# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина $N$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $KN$. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $LM$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$

$2\alpha+4\beta=a+b$, $2\alpha=a-b$ $\Rightarrow$ $a=2\alpha+2\beta$, $b=2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$ $\Rightarrow$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5} \Rightarrow 2\cdot-\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\beta=-\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{2\sqrt5}{5}$

1) $\sin 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}=-\frac{\sqrt5}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-2+1=0 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$

$\cos\alpha=0 \Rightarrow 2-1=0$ ⊗

$\cos\alpha\neq0 \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha+3-\operatorname{tg}^2\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-3=0$

$D_1=1+3=4 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm2}{1}$ ↗ $3$, ↘ $-1$

2) $\sin 2\beta=-\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}=-\frac{\sqrt5}{5} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+2+1=0$

$\cos\alpha=0 \Rightarrow 0+3=0$ ⊗ $\Rightarrow \cos\alpha\neq0$ $\quad 2\operatorname{tg}\alpha-1+3\operatorname{tg}^2\alpha=0$ $\quad 3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0$

$D_1=1+3=4 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm2}{3}$ ↗ $-1$, ↘ $\frac{1}{3}$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\{-1;\ \frac{1}{3};\ 3\}$

N2

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$ $\Rightarrow (x-12y)^2=\cancel{(x-6)(2y}\ 2xy-12y-x+6$

$\Rightarrow (x-6)^2+(6y-3)^2=90$

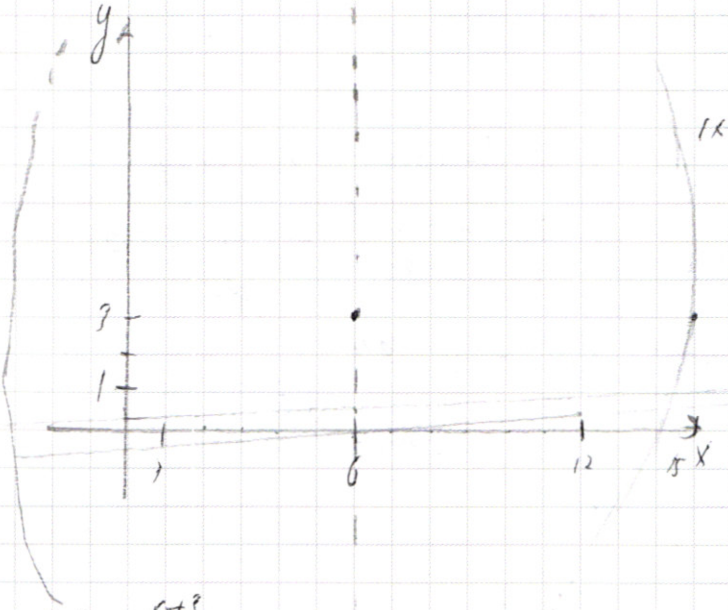
$x\geq12y$ $\quad x^2-24xy+144y^2=2xy-12y+x+6 \Rightarrow 144y^2+y(12-26x)+x^2-x+6$

$D_1=(6-13x)^2-144(x^2-x+6)=36-156x+169x^2-144x^2+144x-864=(5x-30)^2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$y=\frac{13x-6\pm(5x-30)}{144} \to \frac{18x-36}{144}=\frac{x-2}{8} \quad x-12\cdot\frac{x-2}{8}\geq 0 \Rightarrow x\leq 6$$ продолжение №2

$$\to \frac{8x+24}{144}=\frac{x+3}{18} \quad x-12\cdot\frac{x+3}{18}\geq 0 \Rightarrow x\geq 6$$



$\sqrt{90}=3\sqrt{10}\approx 9$

$9<3\sqrt{10}<12$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

1) $y=\frac{x-2}{8}$

$(x-6)^2+\left(6\cdot\frac{x-2}{8}-3\right)^2=90$

$\cancel{x^2-12x+36}\,(x-6)^2+\left(\frac{3(x-2)}{4}-3\right)^2=90$

$(x-6)^2+\frac{9}{16}(x-6)^2=90$

$\frac{25}{16}(x-6)^2=90 \Rightarrow x-6=\pm\frac{3\sqrt{10}\cdot 4}{5}$

$\begin{cases} x=6\pm\frac{12}{5}\sqrt{10} \\ x\leq 6 \end{cases}$

$x=6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$y=\frac{x-2}{8}=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) $y=\frac{x+3}{18}$

$(x-6)^2+\left(6\cdot\frac{x+3}{18}-3\right)^2=90$

$(x-6)^2+\frac{1}{9}(x-6)^2=90$

$\frac{10}{9}(x-6)^2=90 \Rightarrow (x-6)^2=9^2 \Rightarrow x-6=\pm 9 \Rightarrow \begin{cases} x=6\pm 9 \\ x\geq 6 \end{cases} \Rightarrow x=15$

$y=\frac{x+3}{18}=\frac{15+3}{18}=1$

Ответ: $(15;1)$; $\left(6-\frac{12}{5}\sqrt{10};\ \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$p=10x-x^2$

$p>0$

$p+|-p|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 p}$

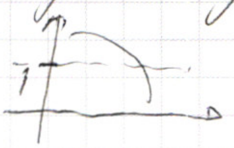
$\log_5(p+p^{\log_3 4})\geq \log_3 p \Rightarrow \frac{\log_3(p+p^{\log_3 4})}{\log_3 5}\geq \log_3 p$ $\quad \log_3 5>0$

$\log_3(p+p^{\log_3 4})-\log_3 p^{\log_3 5}\geq 0 \Rightarrow p+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}$ $\quad p>0$

$p^{1-\log_3 5}+p^{\log_3 4-\log_3 5}\geq 1$

$p^{\log_3\frac{3}{5}}+p^{\log_3\frac{4}{5}}\geq 1$

$\log_3\frac{3}{5}$ и $\log_3\frac{4}{5}<0 \Rightarrow$ левая часть неравенства $\downarrow$ при $p\uparrow$



$\Rightarrow p\in(0;k]$, где $k^{\log_3\frac{3}{5}}+k^{\log_3\frac{4}{5}}=1$ (k принимает лишь одно значение)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №3

$k=9$, т.к. $9^{\log_3 \frac{3}{5}} + 9^{\log_3 \frac{4}{5}} = 3^{\log_3 \left(\frac{3}{5}\right)^2} + 3^{\log_3 \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$

$p \in (0;9]$ при $p=9$ $1+1 \geq 1$ (+)

$p<9 \Rightarrow p^{\log_3 \frac{3}{5}} > 1$

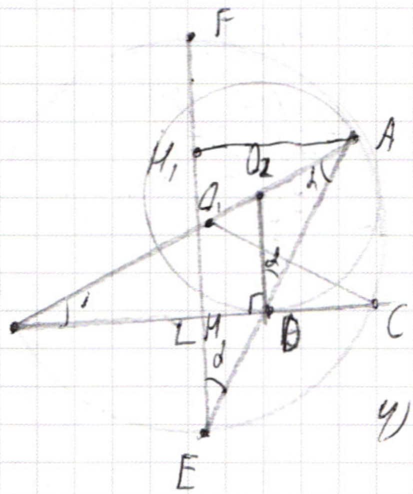
$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \Rightarrow x(x-10) < 0 \Rightarrow x \in (0;10) \\ 10x - x^2 \leq 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1] \cup [9;10)$$

$D_1 = 25 - 9 = 16$ $(x-1)(x-9) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;1] \cup [9;+\infty)$

$x = \frac{5 \pm 4}{1} \swarrow^{9}_{1}$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

№4




1) $BC$-касательная $\Rightarrow O_2D \perp BC$

2) $EF \perp BC$ и $O_2D \perp BC \Rightarrow EF \parallel O_2D$

3) Пусть радиус $\Omega$ окр $= R$

$\omega$ окр $= r$

тогда $O_2D = r$ $BO_1 = O_1C = R$

$BO_2 = 2R - r$

4) $BO_1 = O_1C \Rightarrow \cos\angle OBC = \frac{BC}{2BO_1}$ (т.к. $\angle O_1BC$ - равнобедренный)

$\cos\angle O_2BD = \frac{BD}{BO_2}$ и $\operatorname{tg}\angle O_2BD = \frac{O_2D}{BD}$

5) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$

$\frac{(2R-r)^2}{BD^2} = \frac{r^2}{BD^2} + 1 \Rightarrow 4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + BD^2 \Rightarrow 4R^2 - 4Rr - BD^2 = 0$

$D_1 = 4r^2 + 4BD^2 \Rightarrow R = \frac{2r \pm 2\sqrt{r^2 + BD^2}}{4} = \frac{r + \sqrt{r^2 + BD^2}}{2}$

6) $\frac{BD}{2R - r} = \frac{BD + CD}{2R} \Rightarrow$ $BD \cdot (r + \sqrt{r^2 + BD^2}) = (BD + CD) \cdot \sqrt{r^2 + BD^2}$

продолжение №4

7) $\frac{17}{2}r+\frac{17}{2}\sqrt{r^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2}=\left(\frac{17}{2}+\frac{15}{2}\right)\sqrt{r^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{17}{2}r=\frac{15}{2}\sqrt{r^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2}$

$$\left(\frac{17}{15}\right)^2 r^2 = r^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2\left(\left(\frac{17}{15}\right)^2-1\right)=\left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$r^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2\cdot\frac{15^2}{17^2-15^2}=\frac{17^2\cdot 15^2}{2^2\cdot 2\cdot 32}\Rightarrow r=\frac{17\cdot 15}{2\cdot 8}=\frac{17\cdot 15}{16}=\frac{255}{16}$$

$$R=\frac{\frac{17\cdot 15}{16}+\sqrt{\left(\frac{17\cdot 15}{16}\right)^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\frac{17\cdot 15}{16}+\frac{17}{16}\sqrt{7\cdot 23}}{2}=\frac{17}{32}\left(15-\sqrt{7\cdot 23}\right)$$

8) Пусть $\angle AEF=\alpha \Rightarrow \angle ADO_2=\alpha$, т.к. $O_2D \parallel EF$

9) $O_2D=O_2A \Rightarrow \angle ADO_2=\angle O_2AD=\alpha \Rightarrow \angle AEF=\angle O_2AD=\alpha \Rightarrow$ ~~A~~. $O_1 \in EF$

$EF$ - диаметр $\Rightarrow \angle FAE=90°$ (т.к. он вписан в окр. и опирается на диаметр)

10) $\angle DO_2A=180-2\alpha \Rightarrow \angle BO_2D=2\alpha \Rightarrow tg2\alpha=\frac{BD}{r}=\frac{17}{2}\cdot\frac{16}{17\cdot 15}=\frac{8}{15}$

11) $tg2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\Rightarrow tg^2\alpha+\frac{2}{tg2\alpha}tg\alpha-1=0$

$tg^2\alpha+\frac{15}{4}tg\alpha-1=0 \Rightarrow D_r=\frac{225}{16}+4=\frac{289}{16}\Rightarrow tg\alpha=\frac{-\frac{15}{4}\pm\frac{17}{4}}{2}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

т.к. ~~∠AA~~ $\alpha<90°$ ($\angle FAE=90°$) $\Rightarrow \angle AFE=90-\alpha=90-arctg\frac{1}{4}=arcctg\frac{1}{4}$

12) ~~HD = BD - BCD~~ т.к. $EF \parallel O_2D \Rightarrow \frac{BO_1}{\cancel{BD}\ O_1O_2}=\frac{BM}{MD}=\frac{BD-MD}{MD}=\frac{BD}{MD}-1$

$\frac{R}{R-r}=\frac{BD}{MD}-1\Rightarrow MD=\cancel{BD}\ BD\cdot\frac{R-r}{r}$

13) $\frac{MD}{ME}=tg\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow ME=4MD$

14) $\triangle M$.

Ответ $r=\frac{255}{16}$ $R=\frac{17}{32}(15-\sqrt{161})$; $\angle AEF=arcctg\frac{1}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(p) = [\frac{p}{4}] \Rightarrow$ $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=\dots$, $f(5)=1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(2^3) = 3\cdot f(2) = 0$

Если $\frac{x}{y} = 2^k\cdot 3^p \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = 0$

$\cancel{f(k\cdot\frac{1}{t}) = f(k) + f(\frac{1}{t}) \Rightarrow f(\frac{1}{t}) = f(k\cdot\frac{1}{t}) - f(k)}$

$f(\frac{m}{n}) = f(m) + f(\frac{1}{n})$

$f(\frac{m}{n}) = f(m) - f(n)$

$f(n) = f(n^2) + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = f(n) - f(n^2) = -f(n)$

$m; n;$ – простые

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

Если $x = 2^k\cdot 3^p$, то $y \neq 1; 2; 3$, $y \neq 1$; $\cancel{2;4;6}$

$y = 5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25$

Если $y = 5; 7$, то $f(y) = 1 \Rightarrow$ $f(x) = 0 \Rightarrow$ $x < 5$

~~Если $y = 11; 13; \dots$, то $f(y) = 2 \Rightarrow x < 1$~~

$14 = 7\cdot 2 \Rightarrow f(14) = f(7) = 1$

$15 = 5\cdot 3 \Rightarrow f(15) = f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(19) = 4$, $f(17) = 4$, $f(10) = f(5) = 1$

$f(20) = f(5) = 1$, $f(21) = f(7) = 1$, $f(13) = 3$

$f(22) = f(11) = 2$, $f(23) = 5$, $f(25) = 2\cdot f(5) = 2$

1) $y = \underbrace{5; 7; 14; 15; 20; 21}_{7\text{ пар}}$ ; $x = 2^k\cdot 2^p$ $\cancel{1;2;3}$ } 10 пар

2) $y = \underbrace{11; 22; 25}_{3\text{ пары}}$ ; $x = 2^k\cdot 2^p$; $5; 7\dots$ } $7+10 = 17$ пар

3) $y = \underbrace{13}_{1\text{ пары}}$ ; $x = 2^k\cdot 2^p$; $5; 7\dots$; $14; 22; 25$ } $7+10+3 = 20$ пар

4) $y = \underbrace{19; 17}_{2\text{ пары}}$ 8: $20+1 = 21$ пара

5) $y = \underbrace{23}_{1\text{ пара}}$ 8: $21+2 = 23$ пары

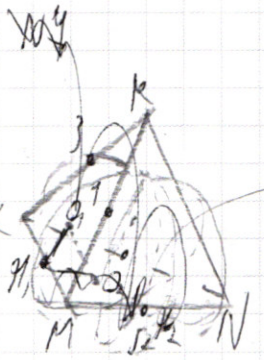
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

продолжение №5

Всего: $4\cdot10+3\cdot17+1\cdot20+2\cdot21+1\cdot23=40+51+20+42=183$

Ответ: всего 183 пары.

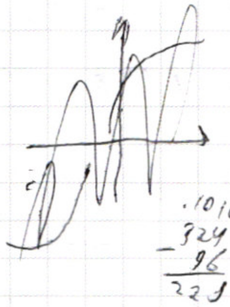


в силу симметрии

№6

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b$ (1) $\quad$ ~~$\frac{16x-16-4ax^2+5ax-4bx+5b}{4x-5}\le0$~~

$-32x^2+36x-3\ge ax+b$ (2) $\quad$ 1) $\frac{16x-16}{4x-5}=4-\frac{1}{4x-5}$

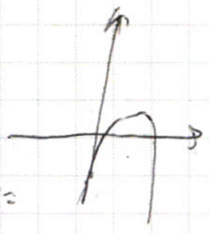


~~$\frac{-4ax^2+x(16+5a-4b)-16+5b}{x-\frac{5}{4}}$~~ $\le0$

~~$D=(16+5a-4b)^2$~~

2) $-32x^2+36x-3$

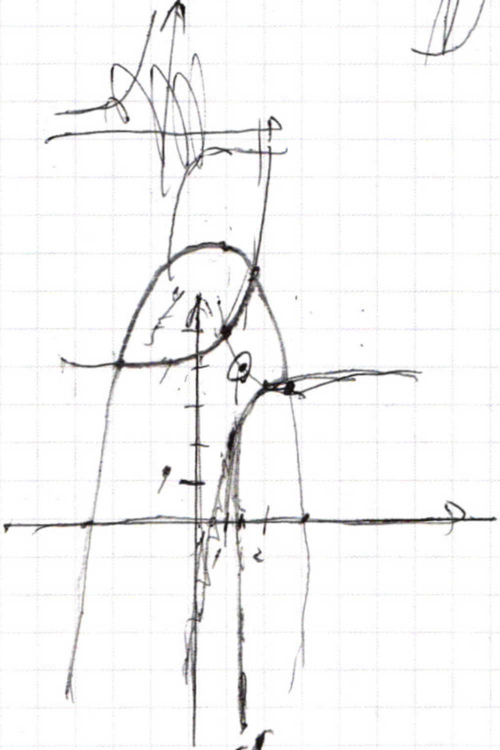
$x_0=\frac{-18}{-32}=\frac{9}{16}$

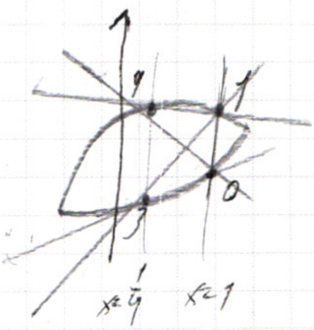


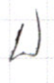
$D_1=324-32\cdot3=324-96=$

$=228$

$y_0=-32\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2+36\cdot\frac{9}{16}-3=\frac{57}{8}$







$\square$ черновик $\boxtimes$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №6

1) $x=1 \Rightarrow y=-32\cdot 1+36\cdot 1-3=1$ (2)

$y=\frac{16-16}{4-5}=0$ (2)

2) $x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3=-2+9-3=4$ (2)

$y=\frac{16\cdot\frac{1}{4}-16}{4\cdot\frac{1}{4}-5}=\frac{4-16}{1-5}=\frac{-12}{-4}=3$

1) $a=3$

$\cancel{b+}\ 3\cdot\frac{1}{4}=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=45+36+9=90 \end{cases}$$

$x-12=\sqrt{x(2y-1)+6(1-2y)}=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$$\begin{cases} x-12y\geq 0 \Rightarrow x\geq 12y \\ (x-12)^2=(x-6)(2y-1) \end{cases}$$

$2y-1=\frac{(x-12)^2}{x-6} \Rightarrow y=\frac{(x-12)^2}{2(x-6)}+\frac{1}{2}$

$x^2-24y+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+x+144y^2+12y=26xy+6$

$(x+\frac{1}{2})^2+(12y+\frac{1}{2})^2=26xy+7$

$144y^2+y(12-26x)+x^2+x-6=0$

$D_1=(6-13x)^2-144(x^2+x-6)=$

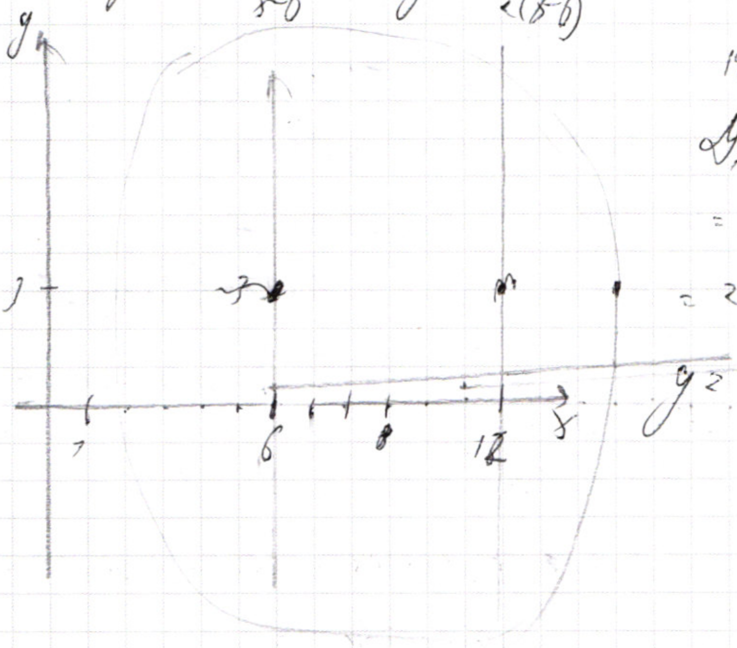
$=36-156x+169x^2-144x^2-144x+864=$

$=25x^2-300x+900=(5x-30)^2$

$\frac{13x-6\pm(5x-30)}{144} \quad \frac{18x-36}{144}=\frac{x-2}{8}$

$\frac{8x+24}{144}=\frac{x+3}{18}$

$x=3$ $x\geq 12$



$$\begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ y=\frac{x+3}{18} \end{cases} \qquad (x-6)^2+(\frac{x+3}{3}-3)^2=90 \qquad (x-6)^2+\frac{(x-12)^2}{9}=90$$

$x^2-12x+36+\frac{x^2-24x+144}{9}=90$

$9x^2-108x+x^2-24x+144=486$

$10x^2-24x-450=0$

$5x^2-12x-225=0$

$D_1=36+1125=1161=27\cdot 43$

$x=\frac{6\pm 3\sqrt{3\cdot 43}}{5}$

$x-\frac{3}{3}x+2=\frac{x}{3}+2 \quad x\geq 6$

$x-\frac{3}{2}x+3=3-\frac{x}{2} \Rightarrow x<6$

$x-\frac{3}{2}x+3$

$9(x^2-12x+36)+9x^2 \qquad 3x-6-12=3x-18$

$\frac{3x-18}{4}=\frac{3}{4}(x-6)$

$\frac{x(x+3)-9}{3}=\frac{x-6}{5}$

$6+3\cdot 11=\frac{39}{5}$

$\frac{144\cdot 6}{864}$ $\frac{13\cdot 6}{78}$ $\frac{78\cdot 2}{156}$ $\frac{54\cdot 9}{486}$ $\frac{225\cdot 5}{1125}$ $39\cdot 39=1521$ $144:18$ $1161:3=387$ $129:3=43$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt5}{5}$ $\qquad$ $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) =$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) =$

$= 2\sin\ 2\sin b\cos a$

$2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} - \frac{\sqrt5}{5}$

$2\alpha+4\beta = a+b$

$2\alpha+2\beta = a-b$

$\cancel{2\sin(2\alpha+2\beta)\cos}$

$a = 2\alpha+3\beta$

$b=\beta$

$\sin(a+b)+\sin(a-b) = -\frac{2}{5}$

$= 2\sin a\cos b = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$a = 2\alpha+2\beta$

$b = 2\beta$

$2\cdot +\frac{\sqrt5}{5}\cdot\cos 2\beta = +\frac{2}{5}$

$\frac{\sqrt5}{5} = \cos 2\beta$

$\pm\frac{2\sqrt5}{5} = \sin 2\beta$

$\sin^2 2\beta = 1 - \frac{5}{25} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 + \cancel{1\cdot\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \,|\, :\cos^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg - 3 = 0$

$D_1 = 1+3 = 4$

$tg = \frac{1\pm2}{1}$ $\to 3$; $\to -1$

$\cancel{\sin 2\beta = -\frac{\sqrt5}{5}}$

$\cancel{\sin 4\beta = 2\cdot\frac{\sqrt5}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{5} = \frac{4}{5}}$

2) $\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha\cdot -\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$D_1 = 1+3 = 4$

$tg\alpha = \frac{-1\pm2}{3}$ $\to -1$; $\to \frac{1}{3}$

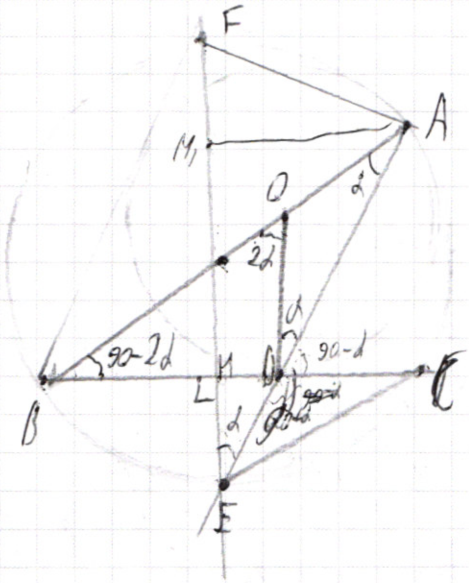
Ответ: $tg\alpha = -1;\ \frac{1}{3};\ 3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

FE ∥ OD

$\angle EDC = 360 - 90 - (90-\alpha) - \alpha = 360 - 240 + \alpha = 90 - \alpha$




$\sin\beta = \frac{r}{2R-r}$

$ctg\beta = \frac{BD}{r}$

$\cos\beta = \frac{BD}{2R-r}$

$\cos\beta = \frac{BC}{2R} = \frac{BD}{2R-r}$

$2R-r$

$\frac{(2R-r)^2}{r^2} = \frac{BD^2}{r^2} + 1$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = BD^2 + r^2$

$4R - 4Rr - BD^2 = 0$

$f(\frac{7}{5}) = f(7) + f(\frac{1}{5})$

$f(25) = f(25) + f(\frac{1}{5})$

$f(\frac{1}{5}) = f(5) - 2f(5)$

$17 \cdot 17 = 289$ $\quad$ $289 - 225 = 64$ $\quad$ $17 \cdot 17 = 119 + 17$ $\quad$ $17 \cdot 15$

$2 \cdot 32 = 64$

$8^2 \cdot (17 \cdot 15)^2$ $\quad$ $\frac{17^2 \cdot 15^2}{16^2} - 17^2 \cdot 8^2 = \cancel{17 \cdot 15 - 1}$ $\quad$ $17^2 (15^2 - 8^2) = \frac{17^2 \cdot (7 \cdot 23)}{16^2}$

$225 - 64 = 161$ $\quad$ $17 \cdot 15 = 85 + 17 = 255$ $\quad$ $HD = 1$

$tg^2\alpha = tg 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$42 + 51 = 93 + 20 = 110 + 70 = 180$

$225 + 64 = 289$

$\frac{2R-r}{R} = \frac{BH}{HD} = \frac{BD - HD}{HD} = \frac{BD}{HD} - 1$

$1 - tg^2\alpha = \frac{2}{tg 2\alpha} tg\alpha$

$tg^2\alpha + \frac{2}{tg 2\alpha} tg\alpha - 1 = 0$

$\frac{R - R + r}{R - r}$

$18 \cdot 18 = 144 + 18 = 324$

$32 \cdot 12 = 64 + 32 = 384$

$\frac{\cancel{16x - 16}}{9x - 5} = ax + b$

$324 - 96 = 228$

$-32x^2 - 36x - 7 = ax + b$

$D_1 = 18^2 - 32 \cdot 12 = 324 - 384 = 228$

$f(1) = [\frac{1}{4}] = 0$

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

24 -

$K : 2$

$f(\frac{x}{y}) = f(2^n \cdot 3^m) = 0$

$\frac{x}{y} = 2^n \cdot 3^m$

$\frac{x}{y} = 1; 2; 3$

$f(K \cdot \frac{1}{7}) = f(K) + f(\frac{1}{7})$ $\quad$ $x = 2^n \cdot 3^m \cdot y$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(\frac{1}{8}) = f(K \cdot \frac{1}{4}) f(9) = f(2) + f(\frac{1}{2})$ $\quad$ $\cancel{f(\frac{1}{2}) = f(}$

$f(6) = 0$ $\quad$ $f(\frac{1}{2}) =$

$f(\frac{4}{2}) = f(4) - f(2)$

$f(4 \cdot 2) = 0$

$f($

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|10x+1x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$p=10x-x^2$

$p+|-p|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 p}$

$p>0$

$p+p^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 p}$

$\log_5(p+p^{\log_3 4}) \geq \log_3 p$

$\frac{\log_3 \dots}{\log_3 5} \geq \log_3 p$

$p+p^{\log_3 4}-p^{\log_3 5} \geq 0$

$p^{\log_3 5}(p^{\log_3 \frac{3}{5}}+p^{\log_3\frac{4}{5}}-1) \geq 0$

$\log_3(p+p^{\log_3 4})-\log_3 5 \log_3 p \geq 0$

$\log_3(p+p^{\log_3 4})-\log_3 p^{\log_3 5} \geq 0$

$p^{\log_3\frac{3}{5}}+p^{\log_3\frac{4}{5}} \geq 1$

$p+p^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5}$

$p^{\log_3\frac{3}{5}}(1+p^{\log_3\frac{4}{5}-\log_3\frac{3}{5}}) \geq 1$

$p^{\log_3 5}(p^{1-\log_3 5}+p^{\log_3 4-\log_3 5}) \geq 0$

$p^{\log_3\frac{3}{5}}(1+p^{\log_3\frac{4}{3}}) \geq 1$

$p^{\log_3 5}(p^{\log_3\frac{3}{5}}+p^{\log_3\frac{4}{5}}) \geq 0$

$\frac{p}{50}$

$p^{\log_3\frac{3}{5}}+p^{\log_3\frac{4}{5}}=1$

$p^{\log_3 3-\log_3 5}+p^{\log_3 4-\log_3 5}=1$

$\frac{1}{2}^{\log_3\frac{3}{5}}+\frac{1}{2}^{\log_3\frac{4}{5}}=1$

$\frac{2^{\log_3\frac{4}{5}}+2^{\log_3\frac{3}{5}}}{2^{\log_3\frac{12}{25}}}=1$

$p<9$ $\quad p\in(0;9]$

$\frac{p}{p^{\log_3 5}}+\frac{p^{\log_3 4}}{p^{\log_3 5}}=1$

$\begin{cases} 10x-x^2>0 \\ 10x-x^2 \leq 9 \end{cases}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

$\begin{cases} x^2-10x<0 \\ x^2-10x+9 \geq 0 \end{cases}$

$x(x-10)<0 \quad x\in(0;10)$

$D_1=25-9=16$

$x=\frac{5\pm 4}{1}=9,\ 1$ $\quad (x-1)(x-9) \quad x\in[1;9] \quad x\in[1;9]$

$\frac{1}{9}=\frac{1}{(\frac{3^2}{5})}=\frac{25}{9} \quad \left(\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{\frac{3^n}{5}}=\left(\frac{5}{3}\right)^n$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{5}}=1 \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \quad \frac{3+4+2\sqrt{12}}{5}$

$-\frac{81}{16\cdot 2\cdot 3}=-\frac{81}{8}$

$\frac{81}{4}-3-\frac{81}{8}=$

$\frac{81}{8}-3=\frac{81-24}{8}=$

$y=\frac{1}{7}$

$x=\frac{1}{985}$

$23 \times 4 = 161$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)