МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{17\cdot\cos 2\beta}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{17\cdot\cos 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = \frac{1}{17}$$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

1) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta\cos 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$8\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = 0$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0.$$

$\sin\alpha = 0$ или $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$\boxed{tg\alpha = 0}$ $\qquad -4\cos\alpha = +\sin\alpha$

$$\boxed{tg\alpha = -4}$$

2) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, то:

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} = 0$$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$ $\quad |:\cos\alpha \neq 0$, т.к $tg\alpha$ определён.

$$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$$

$$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{4}}$$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ:

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$-6 \quad 0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq 0$

$\log_4(x^2+6x)=t$

$x^2+6x=4^t$

$3^t+4^t-4^{t\cdot\log_4 5}\geq 0$

$3^t+4^t-5^t\geq 0$

$3^t+4^t\geq 5^t$

При $t=2$ $3^2+4^2=5^2$, видно, что при $t>2$ неравенство не выполняется, а при $t\leq 2$ выполняется.

$t\leq 2$

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$x=-8 \quad x=2$

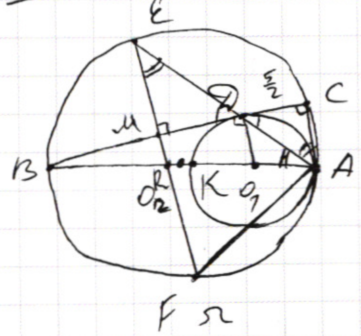
$-8 \quad 2$

$-8 \quad -6 \quad 0 \quad 2$

$x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$

№4



$\angle BCA=90°$ как опирающийся на диаметр.

$\angle CAE=\frac{1}{2}\cup CE$, $\angle CBA=\frac{1}{2}\cup CA$ как вписанные

$\angle CAE+\angle CBA=\frac{1}{2}\cup CE+\frac{1}{2}\cup CA=\frac{1}{2}\cup AE$

$\angle F=\frac{1}{2}\cup AE=\angle CAE+\angle CBA$

Пусть O_1 - центр окружности ω, O_2 - центр окр. Ω

$\triangle BCA\sim\triangle BDO_1$ ($\angle B$ - общий и $\angle D=\angle C=90°$), тогда

$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_1}{BA}$.

Пусть r_1 - радиус окр. ω, r_2 - радиус окр. Ω

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{2r_2 - r_1}{2r_2}$$

$$\frac{13}{9} = \frac{2r_2 - r_1}{r_2}$$

$$13r_2 = 18r_2 - 9r_1$$

$$\boxed{\frac{r_2}{r_1} = \frac{9}{5}}, \quad r_2 = \frac{9}{5}r_1$$

Пусть AB пересекает окр. ω в точке K.

$$O_2K = AO_2 - AK = r_2 - 2r_1$$

$$BK = BO_2 + O_2K = r_2 + r_2 - 2r_1 = 2r_2 - 2r_1$$

по свойству касательной и секущей, провед. из одной точки

$$BD^2 = BK \cdot AB$$

$$\frac{169}{4} = 2(r_2 - r_1) \cdot 2r_2$$

$$\frac{169}{16} = \left(\frac{9}{5}r_1 - r_1\right) \cdot \frac{9}{5}r_1$$

$$\frac{169}{16} = \frac{4 \cdot 9}{5^2} \cdot r_1^2$$

$$\boxed{r_1 = \frac{65}{24}}, \text{ тогда } \boxed{r_2 = \frac{39}{8}}$$

В $\triangle ABC$ $\sin\angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{9 \cdot 4}{39} = \frac{12}{13}.$

$$CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{15}{4}.$$

$\frac{CA}{AB} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{5}{13} = \frac{DC}{BD}$, поэтому AD – биссектриса, тогда

$$\angle F = \angle CBA + \frac{1}{2}\angle A$$

Пусть $\angle CBA = \beta$, $\angle A = 2\alpha$.

$$\sin\angle F = \sin(\beta + \alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

$\sin\beta = \frac{CA}{AB} = \frac{15 \cdot 4}{4 \cdot 39} = \frac{5}{13}$, тогда $\cos\beta = \frac{12}{13}.$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin\angle F = \frac{15}{13\sqrt{13}} + \frac{24}{13\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\boxed{\angle F = \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}}$$

$\angle EDM = \angle ADC$ как вертикальные, тогда $\angle DEM = \angle CAD = \alpha$.

~~$\triangle EDM \sim \triangle ADC$ (по 2-м углам)~~

~~$\frac{ED}{AD} = \frac{MD}{DC}$~~

~~из подобия ...~~

$\sin\angle F = \cos\alpha$, поэтому $\alpha + F = 90^\circ$.

В $\triangle AEF$ $\angle E + \angle EAF + \angle EFA = 180^\circ$

$\alpha + \alpha + \angle FAB + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$

$\angle FAB = 90^\circ - \alpha = \angle FAB$, тогда $\triangle FRA$ - равнобедр, где $R = EF \cap AB$.

$S_{FAE} = S_{ERA} + S_{FRA} = \frac{1}{2} ER^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) + \frac{1}{2} AR^2 \cdot \sin\angle ARF$.

Но т.к $ER = RF$ и $EF \not\perp AB$, то EF - диаметр, тогда точки R и O_2 совпадают, тогда $ER = AR = EO_2 = r_2$

$S_{FAE} = \frac{1}{2} r_2^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) + \frac{1}{2} r_2^2 \cdot \sin 2\alpha = r_2^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{FAE} = \frac{12}{13} \cdot \frac{39^2}{8^2} = \frac{351}{16}$

Ответ: $r_1 = \frac{65}{24}$; $r_2 = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$; $S_{AEF} = \frac{351}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

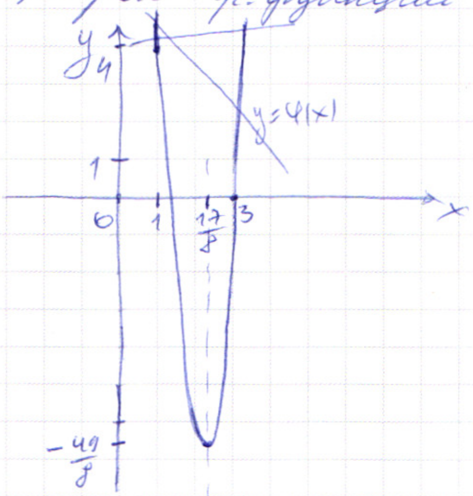
№6 Пусть $\varphi(x)=ax+b$, $h(x)=\dfrac{4x-3}{2x-2}$, $f(x)=8x^2-34x+30$

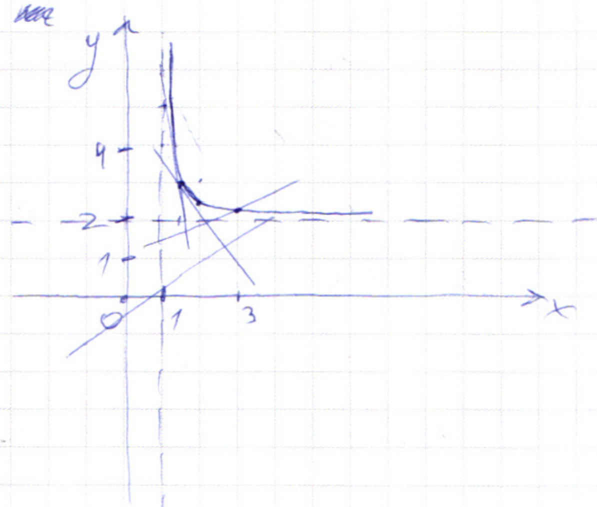
Рассмотрим ф-цию $f(x)$.

$x_0=\dfrac{17}{8}$, $y_0=-\dfrac{49}{8}$, график − парабола с вершиной $\left(\frac{17}{8};-\frac{49}{8}\right)$

$h(x)=\dfrac{4x-4+1}{2x-2}=2+\dfrac{1}{2(x-1)}$ − график − парабола.

Построю гр. функций $f(x)$ и $h(x)$.





$\varphi(x)\geq f(x)$ выполняется на $x\in(1;3]$, ~~если~~ если
$\begin{cases}\varphi(3)\geq f(3)\\ a\leq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\varphi(1)\geq f(1)\\ a\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}3a+b\geq 0\\ a<0\end{cases}$ или $\begin{cases}a+b\geq 4\\ a\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}3a+b\geq 0\\ a+b\geq 4\end{cases}$

$a\geq -4$, тогда $b\geq 6$

Т.к $a\geq -2$ и $a\leq -2$, то $a=-4$, тогда $6\leq b\leq 8{,}25$, но $b\leq 6$, поэтому $b=6$.

Ответ: $(-4;6)$

$\varphi(x)\leq h(x)$ верно на $x\in(1;3]$, если $\begin{cases}a\geq 0\\ h(3)\geq \varphi(3)\end{cases}$ или $\left[\begin{cases}a<0\\ \varphi(x)\text{ проходит ниже точки касания } \varphi(x) \text{ и } h(x)\end{cases}\right.$,

$\begin{cases}a\geq 0\\ 2{,}25\geq 3a+b.\end{cases}$

т.е $\varphi(x_0)\leq h(x_0)$, где x_0 − точка касания.

$\dfrac{4x-3}{2x-2}=ax+b$

$4x-3=2ax^2+2xb-2ax-2b$

$2ax^2+2x(b-a-2)-2b+3=0$

$\dfrac{D}{4}=b^2+a^2+4-2ab-4b+4a+4ab-6=$ ~~...~~ $=a^2+b^2-4b+4a-2+2ab=0$, т.к точка касания, откуда $a\leq -4$ и $b\leq 6$

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

Пусть $3y-2=a$; $x-1=b$.

$3y-2x=a-2b$; $3xy-2x-3y+2=(3y-2)(x-1)=ab$

(1): $a-2b=\sqrt{ab}$

$(3y-2)^2=3(3y^2-4y+\frac{4}{3})$, тогда $3y^2-4y=\frac{(3y-2)^2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{a^2-4}{3}$.

$(x-1)^2=\frac{1}{3}(3x^2-6x+3)$, тогда $3x^2-6x=3((x-1)^2-1)=3(b^2-1)$

(2): $\frac{a^2-4}{3}+3(b^2-1)=4$

(1): $a^2+4b^2-4ab=ab$, $\boxed{\begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \end{cases}}$

$(a-4b)(a-b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$, ~~$4b\geq 2b$~~

1) $a=4b$ подставим во (2):

$16b^2-4+9b^2-9=12$

$25b^2=25$

$\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$ - не удовл, т.к подх. $a\geq 2b$

$\boxed{(4;1)}$

2) $a=b$ подставим во (2):

$b^2-4+9b^2-9=12$

$b^2=\frac{5}{2}$

$\begin{cases} b=-\sqrt{2,5} \\ a=-\sqrt{2,5} \end{cases}$ или $\begin{cases} b=\sqrt{2,5} \\ a=\sqrt{2,5} \end{cases}$ - не удовл, т.к $a\geq 2b$

$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2=4 \\ x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a=-\sqrt{2,5} \\ b=-\sqrt{2,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2=-\sqrt{2,5} \\ x-1=-\sqrt{2,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{-\sqrt{2,5}+2}{3} \\ x=1-\sqrt{2,5} \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\sqrt{2,5};\ \frac{-\sqrt{2,5}+2}{3}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $3y-2x=\sqrt{\cancel{3}x(3y-2)-(3y-2)}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$ $\boxed{3y=2}$?

$3y=2$

$AC=\sqrt{\frac{39^2}{16}-81}=\sqrt{\frac{9\cdot 13^2-9^2\cdot 16}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{169-144}=\frac{15}{4}$

$\frac{(3y-2x)^2}{3y-2}=x-1$

$(3y-2)^2=9y^2-4\cdot 3y+4=3(3y^2-4y+\frac{4}{3})$

$(x-1)^2=x^2-2x+1=\frac{1}{3}(3x^2-6x+3)$

$3(x-1)^2=3x^2-6x+3$

$\frac{\frac{15}{4}}{\frac{39}{4}}=\frac{15}{39}=\frac{5}{13}$

$3x^2-6x+3=4+4y-3y^2+3$

$AO_2=r_2$

BO_2

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D=36-12(3y^2-4y-4)=36-36y^2+48y+48=$

$=-36y^2+48y+36\cdot 48=6(-6y^2+8y+6\cdot 6\cdot 8)=$

~~$-6y^2+8y+6\cdot6\cdot8\geq 0$~~

$-3y^2+4y+48\cdot 3\geq 0$

~~$D=16+3\cdot 4\cdot 48\cdot 3$~~

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$3y^2+3x^2-6x-4y=4$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$D=(2-15y)^2-16(9y^2+3y-2)=$

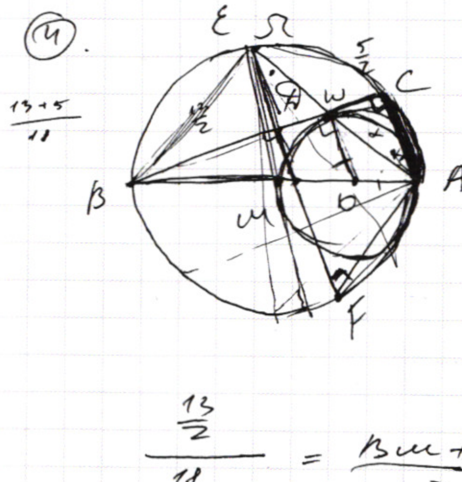
$=4+225y^2-60y-144y^2-48y+32=$

$=121y^2+36-108y$

$\frac{3}{13}\cdot\frac{3\cdot 4}{3}=\frac{12}{13}$

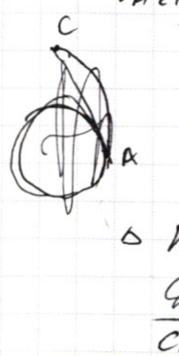
$\angle F=\angle B+\angle CAE$.

4.



$\angle AFE$-? r_1, r_2-?

S_{AEF}-?



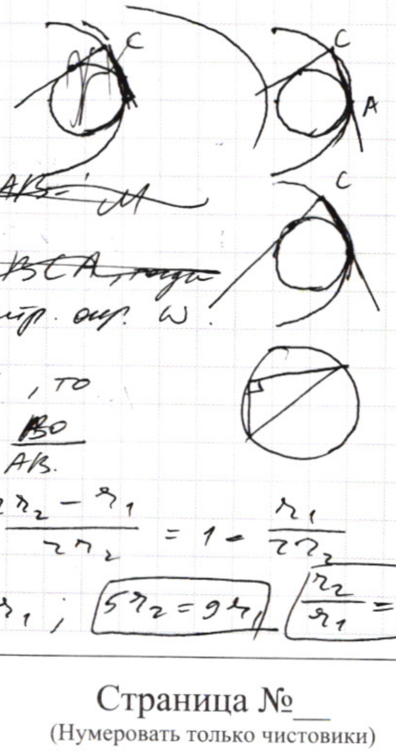
~~Пусть $EF\cap AB=M$~~

~~$\triangle BDM \sim \triangle BCA$, тогда~~

Пусть O_1 — центр. окр. ω.

$\triangle BDO\sim\triangle BCA$, то

$\frac{DO}{CA}=\frac{BA}{BC}=\frac{BO}{AB}$



$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}}=\frac{BM+r_1}{r_2}=\frac{2r_2-2r_1+r_1}{2r_2}=\frac{2r_2-r_1}{2r_2}=1-\frac{r_1}{2r_2}$

$\frac{13}{18}=\frac{2r_2-r_1}{2r_2}$

$13r_2=18r_2-9r_1$; $\boxed{5r_2=9r_1}$ $\boxed{\frac{r_2}{r_1}=\frac{9}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$DL = \frac{5}{2}$, $LD = \frac{13}{2}$.

Отв: $\frac{65}{24}$; $\frac{39}{8}$; $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\frac{ED}{AD} = \frac{MD}{DC}$

$\frac{AE - AD}{AD} = \frac{MD}{DC}$

$\sin\frac{\alpha}{2} =$

$\cos\angle A = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \frac{5}{13}$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{13-5}{2\cdot 13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$BO_2 = r_2$

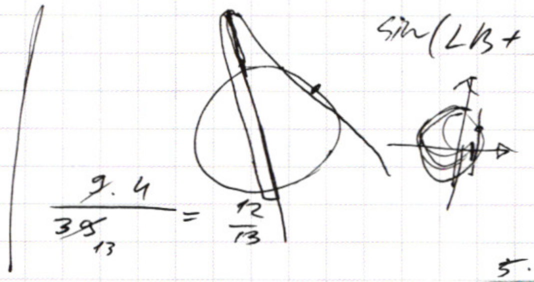
$AO_2 = r_2$

$O_2K = \quad \frac{5}{13}$

$13-5 = 8$

$\frac{39}{13}$

$\sin(\angle B + \frac{1}{2}\angle A) = \sin\angle B\cos\frac{1}{2}\angle A + \cos\angle B\sin\frac{1}{2}\angle A$.



$\frac{9\cdot 4}{\frac{39}{13}} = \frac{12}{13}$

$\frac{15}{24} \Rightarrow 39$

$\frac{5\cdot 3}{13\cdot\sqrt{13}} + \frac{12\cdot 2}{13\cdot\sqrt{13}} =$

$AD - ?$

$\frac{13+5}{}=\frac{18}{13\cdot 2}$

$= \frac{39}{13\cdot\sqrt{13}} =$

$\frac{13-9}{13} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha + x = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$

$\frac{4\cdot 3\cdot 13\cdot 13\cdot 9}{13\cdot 8\cdot 8} =$

$= \frac{13\cdot 27}{16} =$

ER^2

$27 \cdot 13 = 81 + 270 = 351$

$\frac{65}{24}$, $\frac{39}{8}$

(3) Положит. для $\forall$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $\quad (x, y) - ?$ $\quad 3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$ и $f(x/y) < 0$.

$f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$, т.е. $\frac{1}{27} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{3}$

$f(x) = [x/4] + [\frac{1}{y\cdot 4}] < 0$.

$\frac{1}{24} < 0$

$a = x$; $b = \frac{1}{y}$

$f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) = [x/4]$ ← для простых.

$f(\frac{1}{y}) = [\frac{1}{4y}]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $(a;b)$ - ? Для всех $x \in (1;3]$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$f(x) = 8x^2 ...$ $\quad x_0 = \frac{34}{10} = \frac{17}{8}$

$f'(x) = 16x - 34 = 0$

$x = \frac{2 \cdot 17}{8 \cdot 2} = \frac{17}{8}$ (чуть больше 2)

$f(1) = 8 - 34 + 30 = 4.$

$y_0 = \frac{8 \cdot 17^2}{8} - \frac{34 \cdot 17}{8} + 30 = \frac{17^2}{8} - \frac{2 \cdot 17^2}{8} + 30 = \frac{240 - 17^2}{8} =$

$= -\frac{49}{8}$

$f(3) = 72 - 102 + 30 = 0.$

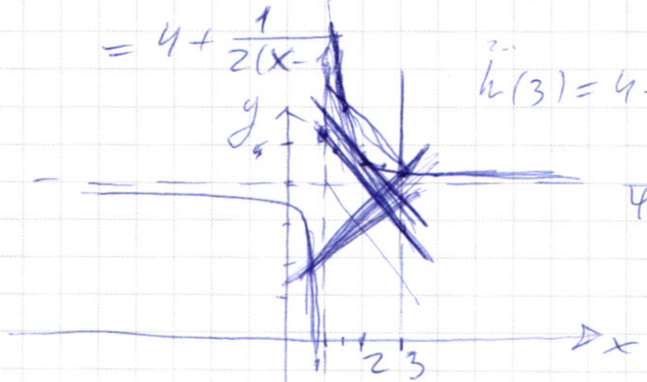
$\varphi(x) = ax + b$

$\boxed{\varphi(1) \geq 4 \text{ и } \varphi(3) \geq 0.}$

$h(x)\ \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} =$

$= 4 + \frac{1}{2(x-1)}$

$h(3) = 4 + \frac{1}{4} = 4{,}25.$



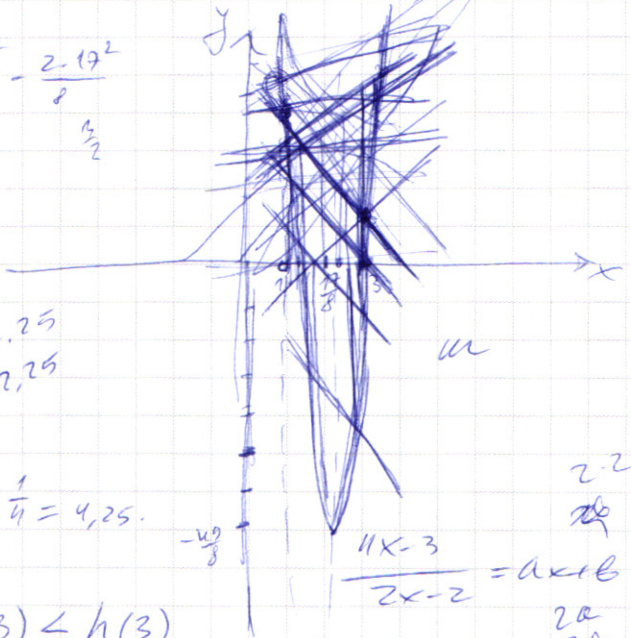
$\varphi(3) \leq h(3)$

$\varphi(1)$ - ?

$b \geq 4$

$(2x-2)(ax+b) =$

$= 2ax^2 + 2xb - 2ax - 2b$



$\frac{4x-3}{2x-2} = ax + b$

$2ax^2$

$b - a - 2(b - a - 2) =$

$= b^2 - ab - 2b$

$\begin{cases} a + b \geq 4 \\ 3a + b \geq 0 \\ 3a + b \leq 4{,}25 \end{cases}$

$2a \geq -4$

$\boxed{a \geq -2}$

$3a + b$ - $\begin{cases} a + b \geq 4 \\ a \geq -2 \end{cases}$

$b \geq 6.$

$a^2+4a - \quad a^2+4a+ab$

$\cancel{b+a} \qquad (a+b)^2 + 2(2a-2b-1) \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = f(1)+f(\frac{1}{3})$

$a^2+2a(2+b)+b^2-4b-2=0$

$\frac{D}{4} = 4+4b+b^2-b^2+4b+2 =$

$D = 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 =$

$-2x+6 \qquad \frac{36}{14}$ $\qquad$ 7, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$a = \frac{-2(2+b) \pm 2\sqrt{3}}{2} = \qquad \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$

$a-2b = \sqrt{ab}$

$a = -2-b \pm \sqrt{3}$

$a^2+4b^2-4ab = ab$

$2{,}25 \geq 3a+b \leq \qquad 0 \leq 3a+b \leq 2{,}25$

$b \geq 0 \qquad -6 \quad b \leq 8{,}25$

$3(x^2-y^2) \leq$

$3y(x-1) - 2(x-1)$

$3a \geq -4{,}25$

$a \leq -\frac{4{,}25}{2}$

$a \geq -2$

$a \geq -2$

$3y-2-2(x-1) =$
$= 3y-2x+2+$

$(3y-2)(x-1)$

$3x$

$3(y^2+2 \qquad 3y-$

$(3y-2)^2 = 9y^2 - 4 \cdot 3y + 4 = 3(3y^2 - 4y + \frac{4}{3})$

$(x-1)$ $\qquad 10b^2 = -4-9$

$4b \geq 2b$ $\qquad$ 12 13

$3y-2-2x+2 \qquad (a-2b)^2 = ab \qquad b^2 = \frac{25}{10} =$

$3y-2-2x+2=$ $\qquad a^2+4b^2-4ab = ab^2$

$(a-2b)^2 = (\sqrt{ab})^2 \qquad a^2-3ab+4b^2=0$

$a^2-4ab+4b^2 = ab \qquad D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$

$a^2-3ab+4b^2=0 \qquad a = \frac{5b+3b}{2} = 4b; \; a = \frac{5b-3b}{2} = b$

$(a-4b)(a-b) =$

$= \qquad 4 \geq 2 \geq 1$ $\qquad$ $\Rightarrow b \geq 0$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) α и β. Наименьшее 3х знач $tg\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\alpha = x, \ 2\beta = y$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(x+2y)+\sin x = 2\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{8}{17}$

$\sin 30° + \sin 90° = 2\cdot\sin 60°\cdot\cos 30° = \frac{2\cdot\sqrt3\cdot\sqrt3}{2\cdot 2} = \frac{3}{2}$

$1+\frac12 = \frac32$

$\sin(x+y) = -\frac{4}{17\cdot\cos y}$

$-\frac{4}{17\cdot\cos y} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos y = \frac{4\cdot\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\sin^2 y = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}$

$\sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$tg 2\alpha = \frac{\frac{\cos 2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha}}{2\cos\alpha - 1}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$

$tg\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$

$tg 2\alpha = \frac{1}{\frac{2\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}} =$

$\frac95 \cdot \frac53 = \frac45$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \frac{13\cdot5}{2\cdot3\cdot4} = \frac{65}{24}$

$\frac45\cdot\frac95\cdot 7^2$

$8(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\frac{13^2\cdot 5^2}{16\cdot4\cdot9} =$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\frac{9\cdot65}{5\cdot24}$

$\frac{13\cdot5\cdot9}{4\cdot2\cdot3\cdot5} = \frac{13\cdot5}{4\cdot2\cdot3} =$

$4tg\alpha = -1$

$= \frac{39}{8}$

$tg\alpha = -\frac14$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$(3y-2x)^2 = 3y(x-1)-2(x-1)$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} \\ \cancel{3x^2+3y^2-6x}-4y=4 \end{cases}$

$\cancel{3(x^2-2x+1)}$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y-2=9y^2-4\cdot3y+4=$

$=3(3y^2-4y+\frac{4}{3})=$

$\begin{cases} 9y^2\cancel{+4x^2}-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2\cancel{+3y^2}-6x-4y=4 \end{cases}$

$3y^2-4y+\frac{4}{3}=4-3x^2+6x+\frac{4}{3}$

$\cancel{6y^2+x^2-6xy+4y=3xy-2x-3y-2}$

$\cancel{6y^2+x^2-9xy+7y+2x+2=0}$

$\frac{1}{9}$

③ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(6x+x^2)-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq 0$

$-6 \quad 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)(1-$

$(2^3)^2=(8)^2=64$

$\log_4(x^2+6x)=t$

$2^6=64$

$(x^2+6x)=4^t$

$\angle A=\alpha.$

$180-\alpha \qquad \alpha+\cancel{BE}$

$3^t+4^t-4^{t\cdot\log_4 5}\geq 0$

$DA=2r_1^2+2r_1^2\cdot\cos(180°-\alpha)$

$3^t+4^t-4^{\log_4 5^t}\geq 0$

$DA=2r_1^2(1-\sin\alpha)$

$3^t+4^t-5^t\geq 0 \quad |:3^t$

$3^2+4^2=5^2 \qquad 3^3+4^3=5^3 \qquad \sin\alpha=\frac{\frac{5}{2}}{DA}.$

$3+4=5$

$3^t+4^t\geq 5^t$

$DA=2r_1^2\left(1-\frac{5}{2DA}\right)$

$\underline{t\leq 2}$ $\quad \cancel{1+\left(\frac{4}{3}\right)^t-\left(\frac{5}{3}\right)^t\geq 0}$ $\quad \cancel{3^2+4^2=5^2}$

$3^t+4^t=5^t \qquad BD^2=BK\cdot KA.$

при $t=2$ - рав-во

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$t=2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$BD^2=BK(2r_2-BK)$

$x=-8 \qquad x=2$

$\frac{169}{4}=$

$+ \quad - \quad +$

$-8 \quad 2$

$-8 \quad -6 \quad 0 \quad 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)