МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$tg\,\alpha - ?$

1) пусть $\gamma = 2\alpha+2\beta$

$\varphi = 2\beta$

тогда

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(\gamma+\varphi) + \sin(\gamma-\varphi) = -\frac{2}{17}$ (2)

(2): $2\cdot\sin\frac{\gamma+\cancel{\varphi}+\gamma-\cancel{\varphi}}{2}\cdot\cos\frac{\cancel{\gamma}+\varphi-\cancel{\gamma}+\varphi}{2} = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin\gamma\cdot\cos\varphi = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos\varphi = -\frac{2}{17}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

3) $tg\,\alpha = tg\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)$

$\sin(\gamma-\varphi) = \frac{2\,tg\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)}$; пусть $tg\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right) = t$

также $\sin(\gamma-\varphi) = -\frac{2}{17} - \sin(\gamma+\varphi) = -\frac{2}{17} - (\sin\gamma\cdot\cos\varphi +$

$+\cos\gamma\cdot\sin\varphi) = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right) =$

$= -\frac{2}{17} + \frac{1}{17} \mp \frac{16}{17} = -\frac{1}{17} \mp \frac{16}{17}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

I. сл.:

$$\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{1}{17} - \frac{16}{17}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = -1; \quad 2t = -1 - t^2$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$(t+1)^2 = 0$$

$$t = -1$$

II сл.:

$$\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{1}{17} + \frac{16}{17}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{15}{17}$$

$$34t = 15 + 15t^2$$

$$15t^2 - 34t + 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 17^2 - 15^2 = \underbrace{(17-15)}_{2}\underbrace{(17+15)}_{32} = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{17-8}{15} \qquad t_2 = \frac{17+8}{15}$$

$$t_1 = \frac{3}{5} \qquad t_2 = \frac{5}{3}$$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

3) $|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

ОДЗ:

$$26x - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow |x^2 - 26x| = 26x - x^2$$

1) пусть $t = 26x - x^2$, $t > 0$

тогда $t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$$12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$$

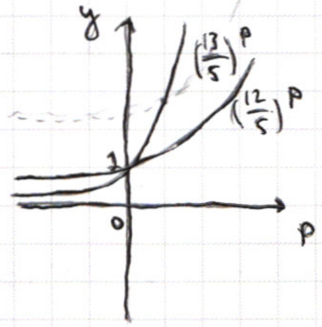
2) пусть $\log_5 t = p$; тогда $t = 5^p$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$12^p + 5^p \geqslant 13^p$

$5^p > 0 \Rightarrow \quad : 5^p$

$\left(\frac{12}{5}\right)^p + 1 \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^p$



$\left(\frac{12}{5}\right)^p + 1 = \left(\frac{13}{5}\right)^p$ имеет один корень

пусть $p = 2$: $\frac{144}{25} + 1 = \frac{169}{25}$

верно

$\Rightarrow$ ~~$p \in (0; 2]$~~ $p \in (-\infty; 2]$

обр. замена: $\log_5 t \leqslant 2$

с уч. $t > 0$: $0 < t \leqslant 25$

обр. замена: $0 < 26x - x^2 \leqslant 25$

$\begin{cases} 26x - x^2 \leqslant 25 & (1) \\ 26x - x^2 > 0 \end{cases}$

(1): $x^2 - 26x + 25 \geqslant 0$; $x^2 - 26x + 25 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 26 \\ x_1 x_2 = 25 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

+ − +

1 25 x

(2): $x^2 - 26x < 0$ $x^2 - 26x = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 26 \end{array}\right.$

+ − +

0 26 x

итого: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$

⑤ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p – простое

$N(x;y)$: $4 \le x \le 28$, $4 \le y \le 28$, $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

1) $f(2a) = f(2) + f(a) = f(a)$

$f(3a) = f(3) + f(a) = f(a)$

$f(5a) = f(5) + f(a) = 1 + f(a)$

2) $f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1
x	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
f(x)	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1		

4)

p	0	1	2	3	4	5
кол-во x: f(x) < p	0	9	17	20	22	24

5) $f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

6) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$; $f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

расм.:

f(y)	кол-во y	кол-во подх. x
0	9	0
1	8	9
2	3	17
3	2	20
4	2	22
5	1	24

$9 \cdot \underset{0}{0} +$
$\underset{72}{8 \cdot 9} +$
$\underset{51}{3 \cdot 17} +$
$\underset{40}{2 \cdot 20} +$
$\underset{44}{2 \cdot 22} +$
$\underset{24}{1 \cdot 24} = 231$

Ответ: 231

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$

(1): $y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$ и $y-6x \geq 0$

$y^2+y(1-13x)+(36x^2+6x-6)=0$

$D = 1-26x+169x^2-144x^2-24x+24 =$

$= 25x^2-50x+25 = (5x-5)^2 \geq 0$

$y_1 = \frac{13x-1-5x+5}{2}$; $y_2 = \frac{13x-1+5x-5}{2}$

$y_1 = 4x+2$ $y_2 = 9x-3$

I. $y = 4x+2$

$y-6x \geq 0$; $4x+2-6x \geq 0$

$2x \leq 2$

$x \leq 1$

подст во (2):

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-12(4x+2)-45=0$

$-48x-24$

$25x^2-50x-65=0$

$5x^2-10x-13=0$

$\frac{D}{4} = 25+65=90$

$x_1 = \frac{5-3\sqrt{10}}{5}$ $x_2 = \frac{5+3\sqrt{10}}{5}$ неуд

$\frac{5-3\sqrt{10}}{5} \underset{<}{\vee} 1$; $5-3\sqrt{10} \vee 5$, $-3\sqrt{10}<0$; $\frac{5+3\sqrt{10}}{5} \underset{>}{\vee} 1$ $3\sqrt{10} \underset{>}{\vee} 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{5-3\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow y = 4 \cdot \dfrac{5-3\sqrt{10}}{5} \overset{5/}{+2}$

$y = \dfrac{20 - 12\sqrt{10} + 10}{5}$

$y = \dfrac{30-12\sqrt{10}}{5}$

II. $y = 9x - 3$

$y - 6x \geqslant 0$; $\quad 9x - 3 - 6x \geqslant 0$

$3x \geqslant 3$

$x \geqslant 1$

$9x^2 + 81x^2 - 54x + 9 - 18x - 108x + 36 - 45 = 0$

$90x^2 - 180x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ неуд} \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \underset{18}{9 \cdot 2} - 3$

$y = 15$

Ответ: $\left(\dfrac{5-3\sqrt{10}}{5}; \dfrac{30-12\sqrt{10}}{5}\right)$; $(2; 15)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$\gamma = 2\alpha+2\beta$

$\varphi = 2\beta$

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos\gamma = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(\gamma+\varphi) + \sin(\gamma-\varphi) = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin\gamma\cdot\cos\varphi = -\frac{2}{17}$

$\cancel{2}\cdot(\cancel{-}\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\cos\varphi = \cancel{-}\frac{\cancel{2}}{17}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin\varphi = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

~~$tg\alpha = tg\,\varphi$~~ $tg\alpha = tg\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)$

$\sin(\gamma-\varphi) = -\frac{2}{17} - \sin(\gamma+\varphi) =$

$=$ $\frac{2\overbrace{tg\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)}^{t}}{1+\underbrace{tg^2\left(\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)}_{t}}$ $\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

I. $\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{17}+\frac{16}{17}\right) = -1$ II. $\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{17}-\frac{16}{17}\right)$

$\frac{15}{17}$ -1 $1-\frac{2}{17}$

$2t = -1-t^2$

$t^2+2t+1=0$

$(t+1)^2=0$

$t=-1$

$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{15}{17}$

$34t = 15+15t^2$

$15t^2-34t+15=0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{D}{4} = 17^2 - 15^2 = = 2\cdot 32 = 64 = 8^2$

$t_1 = \frac{17-8}{15} = \frac{9^{3}}{15_5} \quad t_2 = \frac{17+8}{15} = \frac{25^5}{15_3}$

$t_1 = \frac{3}{5} \qquad t_2 = \frac{5}{3}$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

② $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2 = 18x-12y-45=0 & (2) \end{cases}$

(2): $(3x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 = 45$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

(1): $\begin{cases} y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6 \ (\cdot) \\ y - 6x \geq 0 \end{cases}$

$(\cdot)$: $y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0$

$(y-9x)(y-4x) + 6x + y - 6 = 0$

(2): $9x^2 - 18x + (y^2 - 12y - 45) = 0$ $\qquad \frac{D}{4} = 81 - 9(y-15)(y+3)$

$((y-6)^2 - 81) = 0$ $\qquad \cancel{81}$

$(y-6-9)(y-6+9)$ $\qquad 9(y-15)(y+3) \leq \cancel{81}\ 9$

$(y-15)(y+3) = 0$ $\qquad y^2 - 12y - 64 \leq 0$

$|:9 \qquad 8\cdot 8$

$4\cdot 16$

$x^2 - 2x + \left(\frac{y}{3}-5\right)\left(\frac{y}{3}+1\right)$

$y^2 - 12y + (9x^2 - 18x - 45) = 0$

$(3x-3)^2 - 64$

③ $|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

ОДЗ. $26x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 26x < 0$ $\qquad$ 0 26 x $\qquad t = 26x - x^2$, $t > 0$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$\cancel{(26x - x^2)}$ $\qquad t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$ $\qquad (12+1)^{\log_5 t}$

$\boxtimes$ черновик $\qquad \square$ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

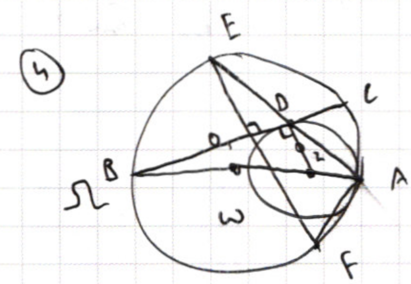
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

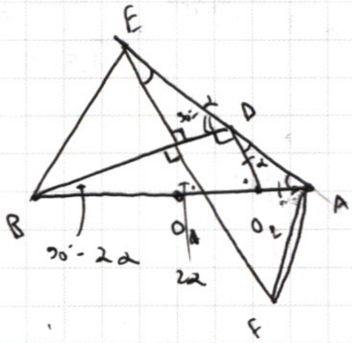
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$CD = 12$

$BD = 13$

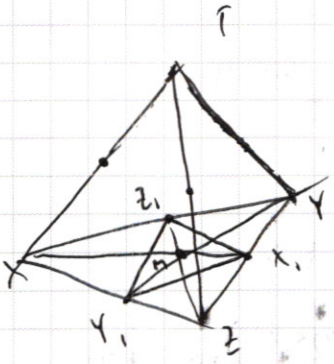


$CD \cdot BD = ED \cdot DA$

$ED \cdot DA = 12 \cdot 13$

$180° - 90° - \alpha - \alpha$

$90° - 2\alpha$

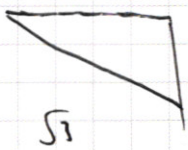


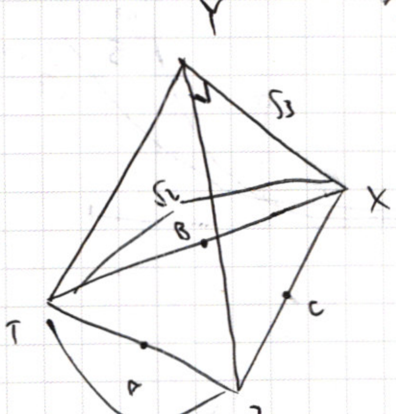
$XY = \sqrt{3}$

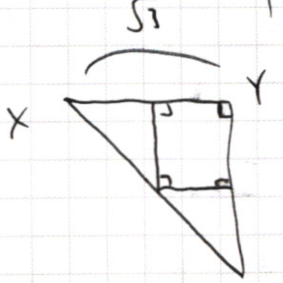
$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2$

$Z_1 = H_M^{-\frac{1}{2}}(Z)$







$$\begin{array}{r} 72 \\ +51 \\ \hline 123 \\ +40 \\ \hline 163 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ +51 \\ \hline 123 \\ +40 \\ \hline 163 \\ 42 \\ \hline 205 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 163 \\ +44 \\ \hline 207 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 207 \\ +24 \\ \hline 231 \end{array}$$

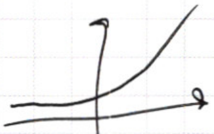
☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$t^{\log_5 12} \geqslant 13^{\log_5 t} - t$ $\qquad e^x \quad e^{\ln(a)x} \qquad a^x \quad a^x \ln a$

$t^{\log_5 12}$ $\qquad f(t)=13^{\log_5 t} - t$ $\qquad \log_a x \quad \frac{\ln x}{\ln a} \quad \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$



$f'(t) = \ln 13 \cdot 13^{\log_5 t} \cdot \frac{1}{t \ln 5} - 1$

$t^{\frac{\log_t 12}{\log_t 5}} = 12^{\frac{1}{\log_t 5}} = 12^{\log_5 t}$

$e^{\ln t \cdot \frac{\ln 12}{\ln 5}} = 12^{\log_5 t}$

~~$12^{\log_5 t} + t \geqslant 13^{\log_5 t}$~~

$\log_5 t = p$

$t = 5^p$

$t^{\log_5 12} + t \geqslant t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geqslant 0$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} \cdot t - t^{\log_5 \frac{13}{5}} \cdot t + t \geqslant 0$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} + 1 \geqslant 0$

$t^{\log_5 12} + t \geqslant 13^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t} + t \geqslant 13^{\log_5 t}$

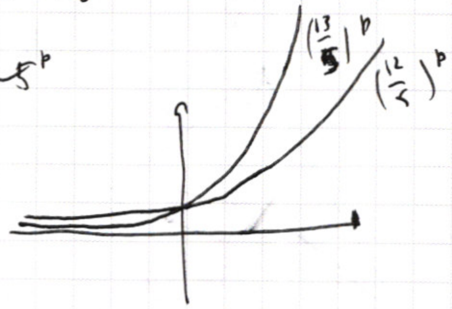
$\log_5 t = p$; $t = 5^p$

$12^p + 5^p \geqslant 13^p$

$\underbrace{12^p + 5^p}_{\nearrow} = \underbrace{13^p}_{\nearrow}$ $\qquad 144 + 25 = 169$

$p = 2$

$12^p + 5^p - 13^p = 0$



$\left(\frac{13}{5}\right)^p \quad \left(\frac{12}{5}\right)^p$

165

$\left(\frac{12}{5}\right)^p 5^p + 5^p \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^p \cdot 5^p$

$12^p + 5^p - 13^p \geqslant 0$

$12^3 + 5^3 - 13^3$

$12 + 5 - 13 = 4$

$\left(\frac{12}{5}\right)^p + 1 \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^p$

$\left(\frac{12}{5}\right)^p = \left(\frac{13}{5}\right)^p - 1$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

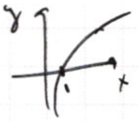
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 < p \le 2$

$0 < \log_5 t \le 2$

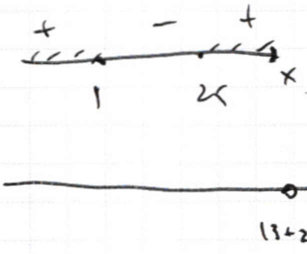


$1 < t \le 25$

$1 < 26x - x^2 \le 25$

$26x - x^2 \le 25$

$x^2 - 26x + 25 \ge 0$



$26x - x^2 > 1$

$x^2 - 26x + 1 < 0$

$\frac{D}{4} = 169 - 1 = 168 = (6\sqrt{6})^2$

$x_{1,2} = 13 \pm 2\sqrt{42}$

$42'00'00$

$[13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42}]$

$13 + 2\sqrt{42} \vee 25$

$2\sqrt{42} \vee 12$

$168 \vee 144$

$>$

$168 \,|\, 2$, $84 \,|\, 2$, $42 \,|\, 2$, $21 = 7 \cdot 3 \cdot 2^3$

$2^3 \cdot 3^3 =$

$7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2$

$6^3 = 6^2 \cdot 6$

$21 \cdot 42$

36, 6, 6

$2\sqrt{42}$

$42 \times 4 = 168$

$13 - 2\sqrt{42} \vee 1$

$2\sqrt{42} \vee 12$

$168 \vee 144$

$>$

$13 - 2\sqrt{42} \vee 25$

$2\sqrt{42} \vee -12$

$>$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0$

$(y-9x)(y-4x) + 6x + y - 6 = 0$

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y - 45 = 0$

$(3x-3)^2 - 45 + (y-6)^2 - 45 = 0$

$\to$

$(3x-3)^2 - 45 = 45 - (y-6)^2$

$y^2 + y(1-13x) + (36x^2 + 6x - 6) = 0$

$D = \cancel{1 - 169x + 16}$

$1 - 26x + 169x^2 - 144x^2 - 24x + 24 =$

$= 25x^2 - 50x + 25 =$

$= (5x-5)^2$

$36 \times 4 = 144$

$y_1 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = \frac{8x+4}{2} = 4x + 2$

$y_2 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = \frac{18x-6}{2} = 9x - 3$

$48 + 18 = 66$, $66 - 16 = 50$

24×45, 69, $- 4$, 65

$90 = 9 \cdot 10 = 3\sqrt{10}$

$12 \times 9 = 108$

$-12(9x-3)$

$-108x + 36$

363

36
+ 2
72

54
+ 18
2

108
180

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\log_{13}(t^{\log_5 12} + t) = \log_5 t}$

$\log_5 12 = \log_5 \frac{12}{5}\cdot 5 = \log_5 \frac{12}{5} + 1 \qquad 13 = 5^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} \cdot t + t \geqslant 5^{\log_5 13 \cdot \log}$ $\qquad \log_5 13 = \log_5(\frac{13}{5}\cdot 5) = \log_5\frac{13}{5}+1$

$t\,(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1) \geqslant 5^{(\log_5 \frac{13}{5}+1)\cdot \log_5(t)}$

$\cancel{\log_5 t} + \log_5(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1) \geqslant (\log_5 \frac{13}{5} + 1)\cdot \log_5 t$

$\cancel{\log_5 t}$ $\qquad \log_5 \frac{13}{5}\cdot \log_5 t + \cancel{\log_5 t}$

$\log_5(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1) \geqslant \log_5 \frac{13}{5}\cdot \log_5 t$

$t^{\log_5 12} + t \geqslant 13^{\log_5 t} \qquad t > 0$

$t^{\log_5(\frac{12}{5}\cdot 5)} + t \geqslant (\frac{13}{5}\cdot 5)^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}+1} + t \geqslant \frac{13}{5}^{\log_5 t}\cdot t$

$\cancel{t}(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 - \frac{13}{5}^{\log_5 t}) \geqslant 0 \qquad \frac{12}{5} + \frac{13}{5} = 5$

$t^{\log_5(5 - \frac{13}{5})} + 1 - \frac{13}{5}^{\log_5 t}$

$f(2) = f(1)$

⑤ $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$; $\cancel{f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})}$ $\qquad f(1) = 0$

$[4; 28]$ $\quad 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23;$ $\cancel{f(1)=}$ $\underbrace{f(a\cdot\frac{1}{a})}_{0} = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(2a) = \underbrace{f(2)}_{[\frac{2}{4}]_0} + f(a) \quad \Rightarrow f(2a) = f(a)$ $\qquad f(5a) = \underbrace{f(5)}_{1} + f(a)$

$f(3a) = f(a)$ $\qquad f(5a) = 1 + f(a)$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4 - 0
5 - 1
6 - 0
7 - 1
8 - 0
9 - 0
10 - 1
11 - 2
12 - 0
13 - 3
14 - 1
15 - 1
16 - 0
17 - 4
18 - 0
19 - 4
20 - 1
21 - 1
22 - 2
23 - 5
24 - 0
25 - 2
26 - 3
27 - 0
28 - 1

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

<0 : 0   <1 : 9   <2 : 17   <3 : 20   <4 : 22   <5 : 24

0 : — 0
1 : — 9   26
2 : — 17   46
3 : — 20   68
4 : — 22   92
5 : — 24

Ответ: 92

(6) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+8 \geq 18x^2-51x+28$

$(\frac{2}{3}; 2]$:   x = 1:

$\frac{8-6}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$

18 - 51 + 28

= -5

x = 2:

$\frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$

$2 \geq a+8 \geq -5$

$-1 \geq 2a+8 \geq -2$

$-5 \leq a+6 \leq 2$

$1 \leq -2a-8 \leq 2$

$-2 + \frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}$

$(9x - \frac{17}{6})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot 51$

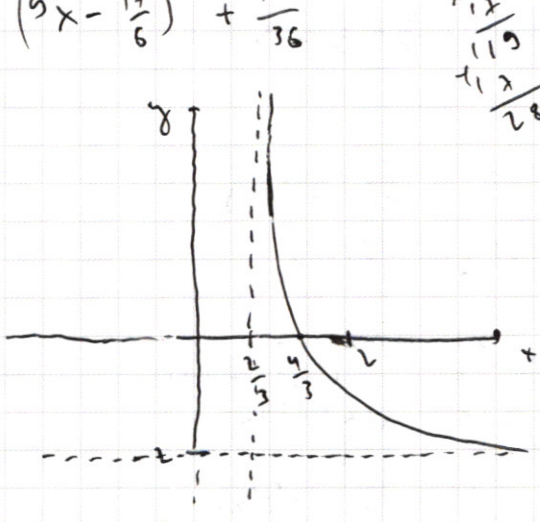
$-(\frac{17}{6})^2 + 28$

$(9x - \frac{17}{6})^2 + \frac{719}{36}$

$28 - \frac{289}{36}$

$19\frac{35}{36}$

8 - 6x = 0
6x = 8
$x = \frac{8}{6}$



☒ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)