(5) = 1$; $f(12) = f(3)+f(4) = 0$; $f(14) = f(2)+f(7) = 1$; $f(15) = f(3)+f(5) = 1$; $f(16) = f(2)+f(8) = 0$; $f(18) = f(2)+f(9) = 0$; $f(20) = f(5)+f(4) = 1$; $f(21) = f(3)+f(7) = 1$; $f(22) = f(2)+f(11) = 2$; $f(24) = f(4)+f(6) = 0$; $f(25) = 2f(5) = 2$; $f(26) = f(2)+f(13) = 3$; $f(27) = f(3)+f(9) = 0$; $f(28) = f(2)+f(14) = 1$

4) Среди $x \in [4;28]$, где $x \in N$, $f(x)=0$ - 9 штук; $f(x)=1$ - 8 штук; $f(x)=2$ - 3 штуки; $f(x)=3$ - 2 штуки; $f(x)=4$ - 2 штуки; $f(x)=5$ - 1 штука.

5) Т.к $f(x)-f(y)<0$, то $f(x)<f(y)$. То всего комбинаций:

$1 \cdot 24 + 2 \cdot 22 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 17 + 8 \cdot 9 = 24 + 44 + 40 + 21 + 72 =$

$= 68 + 61 + 72 = 140 + 61 = 201$ пара чисел

Ответ: 201 пара

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 3.

Решение.

1) Запишем для нашего неравенства ОДЗ: $26x - x^2 > 0$.
Значит $|x^2 - 26x| = 26x - x^2$. Пусть $t = 26x - x^2$. Тогда неравенство принимает вид: $t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

2) $13^{\log_5 t} = 13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}} = t^{\frac{1}{\log_{13} 5}} = t^{\log_5 13}$; $t = t^{\log_5 5}$.

3). $t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5 13}$ $|:t$, т.к $t > 0$

$t^{\log_5 12 - \log_5 5} + 1 \geq t^{\log_5 13 - \log_5 5}$.

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

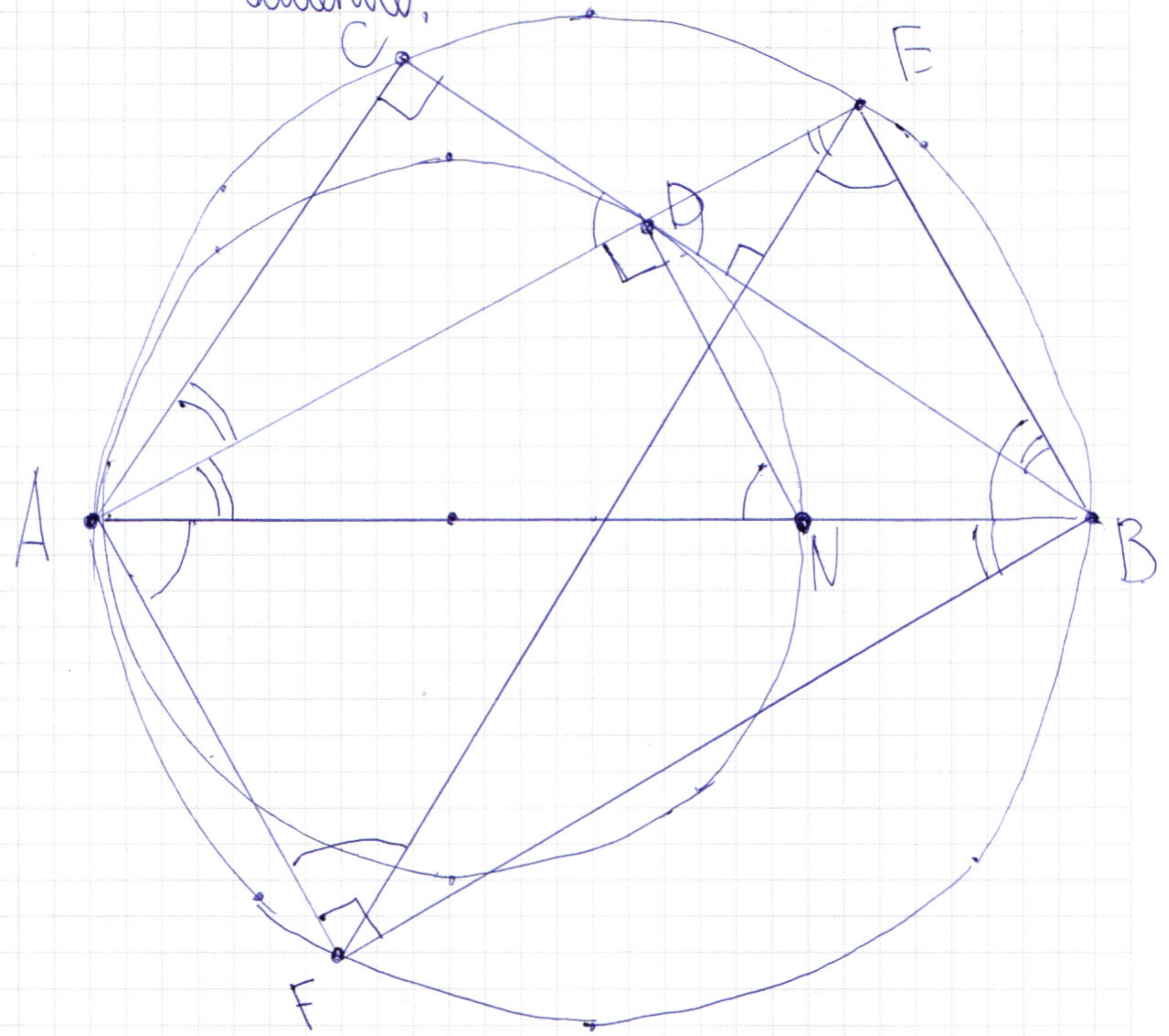
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

Решение.



1) Очевидно, что AB также диаметр и для окружности ω. $\angle ACB = \angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$, т.к опираются на диаметр, Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$. $\alpha + \beta = 90^\circ$. $\angle CDA = \angle EDB = \angle BEF$. $\angle CAD = \angle DEF = \angle EBC$. Т.к $\angle ADN = 90^\circ$ (N - пересеч. AB с $\omega \Rightarrow AN$ - диаметр), то $\angle CDA = \angle DNA$ (т.к угол между касательн. и хордой),

значит $\angle DAN = \cancel{\beta}\alpha$. $\angle FAB = \angle FEB = \beta$, а также $\angle AEF = \angle ABF = \alpha$ (из вписанности $AEBF$).

Отсюда следует, что $AEBF$ – прямоугольник (т.к ~~сумма трех углов них~~ три угла в ней $90°$).

$CD = 12$, $BD = 13$. Пусть $DE = 12x$, тогда $AB = \frac{13}{x}$.

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $=(x-1)(y-6)$

+

4б.

1) $y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \Rightarrow y^2-12yx+36x^2=xy-6x-y+6$

$9x^2-18x+9$ $\quad y^2-12y+36$ $\quad y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

2) $\underbrace{(3x-3)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-6)^2}_{\geq 0}=0$

$\begin{cases} (3x-3)^2+(y-6)^2=0 \\ x=1 \quad y=6 \end{cases}$

$\sin 2\alpha\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2x+4\cos 2\alpha=-1 \quad :\cos 2\alpha$

$tg 2\alpha+4=-\frac{1}{\cos 2\alpha}$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

t $\quad 13^{\log_5 t}$ $\quad t^\alpha-t=t(t^{\alpha-1}-1)$

$|t|^{\log_5 12}\geq t+13^{\log_5 t}$

$|x^2-6x|^{\log_5 12}-(x^2-26x)\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\frac{\log_t 12}{\log_t 5}$

$|t|^{\log_5 12}\geq 5^{\log_5 t}+13^{\log_5 t}$. $\quad x^2-6x\geq 0$

$\log_t 5$ $\quad t(t^{\log_5 12}$

$\sqrt{t}^{\log_t 12 \cdot \log_t 5}=12^{\log_5 t}=12^{\log_5 t}\geq 5^{\log_5 t}+13^{\log_5 t}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(\underbrace{2\alpha}_{m}+\underbrace{2\beta}_{k})=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin\alpha=-\frac{2}{17}$. $4\cdot5+9+4=\boxed{33}$ $17!$

$\sin(m+k)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(m+2k)+\sin m=-\frac{2}{17}$.

$\sin m\cdot\cos k+\sin k\cdot\cos m=-\frac{1}{17}$ $\quad \sin m\cdot\cos 2k+\sin 2k\cdot\cos m+\sin m=-\frac{2}{17}$

$\sin^2x+\cos^2x=1$.
$\cos^2k-\sin^2k=$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(1-\sin^2 m)\cancel{)}\sin m+2\sin k\cos k\cos m+\sin m=-\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=$

$=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$(1-\sin^2 m)\cdot\sin m+2\sin k\cos k\cos m+\sin m=-\frac{2}{17}$.

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=\cancel{\frac{2}{17}}+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$. $\quad |\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha$.

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta)=$

$\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\beta=\frac{\pm4}{-\sqrt{17}}$

$\sin2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos^2 2\alpha=\sin^2 2\beta\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\quad |\cdot\sqrt{17}$ $\quad \frac{16}{17}$

$\sqrt{17}\cdot(\sin2\alpha+\arcsin$

~~$1\cdot\sin2\alpha+4\cos2\alpha=-1$~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

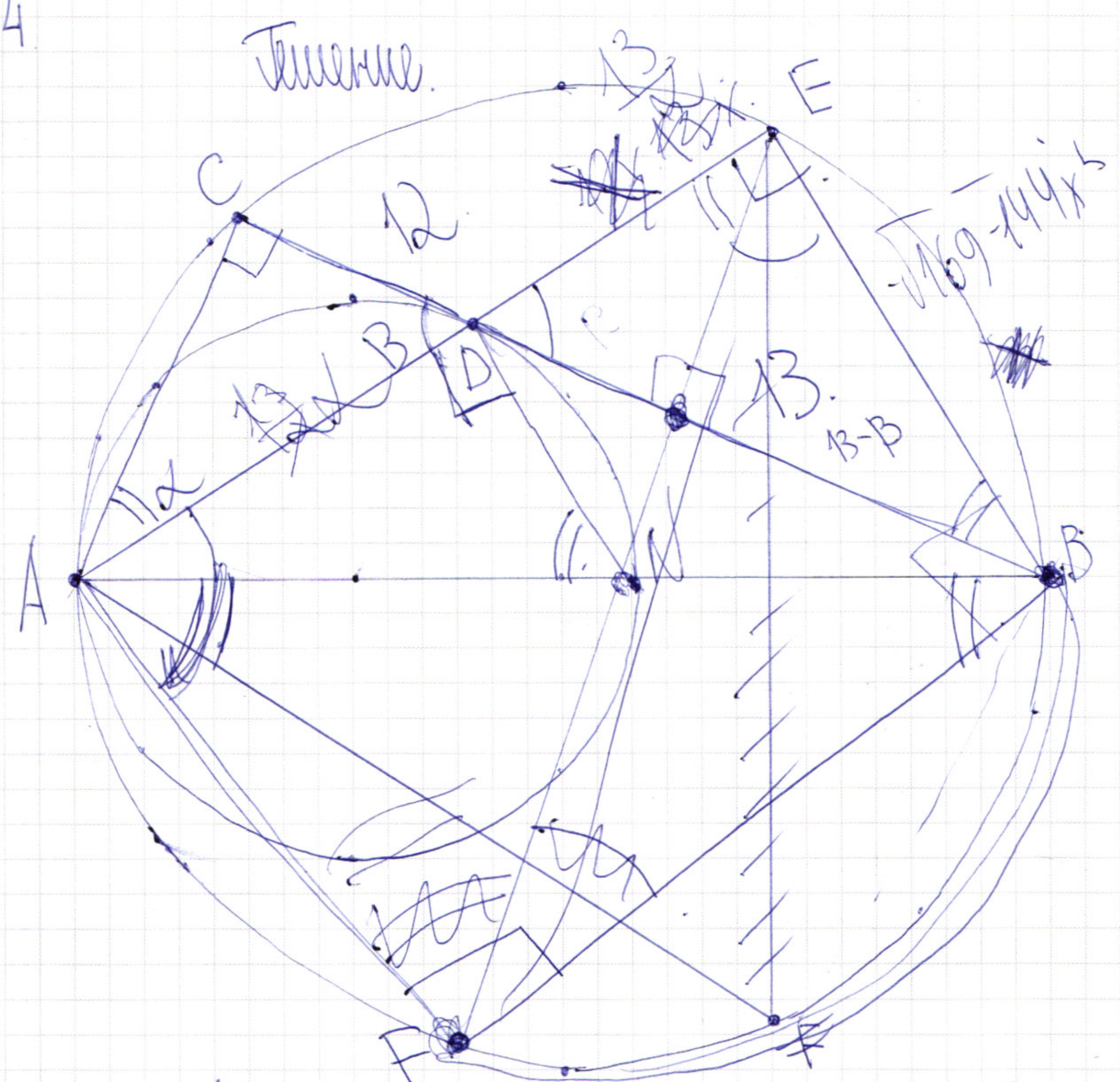
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

Решение.



1) Очевидно, что AB также диаметр и для окружн-ти ω.

$S=\left(\frac{13}{x}+12x\right)\cdot\sqrt{169-144x^2}=$

$(13+12x^2)\sqrt{\frac{169}{x^2}-144}$

$=\frac{(13+12x^2)\sqrt{169-144x^2}}{x}$

$\frac{13+12x^2}{13-12x^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta + \cos 2\beta = 0$

$\cos 2\beta (\sin 2\alpha + 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = 0$

$\frac{1}{\sqrt{17}}(\sin 2\alpha + 1) + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 0 \quad | : \cos 2\alpha \neq 0$

$\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot tg^2\alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{4}{\sqrt{17}} = 0$

$\cancel{\cos(2\beta + 2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\cancel{\cos(2\beta + 4\alpha) + 2\beta = -2}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 = t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}} = 1$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} \left(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1 \right) = 1$

$\cancel{t^{\log}}$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13\log_5(26x-x^2)$

$x^2-26x=t$

$|t|^{\log_5 12}-t\geq 13^{\log_5 t}$

1) $t>0$

$t^{\log_5 12}-t\geq 13^{-\log_5 t}$

$x=1 \quad y=0$

$9+36-18-72=$

$=45-90$

$t(t^{\log_5 12-1}-1)\geq 13^{-\log_5 t}$

$t(t^{\log_5 \frac{12}{5}}-1)\geq 13^{-\log_5 t}$

$13^{-\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}=$

$=t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}=t^{\frac{\log_t 12}{\log_t 5}}=12^{\log_5 t}-t\geq 13^{-\log_5 t}$

$13^{-\log_5 t}=13^{\frac{1}{\log_5 t}}=$

$\log_t(t^{\log_5 12}+t)\geq\log_t 13\log_5 t$

$t=5^{\log_5 t}$

$|t|^{\log_5 12}-t\geq 13^{\log_5 -t}$

$12^x-5^x\geq 13^x$

$13^x\geq 12^x$

$x\geq 0$

$5^{\log_5 t}$

$12^x\geq 13^x+5^x$

$\left(\frac{13}{12}\right)^x\geq 1$

$|t|^{\log_5 12}-5^{\log_5 t}\geq 13\log_5 -t$

$5^x\geq 12^x$

$\left(\frac{5}{12}\right)^x\geq 1 \quad x\geq 0$

$x^2-26x<0$

$26x-x^2<0$

$x^2-26x\neq 1 \quad 26x-x^2>0$

$\sin(2\alpha+4\beta-2\beta)=\sin(2\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\beta-\cos(2\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\beta=-\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\cos 2\beta$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

?

$\sin\frac{\sqrt{7}}{6}+\sin\frac{\sqrt{7}}{6}=$

$=2\sin\frac{\sqrt{7}}{6}\cdot\cos 0+$

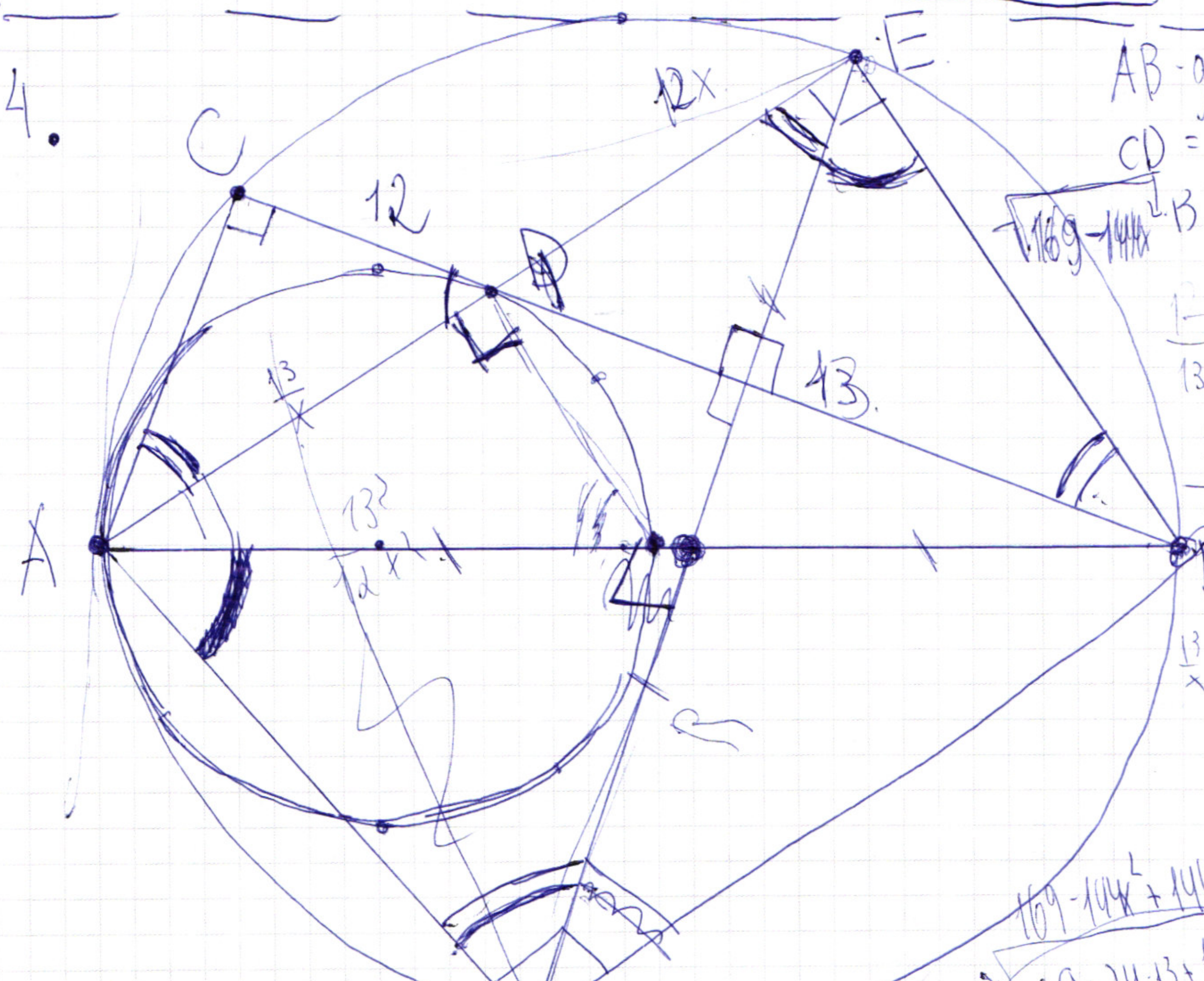
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)=2\sin\underbrace{2\alpha+2\beta}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\boxed{\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}}$

1. ?
2. +
4. +
5. +
3. $\pm$

4.



AB - диаметр.

CD = 12

BD = 13

$\sqrt{169-144x^2}$

$\frac{13-x}{13}=\frac{12}{12}$

$\frac{\frac{13}{x}}{\frac{13^2}{12x^2}}$

$\frac{13}{x}\cdot\frac{12x^2}{13^2}$

$169-144x^2+144x^2+24\cdot 13+\frac{169}{x^2}=$

$=\sqrt{169+24\cdot 13+\frac{169}{x^2}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in [0; 26]$

3. $|x^2-26x| \neq 1$ $\quad 26x-x^2>0 \Rightarrow x^2-26x<0$

A

$|x|=-x, \; x<0$

$26x-x^2 \le 1$

$26^2-4=13^2(2^2-1)=13^2\cdot 3$

$x^2-26x+1 \geq 0$

$x_{1,2}=\frac{26\pm 13\sqrt{3}}{2}$

$|x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\frac{26-13\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$13^{\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}=t^{\frac{1}{\log_{13} 5}}=$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$\log_5 \frac{13}{5}=\frac{\log_{13}\frac{13}{5}}{\log_{13} 5}=t^{\log_5 13}$

$5^{\log_{\frac{13}{5}} t}$

$5^{\log_{\frac{13}{5}} t}$

$t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12} \le t=t^{\log_5 5}$

$t^{\log_5 12}\left(t^{\log_5 13-\log_5 12}-1\right)=t^{\log_5 12}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\le t=t^{\log_5 5}$

$1=t^0$

$t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\le 0$

$t^{\log_5 5}\left(t^{\log_5 13-\log_5 5}-t^{\log_5 12-\log_5 5}-1\right)\le 0$

$t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)-1\le 0$

$t^{\log_5\frac{13}{12}}\le 1=t^0$

$t\left(t^{\log_5\frac{13}{5}}-t^{\log\frac{12}{5}}-1\right)\le 0$

$\log t$

$\log_5\frac{13}{12}\le \log 5$

$t<1$

$(t-1)\left(\log_5\frac{13}{12}-1\right)\le 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$9x^2-18x+9 \quad y^2-12y+36$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=(3x-3)^2+(y-6)^2-45=45$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y=6x$

$y^2-12xy+36x^2=(x-1)(y-6)$

$x-1=3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$x=1 \quad y=6 \quad x=3\sqrt{\frac{2}{5}}+1$

$x=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1$

$y^2-12xy+36x^2=xy-y-6x+6$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90.$

$y-6 \neq 6x+6$

$(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(y-6)^2=9(10-(x-1)^2)$

$\cancel{(3x-3)^2}+(y-6)^2+36(x-1)^2-12(x-1)(y-6)=(x-1)(y-6)$

$y-6=3\sqrt{10-(x-1)^2}$

$4\cdot 8\cdot 2$

$=$

$y=3\sqrt{10-(x-1)^2}+6$

$36(x-1)^2=4(90-(y-6)^2)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

$360-4(y-6)^2+(y-6)^2+36(x-1)^2-13(x-1)(y-6)=0$

$\frac{18}{5}=9\cdot\frac{2}{5}$

$y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6=0$

$(13x-1)^2-4(36x^2+6x-6)=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=(5(x-1))^2$

$y_{1,2}=\frac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

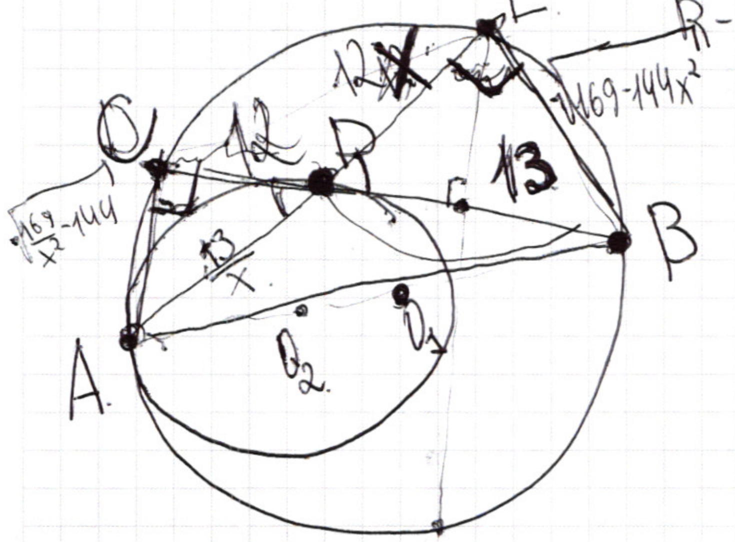
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



R-? $\angle AFE$

S_{AFF}

4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27

$= 177 + 24 = 201 +$

25

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(1) = 0$

$f(1\cdot 1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(x) - f(y)$

$f(2)=0$

2 5 7 11 13 17 19 23

$f(3)=0$

$f(5)=1$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(17)=4$ $\quad f(23)=5$

$f(7)=1$ $\quad f(13)=3$ $\quad f(19)=4$

$f(4)=0$ $\quad f(6)=0$ $\quad f(8)=0$ $\quad f(9)=0$ $\quad f(10)=1$ $\quad f(12)=0$

5б.

$f(28)=1$

$f(27)=0$

$f(26)=3$

$f(25)=2$

2. 9

3.

$f(14)=1$ $\quad f(20)=1$

$f(15)=1$ $\quad f(21)=1$

$f(16)=0$ $\quad f(22)=2$

$f(18)=0$ $\quad f(24)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$6x-4$

6. $\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\frac{2(3x-2)-4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

$18x^2-51x+28=$

$D = \frac{51^2-4\cdot18\cdot28}{2\cdot18} = \frac{17^2\cdot\cancel{3}^2-4\cdot\cancel{18}\cdot28}{2^2\cdot\cancel{3}^2} = \frac{17^2-8\cdot28}{4} =$

$f'(x)=36x-51$

$=$

$x=\frac{51}{36}$

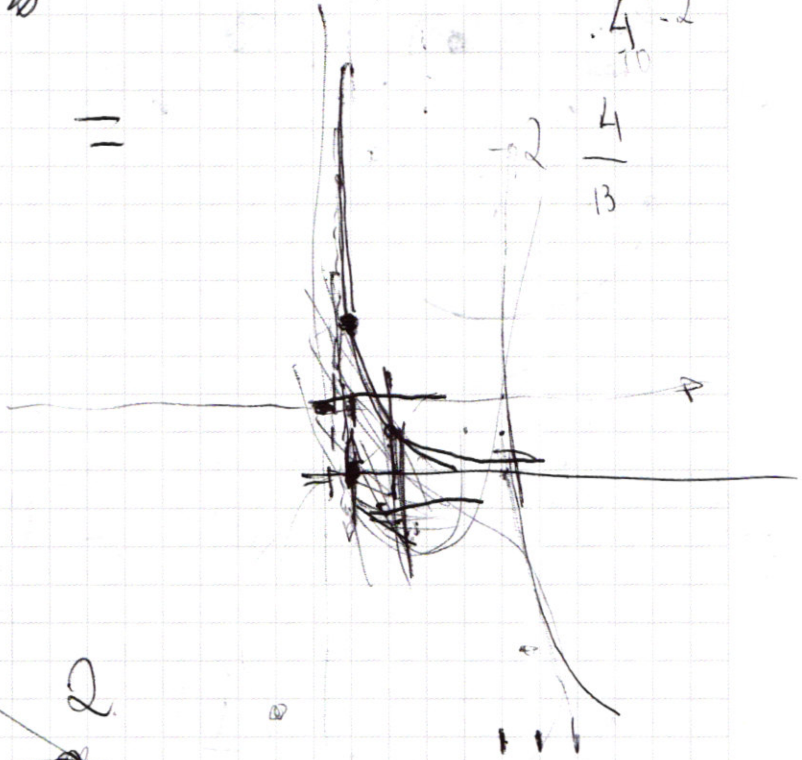
$\frac{2}{3}$

$\frac{18\cdot51^2}{36^2}-\frac{51^2}{36}+28=$

$=\frac{18\cdot51^2-51^2\cdot36+28\cdot36}{36^2}=$

$=\frac{-18\cdot51^2+28\cdot36}{36^2}=$

$=$



7.