МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Пусть $x-1=t$, $y-6=v$, тогда

$v-6t=y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{(x-1)(y-6)}=\sqrt{vt}$

Преобразуем 2 уравнение:

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90=9t^2+v^2$, получается, сначала заменой вышла система:

$\begin{cases} v-6t=\sqrt{vt} \\ 9t^2+v^2=90 \end{cases}$, т.к $\sqrt{vt}\geq 0 \Rightarrow v-6t\geq 0 \Rightarrow v\geq 6t$

$v-6t=\sqrt{vt} \quad |^2$

$(v-6t)^2=vt$

$v^2-12vt+36t^2=vt$

$v^2-13vt+36t^2=0$

Решим уравн. относит. v:

$D=169t^2-144t^2=25t^2$

$v_1=\dfrac{13t+5t}{2}=\dfrac{18t}{2}=9t$ (1)

$v_2=\dfrac{13t-5t}{2}=\dfrac{8t}{2}=4t$ (2)

Вторая пара не подходит, т.к тогда $\sqrt{xy-6x-y+6}=-3$, чего не может быть

(1) $v=9t \Rightarrow$

$9t^2+81t^2=90$

$t^2=1$; $t=\pm1 \Rightarrow v=\pm9$ $\Rightarrow$ Обр. замена получаются пары (x,y): $(2;15)$; $(0;-3)$

$\rightarrow$ в случае (1) есть только 1 пара реш.:

$\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=15 \end{matrix}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Прод. N.2 (2) $v=4t \rightarrow$

$16t^2+9t^2=90$

$t^2=\frac{90}{25}$; $t=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

Если $t=\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow v=\frac{12\sqrt{10}}{5} \Rightarrow$

$x=\frac{3\sqrt{10}+5}{5}$ $y=\frac{12\sqrt{10}+30}{5}$ (3)

Если $t=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow v=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \Rightarrow$

$x=\frac{-3\sqrt{10}+5}{5}$ $y=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$ (4)

В случае (3)

$\sqrt{(x-1)(y-6)}=\frac{12\sqrt{10}+\cancel{30}}{5}+\frac{-18\sqrt{10}-\cancel{30}}{5}=-\frac{6\sqrt{10}}{5}$, чего не может быть. При другом случае (4), все выполн. $\Rightarrow$

из (2) случае у нас 1 пара решений:

$x=\frac{-3\sqrt{10}+5}{5}$; $y=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$

Ответ: $\left(\frac{-3\sqrt{10}+5}{5}; \frac{-12\sqrt{10}+30}{5}\right)$; $(2;15)$.

N.3 т.к. по опред. логарифма $\log_a b$, $b>0$ и $b\neq 1$:

$26x-x^2>0$ (2) и $26x-x^2\neq 1$ (1), значит

$|x^2-26x|=26x-x^2$, Пусть $26x-x^2=t \Rightarrow$

по св-ву лог. $13^{\log_5(26x-x^2)}=(26x-x^2)^{\log_5 13} \Rightarrow$

По замене:

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$ $|:t$, $t>0$ по доп.

$t^{(\log_5 12-1)}+1\geq t^{(\log_5 13-1)}$

по св-ву лог.

$\log_5 13-1=\log_5 13-\log_5 5=\log_5\frac{13}{5}$, аналогично:

$\log_5 12-1=\log_5\frac{12}{5} \Rightarrow$

$t^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)}-t^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)}\leq 1$, по св-ву лог: $t^{\log_5\frac{13}{5}}=\frac{13}{5}^{\log_5 t} \Rightarrow$

$\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5(t)}-\left(\frac{12}{5}\right)^{(\log_5(t))}\leq 1$, Пусть $\log_5 t=v \Rightarrow$

см. прод. стр 11

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(a^2) = 2f(a)$

$\boxed{f(1)=0}$ $\boxed{f(2)=0}$

$\cancel{f(a \cdot 0) = f(a) + f(0)}$

1) $p = 4k+1$
2) $p = 4k+3$

$\Rightarrow f(p) = \frac{p-1}{4}$; $f(p) = \frac{p-3}{4}$

$f(4)=0$
$f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(14)=1$ $f(21)=1$
$f(6)=0$ $f(8)=0$ $f(15)=1$ $f(22)=2$
$f(9)=0$ $f(16)=0$ $f(23)=5$
$f(10)=1$ $f(17)=4$ $f(24)=0$
$f(11)=2$ $f(18)=0$ $f(25)=2$
$f(12)=0$ $f(19)=4$ $f(26)=3$
$f(13)=3$ $f(20)=1$ $f(27)=0$
$f(28)=1$

$4 \le x \le 28$; $4 \le y \le 28$ $f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

~~Если $a, b \in N$ и не p =>~~

~~$f(ab)$~~

$f(3)=0$; $f(4)=0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(xy) = 0$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

$f(8) = f(2) + f(4) = f(2) + f(2) + f(2)$

Если

$87 + 144$
151

$\boxed{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)}$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right) = \ldots =$

$f(x) + n \cdot f(y) + f\left(\frac{1}{y^{n+1}}\right) =$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = n \cdot f(y) + (n+1) \cdot f(n+1)$

$f\left(\frac{1}{y^{n+1}}\right) = (n+1) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$

$= n \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = -n f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$4+2\cdot 4$

8

$\sin 2a \cdot \cos 2\beta + \cos 2a \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{-12\sqrt{10}+30}{5} + \frac{18\sqrt{10}-30}{5}$

$\sin 2a \cdot \cos 4\beta + \cos 2a \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

$\sin 2a(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2a \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$30 \quad -18\sqrt{10}-30$

$2\sin 2a \cdot \cos 2\beta + 2\cos 2a \cdot \sin 2\beta$

$x = \frac{-3\sqrt{10}+5}{5}$

$y = \frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$

$\sin 2a\left(2\cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta\right) + 2\cos 2a(\sin)$

$\sin 2a(2\cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta - 1) = 2\cos 2a \cdot \sin 2\beta(1-\cos\beta)$

$\frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2\sin 2\beta(1-\cos 2\beta)}{2\cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta - 1}$

$\boxed{\begin{matrix} t = x-1 \\ v = y-6 \end{matrix}}$

$x = \frac{3\sqrt{10}+5}{5}$

$y = \frac{12\sqrt{10}+30}{5}$

$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$

$(x-1)(y-6)$

$xy-6x-y+6$

$x-1 = t$

$y-6 = v$

$v-6t$

$1 = x-1$

$9 = y-6$

$\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=15 \end{matrix}}$

$-1 = x-1$

$-9 = y-6$

$\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=-3 \end{matrix}}$

$(y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(y-6x)^2 = (x-1)(y-6)$

$y-6-6x+6$

$9x^2-18x+$

$\begin{cases} (v-6t)^2 = vt \\ 9t^2+v^2 = 90 \end{cases}$

$t = 1 = x-1$

$v = 9 = y-6$

$9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36) = 90$

$x=2$

$9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90$

$9 = y-6 \quad 15-$

$y=7$

$t^{(\log_5 12-1)}+1 \geqslant t^{(\log_5 13-1)}$

$1 \geqslant t^{\log_5 13-\log_5 12} \,/\, t$

$t^{(\log_5 13-1)}-t^{(\log_5 12-1)} \leq 1$

$t^2 \leq 25$

$(t-5)(t+5) \leq 0$

169 $t \in [-5;5]$

$\boxed{t \leq 25}$

$\boxed{t \geqslant 0}$

$26 \cdot 13-13 \cdot 13$

$13 \cdot 13(2-1)$

$\frac{26}{2}$

$t \geqslant 26x-x^2$

$\frac{-26}{-2}=13$

$\log_5 t \leq 0$

1

$\log_5 13-\log_5 5=\boxed{\log_5 \frac{13}{5}}$

$169 \cdot 13$ $\quad \frac{1}{13} \leq \frac{1}{12}+\frac{1}{5}$

$1690+$ $\quad \boxed{t \neq 1}$

$480+27$

$2097 \leq 125+1440+288$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leq 1$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(t^{\log_5 \frac{13}{5}-\log_5 \frac{12}{5}}-1\right) \leq 1$

$\log_5 \frac{13 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 12}=\log_5 \frac{13}{12}$

$\left(\frac{13}{5}\right)^v-\left(\frac{12}{5}\right)^v \leq 1$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(t^{\log_5 \frac{13}{12}}-1\right) \leq 1$

$13^v-12^v \leq 5^v$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leq 1$

$13^v \leq 5^v+12^v \Rightarrow$

$\frac{13}{5}^{\log_5 t}-\frac{12}{5}^{\log_5 t} \leq 1 \quad \log_5 t=v$

$v \leq 2$

$\boxed{\log_5 t \leq 2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$

$26x-x^2\leq 25$

$\log_5(1)$

$x^2-26x+25\geq 0$

$(x-1)(x-25)\geq 0$

$\log_5\left(\frac{1}{5}\right)=-1$

$x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

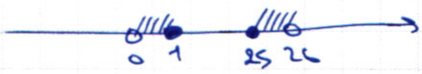
$26x-x^2>0$

$x(26-x)$

$x(x-26)<0$ $\boxed{x\in(0;26)}$

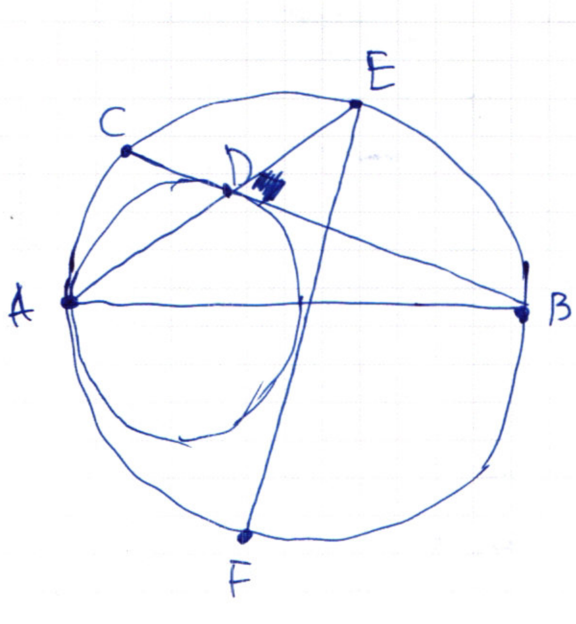
$x^2-26x\neq 1$

$x^2-26x-1\neq 0$



26^2+4

$x_1=\frac{26+\sqrt{26^2+4}}{2}=13+\sqrt{1371}=13\pm\sqrt{170}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v^2-12vt+36t^2$

$v^2-13vt+36t^2=0$

$D=(169-144)t^2=25t^2$

$v_1=\frac{13t+5t}{2}=\frac{18t}{2}=9t$

$v_2=\frac{13t-5t}{2}=4t$

1) $v=9t$

$81t^2+9t^2=90$

$90t^2=90$

$t=\pm 1$ $v=\pm 9$

2) $v=4t$

$25t^2=90$

$t=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$ $v=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x^2-26x=t(-1)$

$|t|^{\log_5 12}-t\geq t^{\log_5 13}$

1) $13+12=25=5^2$

2) $13^2-12^2=5^2$

$13\cdot 12=\underbrace{12^2+12}_{144+12}=\boxed{156}$

1) $t^{\log_5 12}-t\geqslant t^{\log_5 13}$

$t^{(\log_5 12-1)}-1\geqslant t^{(\log_5 13-1)}$

$|t|^{\log_5 12}-t\geqslant -$

$26x-x^2>0$

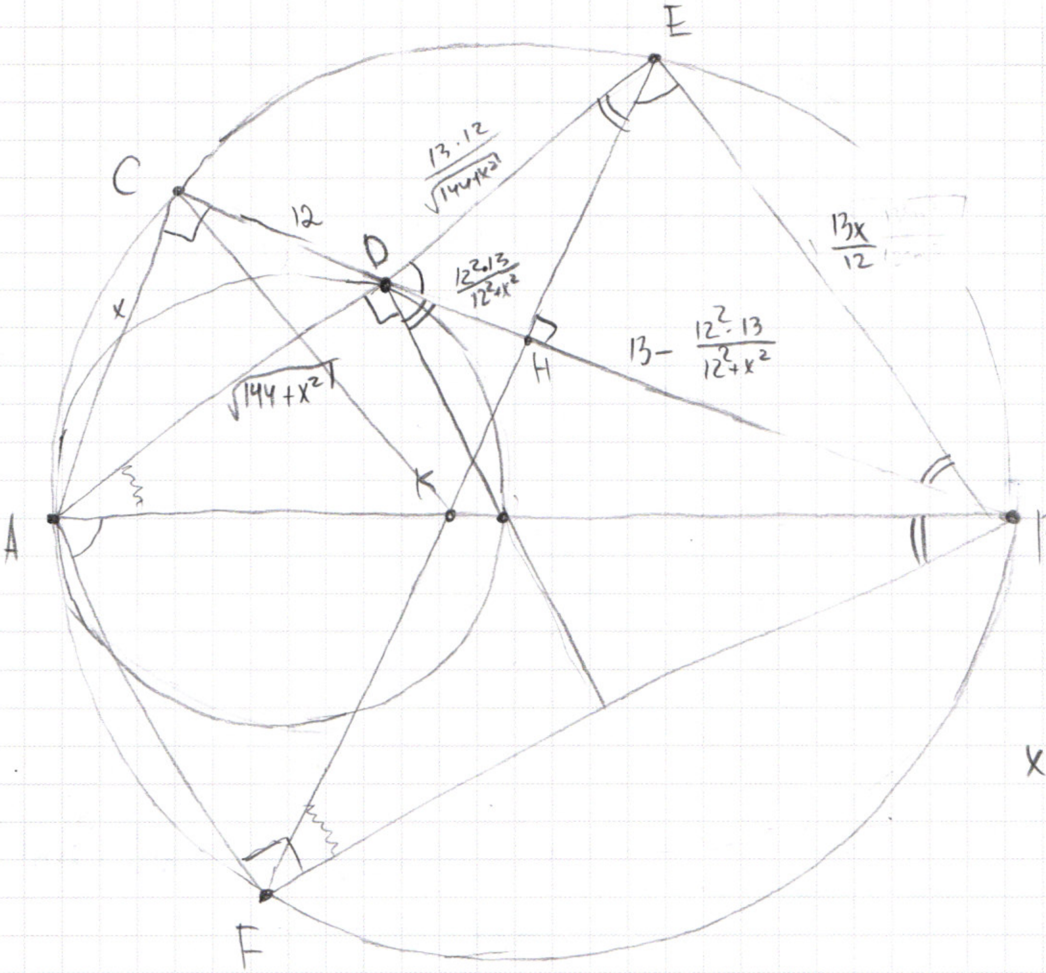
$26x-x^2=t$

$t^{\log_5 12}+t\geqslant t^{\log_5 13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)



$25\cdot x\cdot\sqrt{\ }$

$25,\ x,\ \sqrt{25^2+x^2}$

$\frac{abc}{45}$

$x\cdot 25$

$13^2(12^2-x^2-$

$\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{ED}}{2}=\frac{\overset{\frown}{FB}}{2}$ $\quad 1-\frac{12^2}{12^2+x^2}$

$FK\cdot KE=AK\cdot KB$

$9b^2+4a^2+36+12ab-24a+\cancel{36}\frac{x^2}{12}b+$

$FK\cdot KB=AK\cdot KE$

$12a(\cancel{\ }+8)$

$\angle CBE=$ $\quad 96a \quad 51^2 \quad -\frac{2a\cdot 6\cdot 2}{24a}$

$ED^2=x\cdot 13$

$18x^2-51x$

$AB^2=625-x^2$

$EH^2=x(13-x)$

$(3\sqrt{2}\cdot x)^2-2\cdot x\cdot 3\sqrt{2}\cdot k=51$

$k=\frac{17}{2\sqrt{2}}$

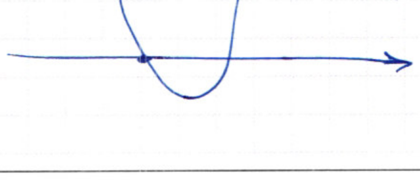
$\frac{13^2\cdot 12^2}{144+x^2}=\cancel{13}\cdot LH\quad;\ LH=\frac{12^2\cdot 13}{12^2+x^2}$

$160+64$

224

$\frac{289}{8}-\frac{28\cdot 8}{8}$

$3a(x-x_2)(x-x_1)\geq 0$



$\begin{array}{r}89\\-24\\\hline 65\end{array}$

$28\cdot 8$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

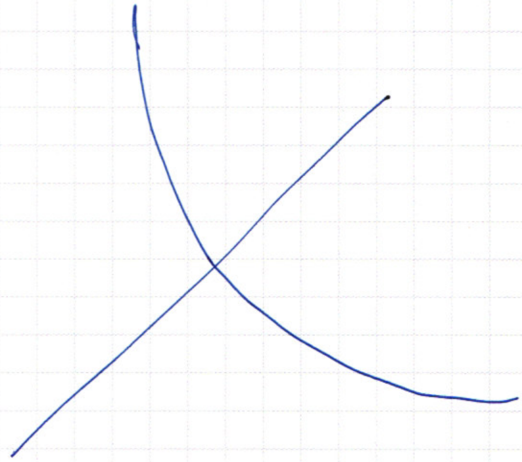
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4}{3x-2}-2 \geq ax+b$

$\frac{4}{3x-2}-2$



$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=$

$=a$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b+8)=0$

$6ax+(3b-2a+6)=0$

$x=\frac{2a-3b-6}{6a}\geq 0$

$\boxed{a>0}$

$\sin\alpha+\sin\beta=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\sin\frac{\alpha}{2}$

$\sin(2a+4$

$\frac{\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{2\sin 2\beta(1-\cos 2\beta)}{2\cos^2 2\beta-2\cos 2\beta-1}$

$\sin(2a+4b)+\sin 2a=\left(\sin(2a+2b)\cdot\sin 2\beta\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{13}{5}\right)^t - \left(\frac{12}{5}\right)^t \le 1 \qquad | \cdot 5^t > 0$

$13^t - 12^t \le 5^t$

$13^t \le 12^t + 5^t$, при $t=2$ выполн. равенство, очевидно при $t \le 2$ будет выполняться это неравенство в силу монотон.

$\Rightarrow t \le 2$. Обр. замена: $\log_5 t \le 2 \Rightarrow$, т.к $5 > 1$

$25 \geq t \Rightarrow$ Обр. замена $\quad 25 \geq 26x - x^2$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$x^2 - 26x + 25 = 0$

$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 25 \\ x_1 + x_2 = 26 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 26x + 25 = (x-1)(x-25) \Rightarrow$

$(x-1)(x-25) \geq 0$, по методу интервалов:

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$, однако так же

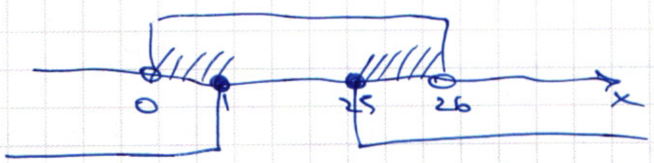
$26x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0; 26)$, а так же

$26x - x^2 \neq 1$, по дискриминанту находим, что

$x \neq 13 \pm \sqrt{170}$

$x_1 \neq 13 - \sqrt{170} < 0 \Rightarrow$ не подходит под условие (2)

$x_2 \neq 13 + \sqrt{170} > 26 \Rightarrow$ также не подходит под условие (2). $\Rightarrow$



$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$

№5 Из условия, что $f(ab)=f(a)+f(b)$, получим, что $f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$.

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{y}{y^2}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y^2}\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)=2f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow \boxed{f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)}\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\boxed{f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0\Rightarrow f(x)<f(y)$$

Через свойство $f(ab)=f(a)+f(b)$ посчитаем все значения $f(a)$, где $a\in\mathbb{N}$ и $4\le a\le 28$

$f(4)=0$	$f(11)=2$	$f(18)=0$	$f(25)=2$
$f(5)=1$	$f(12)=0$	$f(19)=4$	$f(26)=3$
$f(6)=0$	$f(13)=3$	$f(20)=1$	$f(27)=0$
$f(7)=1$	$f(14)=1$	$f(21)=1$	$f(28)=1$
$f(8)=0$	$f(15)=1$	$f(22)=2$	
$f(9)=0$	$f(16)=0$	$f(23)=5$	
$f(10)=1$	$f(17)=4$	$f(24)=0$	

Если $f(x)=0$, то для этого сущ 9 вар. вариантов, что $f(x)=0<f(y)$ — 16. Если $f(x)=1$, то для этого 8 вар, чтобы $f(y)>1$ — 8 вар. Если $f(x)=2$, то для этого 3 вар, и чтобы $f(y)>2$ — 5 вар. Если $f(x)=3$, то для этого 2 вар, чтобы $f(y)>3$ — 3 вар. Если $f(x)=4$, то для этого 2 вар; чтобы $f(y)>4$ — 1 вар. Если $f(x)=5$ - то для этого 1 вар, а чтобы $f(y)>5$ — 0 вар. Просуммируем кол-во вариантов:

см. стр 13

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прод. N. 5 | $\underbrace{9\cdot16}_{144}+\underbrace{8\cdot8}_{64}+\underbrace{3\cdot5}_{15}+\underbrace{2\cdot3}_{6}+\underbrace{2\cdot1}_{2}+\underbrace{1\cdot0}_{0}=231$ вар.

8

87 23

Ответ: 231

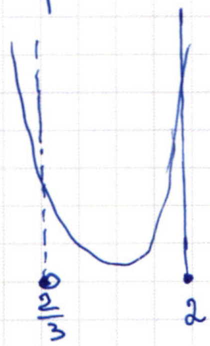
N.6

$18x^2-51x+28\le ax+b$

Посмотрим на то, как может выглядеть

$18x^2-x(51+a)+28-b\le0$.

парабола ветв. вверх с ограничениями по x.



Т.е., максимум функции при $x\in(2/3;2]$ лежит либо в 2 либо в $\frac{2}{3}$ (в последнем знак будет строгий). Подставим $\frac{2}{3}$ и 2 вместо x

$\frac{2}{3}$: $\frac{18\cdot4}{9}-\frac{2}{3}(51+a)+28-b<0$

$2a+3b>6$

2: $18\cdot4-2(51+a)+28-b\le0$

$72-102+28-2a-b\le0$

$2a+b+2\ge0$

, оба должны выполн.

$\begin{cases}2a+3b-6>0\\2a+b+2\ge0\end{cases}$

Теперь разберемся с первым нер-вом:

$3x-2>0$, при $x>\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$

~~Рассмотрим 3 случ.:~~ ~~1) $x_1>x_2$~~ ~~2) $x_2>x_1$~~ ~~3) $x_1=x_2$~~

$8-6x\ge(3x-2)(ax+b)$

$3ax^2+3xb-2ax-2b\le8-6x$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b+8)=0$

$x_{1,2}=\frac{2a-3b-6\pm\sqrt{(3b+2a+6)^2+12a(\ldots+4)}}{6a}$

см. с. 17 прод.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

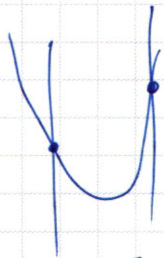
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4-6x+4}{3x-2} \quad \frac{4}{3x-2}$$

$$\frac{4}{3x-2}-2 \geq ax+b \geq$$



$$8-6x \geq \underbrace{(ax+b)(3x-2)}$$

$$3ax^2-2ax+3bx-2b$$

$$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b+8) \leq 0$$

$$\frac{\cancel{18}^{2}\cdot 4}{\cancel{9}_{1}}-\frac{51}{3}\cdot 2+28$$

$$8-34+28=2$$

$$x_1=\frac{-(3b-2a+6)+\sqrt{(3b-2a+6)^2+12a(2b+8)}}{6a}$$

$$\underbrace{18\cdot 4}_{72}-\underbrace{51\cdot 4}_{204}+28<0$$

$$\frac{4}{3x-2}-2$$

$$\frac{51}{36}=\frac{17}{\cancel{12}_{4}} \vee \frac{2}{\cancel{3}_{1}}$$

$$\frac{\cancel{4}^{1}}{\frac{6-2}{\cancel{4}}}-2$$

17

$$2>\frac{17}{12}>\frac{2}{3}$$

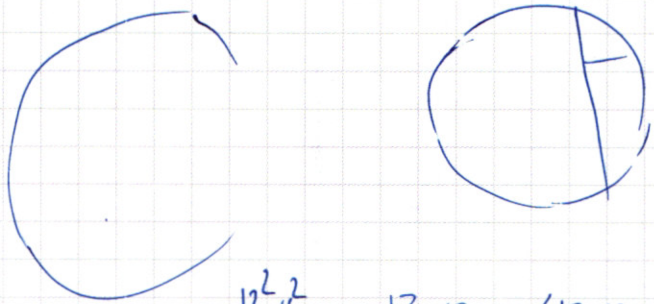
$$\boxed{-1 \geq ax+b} \geq 2$$

$$\left(3\sqrt{2}\cdot x-\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{65}{8}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{13^2x^2}{12^2}$ $\frac{13(12^2+x^2)-12^2\cdot 13}{12^2+x^2} =$

$\frac{13^x\cdot 12^2}{12^2+x^2} = \cancel{13}\cdot t$



$\frac{13^2x^2}{12^2} = \frac{13\cdot 12}{\sqrt{12^2+x^2}}\left(\frac{13\cdot 12}{\sqrt{12^2+x^2}} + \sqrt{12^2+x^2}\right)$

$\frac{13^2x^2}{} = \frac{13^x\cdot 12^2}{12^2+x^2} + \cancel{13}\cdot 12^3$ $\quad -ax+b$

$\cancel{13(x^2)(x^2+12^2) = 6}$

$\frac{13^2x^2}{12^2} = 13\left(13 - \frac{12^2\cdot 13}{x^2+12^2}\right)$

$13x^2 + \cancel{13\cdot 12^2} - \cancel{12^2\cdot 13}$

$\frac{\cancel{13^2x^2}}{x^2+12^2} = \frac{\cancel{13^2x^2}}{12^2}$

$\frac{13^x\cdot 12^2}{x^2+12^2} = \cancel{13}\cdot t$

$\frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b$

$18x^2-51x+28$

$18x^2 - x(51+a) + 28 - b \leq 0$

$\frac{\cancel{18}^2\cdot 4}{\cancel{9}} - \frac{2}{3}(51+a) + 28 - b \leq 0$

$36 - 34 - \frac{2}{3}a - b \leq 0$

$2 - \frac{2}{3}a - b \leq 0 \quad |\cdot 3$

$6 - 2a - 3b \leq 0$

$2a+3b \geqslant 6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прод. №6

~~Понятно, что решением нер-ва будет:~~

~~Рассмотрим 3 случ.: $a>0$, $a<0$, $a=0$~~

~~$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b+8)=0$~~

Нам ~~нужно~~ нужно

$\boxed{№1}$

По формуле суммы синусов:

$$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = \sin(2a+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sin(2a+2\beta)} \quad |:\sin(2a+2\beta)$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin 2\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2a\cdot\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\sin 2\beta}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2a+\sqrt{3}\cdot\cos 2a = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

Решаем уравнение относительно a, находим значения, получаем значение $\operatorname{tg} a$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 18

(Нумеровать только чистовики)