# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow \cos(2\beta) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~Если $\cos2\alpha = 0$, и~~

I-й случай: $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \mid \cdot\sqrt{17}$

т.к. $tg\alpha$ определён

$\sin2\alpha\cdot4 - \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot4 - \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$\frac{tg^2\alpha + 8tg\alpha - 1 + 1 + tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2tg^2\alpha + 8tg\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$

II-й случай: $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \mid\cdot\sqrt{17}$

$4\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow \frac{8tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8tg\alpha + 1 - tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 8tg\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

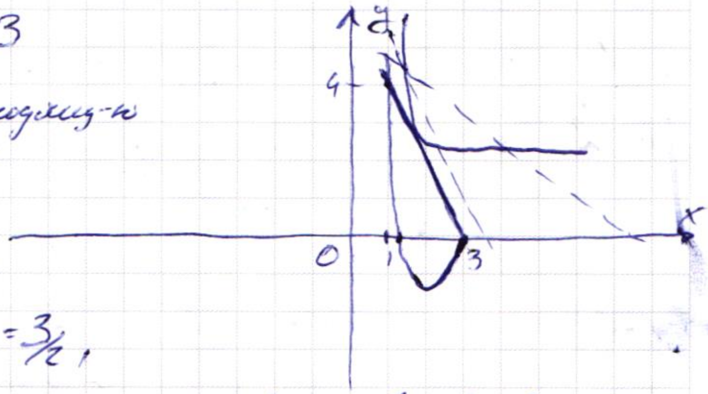
Ответ: $0,\ -4,\ -\frac{1}{4}$

№6. обозначим $\frac{4x-3}{2x-2} = f(x)$, $8x^2-34x+30 = g(x)$, $ax+b = h(x)$

$g(x)$ имеет корни $\frac{5}{4}$ и $3$, $g(x)$ пересекает прямую

$x=1$ в точке 4, если $\overset{h(x)}{ax+b} \ge g(x)$ на $(1;3]$, то

$h(1) \ge 4$ и $h(x)=0$ при $x \ge 3$




Рассмотрим $h(x) = -2x+6$, проходящую через точки $(1;4)$ и $(3;0)$

Заметим, что $h(x)$ касается $f(x)$ в точке $x_0 = \frac{3}{2}$,

действительно, уравнение касательной к $\frac{4x-3}{2x-2}$ в точке $x_0$ имеет вид $f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) =$

$= \frac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0-2}$, подставив $x_0 = \frac{3}{2}$, получим

уравнение $-2x+6 = h(x)$

Значит, если $h(x)$ пересекает ось $Ox$ не в точке 3, или ~~ось~~ $\overset{x=1}{~~Oy~~}$ не в точке 4, то $h(x)$

будет частично лежать выше графика функции $f(x)$, т.к. $h\left(\frac{3}{2}\right)$ будет больше чем

$-2\cdot\frac{3}{2}+6 = 3$, т.е. пара $(-2;6)$ - единственная подх-ая.

Ответ: $(-2;6)$.

№2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{49}{9}$, задаёт окружность с центром в $(1;\frac{2}{3})$ и радиусом $\frac{7}{3}$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-4x+3y+2)(-x+3y-1)=0 \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3y=4x-2 \\ 3y=x+1 \end{array}\right. \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases}$

I-й случай: $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$: $3x^2+3(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3})^2-6x-\frac{16x}{3}+\frac{8}{3}=4$

$3x^2+\frac{16x^2}{3}-\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}-6x-\frac{16x}{3}+\frac{8}{3}=4 \;/\cdot 3$

$25x^2-32x+4-18x+8-12=0$

$25x^2-60x=0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=-\frac{2}{3},\ 3y-2x=-6<0 \text{ — не подх.} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ — подходит. (удостоверимся подст-й)} \end{array}\right.$

II-й случай: $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$: $3x^2+3(\frac{x}{3}+\frac{1}{3})^2-6x-\frac{4x}{3}-\frac{4}{3}=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-6x-\frac{4x}{3}-\frac{4}{3}-4=0 \;/\cdot 3$

$10x^2-20x-15=0$, $2x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6},\ 3y-2x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}>0 \text{ — уд.} \\ x=\frac{2+\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{4+\sqrt{10}}{6},\ 3y-2x=-\frac{\sqrt{10}}{2}<0 \text{ — не уд.} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;2)$ и $(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x = \sqrt{(x-?)(y-?)+4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x \geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3y-2x \geq 0 \\ 9x^2+9y^2-18x-12y-12=0 \end{cases}$

Приложив 3-е уравнение на 3 и вычев из него первое, получим: $5x^2+15xy-20x-15y+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x(3y-4)-3y-2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+27y^2-45xy+6x+9y-6=0 \\ 3y-2x \geq 0 \\ 12x^2+12y^2-24x-16y-16=0 \end{cases}$

Вычтем первое из второго: $15y^2-45xy+30x+25y+10=0$

$3y^2-9xy+6x+5y+2=0$

$3y^2+y(5-9x)+6x+2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ (1)

ОДЗ: $x^2+6x>0$, $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$\log_4(x^2+6x)=\dfrac{\log_3(x^2+6x)}{\log_3 4}$ $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ $3^{\frac{\log_3(x^2+6x)}{\log_3 4}}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+6x)^{\frac{1}{\log_3 4}}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}$

Обозначим $x^2+6x=4^t$

$4^t \geq 4^{t\cdot\log_4 5}-(4^t)^{\log_4 3}=5^t-3^t$

~~$4^t+3^t-5^t$~~ Функция $f(t)=4^t+3^t-5^t$ монотонно убывает, при этом равна нулю при $t=2$,

т.е. $\cancel{4^t\geq 5^t-3^t}$ $f(t)\geq 0$ при $t\in(-\infty;2]$

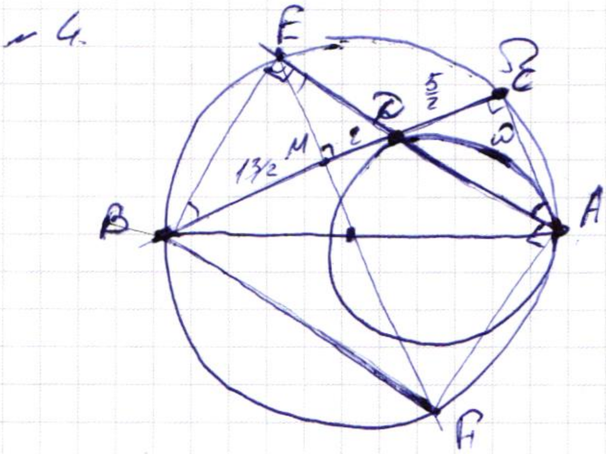
т.е. $4^t\in(0;16]$ и $0<x^2+6x\leq 16$, т.е. $x\in(0;2]$

Ответ: $x\in(0;2]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

№4.




По лемме Архимеда, E является серединой дуги $\overset{\frown}{BC}$ окр-сти $\Omega$, тогда $EF$ является серединным перпендикуляром к $BC$, а значит проходит через центр $\Omega$.

т.е. $EAFB$ – прямоугольник.

$BC = BD + DC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$, Пусть $M = BC \cap EF$,

тогда $BM = MC = \frac{9}{2}$. ~~Из вписанности $\angle BCA = \angle BEA = 90°$ и~~

~~$\angle DAC = \angle EAC = \angle EBC = \angle EBD \Rightarrow \triangle DAD \sim \triangle EBD \Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{AD}{BD}$~~

По свойству перес-хся хорд $ED \cdot DA = \frac{13 \cdot 5}{4} = \frac{65}{4}$ (1)

$CA$ и $EF$ перпенд-ны $BC$, а след-но они параллельны,

т.е. $\angle CAD = \angle MED \Rightarrow$ $\triangle ACD \sim \triangle EMD$.

$MD = MC - CD = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$, $\frac{MD}{CD} = \frac{ED}{DA} \Rightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow ED = \frac{4}{5} DA$, тогда $ED \cdot DA = \frac{4}{5} DA^2 = \frac{65}{4} \Rightarrow DA = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

и $ED = \sqrt{13}$, тогда по теореме Пифагора для $\triangle EDB$

$EB^2 = BD^2 - ED^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 13 = \frac{289 - 52}{4} = \frac{237}{4}$

$EB = \frac{\sqrt{237}}{2}$, $EB = AF$, $EA = ED + DA = \sqrt{13} + \frac{5}{4}\sqrt{13} = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

Тогда $AB^2 = EB^2 + EA^2 = \frac{237}{4} + \frac{81}{16} \cdot 13 = \frac{2001}{16}$, $AB = \frac{\sqrt{2001}}{4}$

т.к. $\Omega$ переходит в $\omega$ при гомотетии с центром в $A$ и ко эф-м $\frac{AD}{EA} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{13}}{\frac{9}{4}\sqrt{13}} = \frac{5}{9}$, то диаметр $\omega$ будет равен $AB \cdot \frac{5}{9} = \frac{5\sqrt{2001}}{36}$

радиус $\Omega$ равен $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2001}}{8}$, радиус $\omega$ равен $\frac{5\sqrt{2001}}{72}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{EA}{AF}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{237}}{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2\sqrt{79}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{9\sqrt{79}}{158}\right)$

$S_{\triangle AFE} = \frac{AF \cdot EA}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{237}}{4} = \frac{117}{16}\sqrt{79}$

Ответ: радиусы $\frac{\sqrt{2001}}{8}$ и $\frac{5}{72}\sqrt{2001}$, угол $\operatorname{arctg}\left(\frac{9\sqrt{79}}{158}\right)$, площадь $\frac{117}{16}\sqrt{79}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5. $f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(p) = [p/4]$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$,

$f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$,

$f(23) = 5$,

$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$

$3 \le x, y \le 27$, $f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0$, $f(x) < f(y)$

~~Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ — разложение $x$ на простые, тогда $f(x) =$~~

Если $x$ — степень простого, то $f(x) = f(p^{\alpha}) = f(p^{\alpha-1}) + f(p) =$

$= \ldots\ldots = \alpha \cdot f(p)$

Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ — разложение $x$ на простые, тогда $f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$

Выпишем таблицу значений $f(x)$ где $x \in \mathbb{Z}$ и $x \in [3; 27]$

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 |

| $x$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 3 | 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 |

1) $f(x) = 5$, к-во подх-х пар равно 0

2) $f(x) = 4$, к-во пар равно: $7 \cdot 17 = 119$

3) $f(x) = 3$, к-во пар равно: $10 \cdot 7 = 70$

4) $f(x) = 2$, к-во пар равно: $6 \cdot 1 = 6$, при $f(x) = 1$, пар нет Ответ: 195

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$, $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$, $\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, $\log_a b^n = n\cdot\log_a b$

$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

1) $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$

$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$ED = x \quad DA = y$

$xy = \frac{13 \cdot 5}{4} = \frac{65}{4}$

$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)' = \frac{4(2x-2)-(4x-3)2}{4x^2-8x+4} =$

$f'(x_0) \cdot x + f(x_0)$

$\triangle EDM \sim \triangle EFA$

$= 8x - 8 - 8x + 6$

$\frac{ED}{EF} = \frac{EM}{EA} = \frac{DM}{FA} \Rightarrow \frac{x}{d_1} =$

$= \frac{-2}{4x_0^2 - 8x_0 + 4} \cdot x + \frac{4x_0 - 3}{2x_0 - 2} =$

$EM \cdot MF$

$= -2x + 6$

$8 - 34 + 30 = 4$

$\frac{4x_0 - 3}{2x_0 - 2} = 6$

$4x_0 - 3 = 12x_0 - 12$

$8x_0 = 9$

$x_0 = \frac{9}{8}$

$a + b = 4$

$289 - 240 = 49$

$\frac{17-7}{8} = \frac{5}{4}$

$\frac{17+7}{8} = 3$

$\frac{-2}{(2x-2)^2} =$

$12 - 36 + 6 = 0$

$12 = 2b$

$b = 6$

$a = 4 - 6 = -2$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$f(1) = 0$

$8 - 34 + 30 = 4$

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f(p) = [p/4]$

$3 \le x \le 27 \qquad f(x/y) < 0$

$3 \le y \le 27$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$D/4 = 289 - 240 = 49$

$x_1 = \frac{17-7}{8} = \frac{5}{4}$

$x_2 = \frac{24}{8} = 3$

$\left(2 \cdot \frac{9}{8} - 2\right) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$

$\sin 2\alpha \cdot 4 \pm \cos 2\alpha = -1 \quad | : \cos 2\alpha$

$tg 2\alpha \cdot 4 \pm 1 = -1$

$\cos 2\alpha = 0$

$tg\alpha(tg\alpha + 4)$

$9y^2 - 24y + 16 + 12y + 8 =$

$= 9y^2 - 12y + 24$

$3y^2 - 4y + 6$

$D = 16 -$

$x^2 + 6x - 16 \le 0$

$D/4 = 9 + 16 = 25$

$x_1 = -3 - 5 = -8$

$x_2 = -3 + 5 = 2$

$xy - 2x - 3y + \cancel{\;} = (x+a)(y+b) = xy + xb + ay + ab$

$a = -2, b = -3$

$\cancel{(x-3)(y-3) = xy} \quad (x-3)(y-2) = xy - 2x - 3y + 6$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y =$

$3(x^2 - 2x + 1) + (3y^2$

$3y - 2x \ge 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\cancel{9y^2 + 4x^2 - 16xy + 2x + 3y - 2 = 0}$

$4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + bdy^2 + (bc + ad)xy$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \quad | \cdot 3$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0$

$5x^2 + 16xy - 20x - 15y - 10 = 0$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y - 2 = 0$

$\cancel{9y^2 - 24y + 12y + 8 =}$

$\cancel{= 9y^2 - 12y}$

$9y^2 - 24y + 16 + 12y + 8$

$9y^2 - 12y + 24 = 0$

$3y^2 - 4y + 6$

$7^{(1-2)} - 7^{(1+2)} \ge 7^{2}$

$7^{9} \ge \qquad = \quad 7^{21}$

$49 \cdot 125 - 27$

$0 \le 1$

$7^9 \le 9^7 \quad 4^7 + 3^7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$81x^2 - 90x + 25 - 72x - 24$

$$\begin{cases} 12x^2 + 27y^2 - 45xy + 6x + 9y - 6 = 0 \\ 12x^2 + 12y^2 - 24x - 16y - 16 = 0 \end{cases}$$

$t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 5 - \log_4 3} - 1\right) \leq t$

$15y^2 - 45xy + 30x + 25y + 10 = 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) \leq t$

$3y^2 - 9xy + 6x + 5y + 2 = 0$

$\log_4 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 4}$

$3y^2 + y(5-9x) + 6x + 2$

$D = 81x^2 - 90x + 25 - 12(6x+2) = 81x^2 - 90x + 25 - 72x - 24 =$

$= 81x^2 - 18x + 1 = 9x - 1$

$t^{\frac{\log_3 5}{\log_3 4}} - t^{\frac{1}{\log_3 4}} =$

$y_1 = \frac{5 - 9x - 9x + 1}{2}$

$= t^{\frac{1}{\log_3 4}}\left(t^{\log_3 5} - 1\right)$

$\log_a b = \frac{\log_b c}{\log_a c}$

$\frac{1}{\log_3 4} = \log_4 3$

$\log_2 16 = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_4 16}{\log_4 2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

$t + t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 (x^2+6x) = \frac{\log_3 (x^2+6x)}{\log_3 4}$

$\log_4 5 = \frac{\log_{x^2+6x} 5}{\log_{x^2+6x} 4}$

$2t^{\frac{\log_4 3 + 1}{2}}$

$2t^{\log_4 12}$

$3^{\frac{\log_3 (x^2+6x)}{\log_3 4}} = \left((x^2+6x)\right)^{\frac{1}{\log_3 4}}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$1 \geq t^{\log_4 5 - 1} - t^{\log_4 3 - 1}$

$x^2 + 6x = 4^t$

$1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$4^t \geq 5^t - 3^t \quad \log_4 5 - \log_4 4 = \log_4 \frac{5}{4}$

$4^t$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}\left(t^{\log_4 \frac{5}{4} - \log_4 \frac{3}{4}} - 1\right)$

$t + t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) <$

$t\left(1 + t^{\log_4 \frac{3}{4}}\right) \geq$

$f(t) = t + t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5}$

$f'(t) = 1 + \log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} \leq 0$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

$f(t) = 4^t + 3^t - 5^t \quad 3^t \geq 5^t - 4^t$

$f'(t) = \ln 4 \cdot 4^t + \ln 3 \cdot 3^t - \ln 5 \cdot 5^t$

$(e^x)' = e^x$

$3^t + 5^t \geq 2\sqrt{15}^t \geq 4^t$

$2^t + 4^t \vee 3^t + 5^t = (4-1)^t + (4+1)^t$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

~~a = 4/dc~~ $f = -\frac{2}{c}$ $af = 2$ $a = -c$

$e = \frac{3}{c}$ $a \cdot -\frac{2}{c} = 2$ $b = 3c$

$a = -c$ $d = -\frac{4}{c}$

$e = \frac{3}{c}$

$b \cdot \frac{3}{c} = 9$ $b = 3c$ $f = -\frac{2}{c}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 7 \\ \hline 119 \\ +\ 70 \\ \hline 189 \\ +\ 6 \\ \hline 193 \end{array}$$

$ae = -3 + 3c \cdot d = -15$

$3cd = -12$ $c = 1,\ a = -1,\ b = 3,\ d = -4$

$cd = -4$ $e = 3,\ f = -2$

$d = -\frac{4}{c}$ $(-x + 3y + 1)(-4x + 3y - 2) =$

$= 4x^2 - 3xy + 2x - 12xy + 9y^2 - 6y - 4x$

$$\begin{cases} ad = 4 & , -4 \cdot -1 = 4 \\ be = 9 & , 3 \cdot 3 = 9 \\ ae + bd = -15 & , -12 - 3 = -15 \\ af + cd = 2 & 4 - 2 = 2 \\ bf + ec = 3 & -3 + 6 = 3 \\ \cancel{\ldots} & , f = -\frac{2}{c} \end{cases}$$

~~$b \cdot -\frac{2}{c} + e \cdot c = 3$~~

$a \cdot e +$

$a \cdot -\frac{2}{c} + c \cdot d = 2$

$b \cdot -\frac{2}{c} + e \cdot c = 3$

$-1,\ 2$

$f = -1,\ c = 2$ $-a + 2d = 2,\ a = 2d - 2$

~~...~~ $ad = 4$

$2d^2 - 2d - 4 = 0$

$d^2 - d - 2 = 0$

$1 + 8 = 9,\ d_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ d_2 = 2$

$d = -1,\ a = -4, \mid d = 2,\ a = 2$

$-4e - b = -15,$ $b = 15 - 4e$

$be = 9$

$-b + 2e = 3,\ b = 2e - 3$

$15 - 4e = 2e - 3$

$6e = 18,\ e = 3$

$b = 3$

$b = 3,\ e = 3,\ a = -4,\ d = -1$
$f = -1,\ c = 2$

$4x^2 - 12xy + 4x - 3xy + 9y^2 - 3y - 2x + 6y - 2$

$4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8x-6-8x+8}{(2x-2)^2}=\frac{2}{(2x-2)^2}$$

$$\frac{6}{2}+3$$

$$\frac{-2}{(2x_0-2)^2}=-2$$

$(2x-2)^2=1$

$2x-2=-1 \qquad x=\frac{3}{2}$

$$\frac{-2}{1}$$

$$f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot x+\underbrace{f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0}_{\parallel}$$

$$\frac{4\cdot\frac{3}{2}-3}{2\cdot\frac{3}{2}-2}=3 \qquad +2\cdot\frac{3}{2}=6$$

$3x^2-6x+3y^2-4y=4 \quad |:3$

$$x^2-2x+y^2-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=x^2-2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=$$

$$=x^2-2x+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{13}{9}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{9}=\frac{13}{9}$$

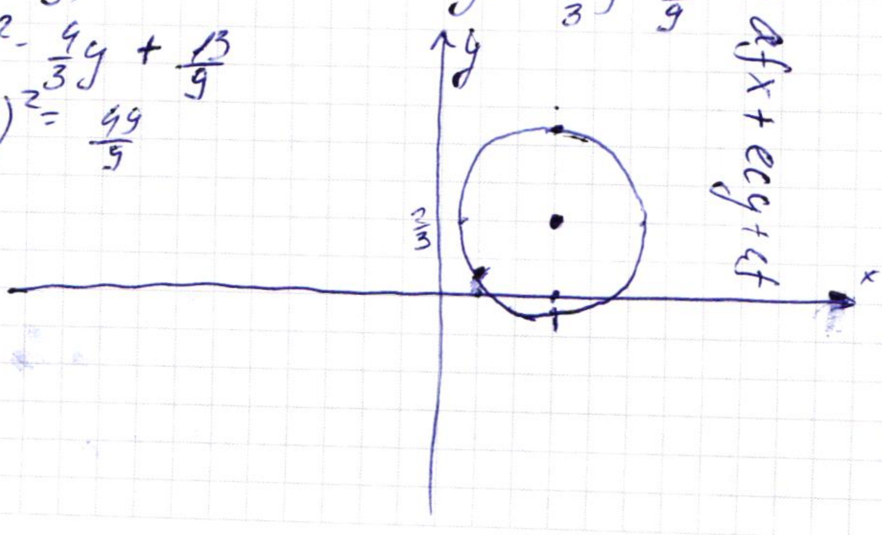
$$\frac{36}{13}{49}$$

7) $\Leftrightarrow 9y^2-12xy+4x^2=(ax+by+c)(dx+ey+f)=adx^2+bey^2+(ae+bd)xy+afx+ecy+cf$

$ad=4$, $be=9$, $ae+bd=-15$, $af=2$, $ec=3$, $fc=-2$

$\Leftrightarrow 3y\geq 2x$, $y\geq\frac{2}{3}x$

$9x^2+9y^2-15xy+2x+3y-2=0$




☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

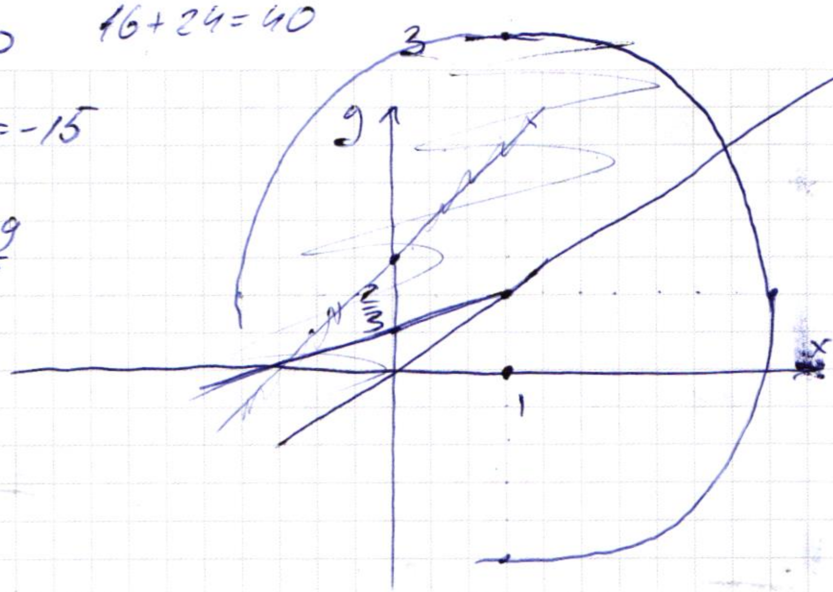
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$D/4 = 100 + 150 = 250$ $16+24=40$

$2-4-18=$

$1-4-12=-15$




$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

$(x-1)$

$3x^2 + \frac{(12x-6)^2}{4}$

$144x^2 - 144x + 36$

$-16x +$

$x=0, \quad y = -\frac{2}{3}$ $D/4 = 4+6=10$

$x_1 = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$-6$

$x_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$x^2 - 2x = 0$ $x=2, \quad y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$

$x(x-2)=0, \quad x=2$

$6-4 = \sqrt{12-4-6+2}$

$2 =$

$3y - 2x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} =$

$=$

~~$12+12=12-8=4$~~

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} - 2 - \sqrt{10} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$